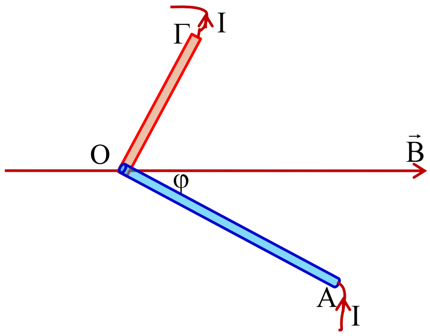
10. Η δύναμη Laplace σε σύστημα αγωγών (1ο μέρος)



Δύο αγωγοί ΑΟ και ΟΓ με μήκη L_1 και L_2 είναι κάθετοι, ακλόνητα συνδεδεμένοι στο κοινό τους σημείο Ο και διαρρέονται από ρεύμα σταθερής έντασης Ι, όπως στο σχήμα. Το σύστημα των δύο αγωγών είναι μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης $\vec{B}$ του οποίου οι δυναμικές γραμμές είναι παράλληλες με το επίπεδο των αγωγών.

α. Εξηγείτε ότι το μέτρο της συνολικής δύναμης Laplace που δέχεται ο αγωγός ΑΟΓ ισούται με το μέτρο της Laplace που θα δέχονταν ένας υποθετικός ευθύγραμμος αγωγός ΑΓ που ενώνει τα άκρα Α και Γ και διαρρέεται από την ίδια ένταση ρεύματος.

Στρέφουμε το σύστημα των δύο αγωγών περί άξονα κάθετο στο επίπεδο των αγωγών που διέρχεται από το κοινό σημείο Ο, το ακινητοποιούμε σε διάφορες θέσεις και μετρούμε την δύναμη Laplace.

β. Να βρείτε σε ποιες θέσεις πρέπει να το ακινητοποιήσουμε τον αγωγό ΑΟΓ, ώστε η ασκούμενη σε αυτόν (μετά την ακινητοποίηση) δύναμη Laplace να έχει την μέγιστη και ελάχιστη τιμή του μέτρου της που δέχεται ο αγωγός ΑΟΓ. Στις θέσεις αυτές να υπολογίσετε την μέγιστη και ελάχιστη δύναμη Laplace.

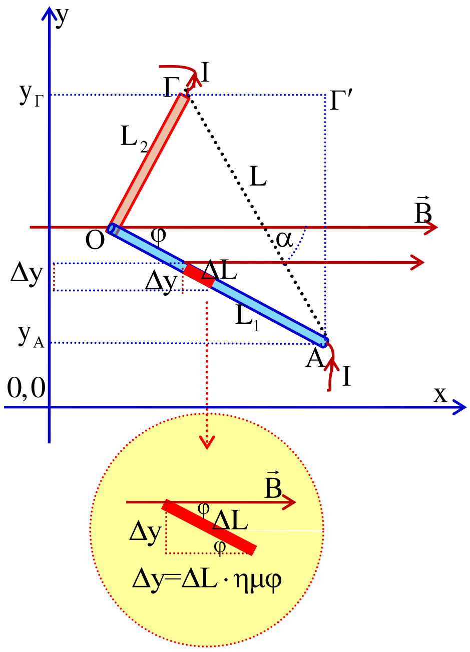
(*) Σχόλιο- παρατήρηση: Το σύστημα των αγωγών διαρρέεται από ρεύμα σταθερής έντασης. Αυτό σημαίνει ότι το σύστημα τροφοδοτείται από πηγή σταθερής ΗΕΔ. Όταν όμως στρέφεται μέσα στο μαγνητικό πεδίο εκτός από την πηγή συνεχούς τροφοδοσίας υπάρχει και ΗΕΔ-Επαγωγής στους αγωγούς που τροποποιεί την ανωτέρω ένταση ρεύματος. Επειδή θέλουμε σταθερή ένταση ρεύματος και λογικά δεν μπορούμε να αγνοήσουμε το φαινόμενο επαγωγής, ακινητοποιούμε το σύστημα σε διάφορες θέσεις, ώστε να μη υπάρχει ΗΕΔ-Επαγωγής και η ένταση ρεύματος να οφείλεται μόνο στην πηγή τροφοδοσίας.

Απάντηση

α. Έστω ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων (x,y) και το σύστημα των αγωγών ΑΟΓ σε αυτό το σύστημα, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Ένα στοιχειώδες ρευματοφόρο τμήμα ΔL του αγωγού που σχηματίζει γωνία φ με την ένταση $\vec{B}$ του μαγνητικού πεδίου δέχεται δύναμη Laplace $\Delta F_L = B \cdot I \cdot \Delta L \cdot ημφ$ ή

$\Delta F_L = B \cdot I \cdot (\Delta L \cdot ημφ)$ ή $\Delta F_L = B \cdot I \cdot \Delta y$.



Η συνολική δύναμη Laplace είναι το διανυσματικό άθροισμα των επιμέρους Laplace $\vec{F}_L = \sum \Delta\vec{F}_L$. Επειδή όμως οι επιμέρους Laplace έχουν τη ίδια διεύθυνση (κάθετη στο επίπεδο των αγωγών και της $\vec{B}$) η αλγεβρική τιμή της συνολικής Laplace ισούται με αλγεβρικό άθροισμα επιμέρους Laplace, οπότε $F_L = \sum \Delta F_L$ ή $F_L = \sum (B \cdot I \cdot \Delta y)$ ή $F_L = B \cdot I \sum (\Delta y)$ ή $F_L = BI(y_Γ - y_A)$ ή $\mathbf{F_L = BI(ΑΓ')}$, όπου ΑΓ΄ η προβολή του αγωγού ΑΟΓ σε διεύθυνση κάθετη και ομοεπίπεδη με τις δυναμικές γραμμές. Επειδή δε $ΑΓ' = (ΑΓ)ημα$ η σχέση $\mathbf{F_L = BI(ΑΓ')}$ γράφεται $F_L = BI(ΑΓ)ημα$ ή $\mathbf{F_L = BILημα}$ ή $\mathbf{F_L = BI\sqrt{L_1^2 + L_2^2}\,ημα}$ που δηλώνει το μέτρο της Laplace που θα δέχονταν ένας υποθετικός αγωγός ΑΓ που ενώνει τα άκρα του υπάρχοντος αγωγού αν διαρρέονταν από την ίδια ένταση ρεύματος .

Άλλη απόδειξη:

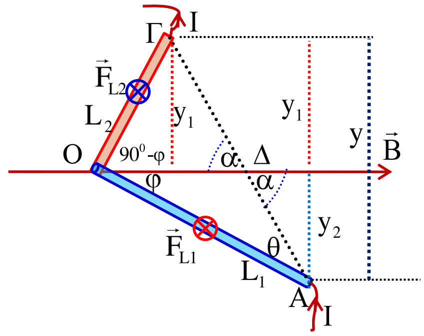
Η συνολική δύναμη Laplace στον αγωγό ΑΟΓ είναι $\vec{F}_L = \vec{F}_{L,AO} + \vec{F}_{L,OΓ} \Rightarrow \vec{F}_L = \vec{F}_{L1} + \vec{F}_{L2}$ και επειδή οι επιμέρους Laplace είναι ομόρροπες $F_L = F_{L1} + F_{L2}$. Από το σχήμα έχουμε $F_L = F_{L1} + F_{L2}$

$\Rightarrow F_L = BIL_1ημφ + BIL_2ημ(90-φ) \Rightarrow$

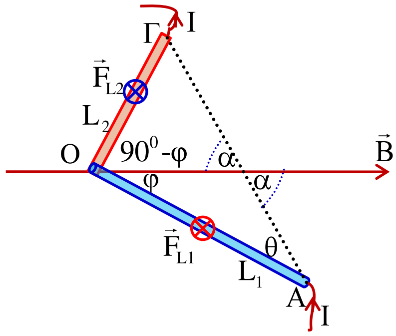
$F_L = BIy_1 + BIy_2 \Rightarrow F_L = BI(ΑΔ)ημα + BI(ΔΓ)\,ημα$

$\Rightarrow F_L = BI(ΑΔ + ΔΓ)ημα \Rightarrow \mathbf{F_L = BI(ΑΓ)ημα}$ …

που δηλώνει το μέτρο της Laplace που θα δέχονταν ένας υποθετικός αγωγός ΑΓ που ενώνει τα άκρα του υπάρχοντος αγωγού αν διαρρέονταν από την ίδια ένταση ρεύματος .



Μια άλλη πιο δύσκολη (μαθηματικά) απόδειξη:



Από την προηγούμενη σχέση για την συνολική δύναμη Laplace, αλλά και με βάση το μήκος της ΑΓ, $L=\sqrt{L_1^2+L_2^2}$ και τη γωνία α=φ+θ που σχηματίζει αυτή με την ένταση του μαγνητικού πεδίου, έχουμε $F_L=BIL_1ημφ+BIL_2συνφ$

$$\xrightarrow{φ=α-θ} \quad F_L=BIL_1ημ(α-θ)+BIL_2συν(α-θ) \quad \Rightarrow$$

$$F_L=BIL_1\left(ημασυνθ-συναημθ\right)+BIL_2\left(συνασυνθ+ημαημθ\right)$$

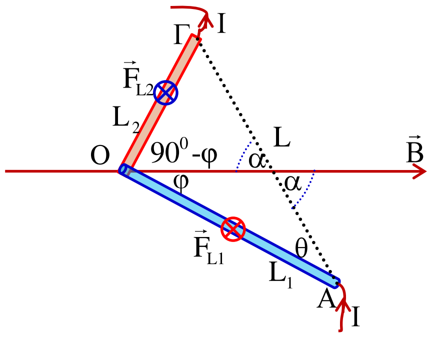
$$F_L=BIL_1\left(ημα\frac{L_1}{L}-συνα\frac{L_2}{L}-\right)+BIL_2\left(συνα\frac{L_1}{L}+ημα\frac{L_2}{L}\right)$$

$$F_L=BI\frac{L_1^2}{L}ημα-BI\frac{L_1L_2}{L}συνα+BI\frac{L_2L_1}{L}συνα+BI\frac{L_2^2}{L}ημα \Rightarrow F_L=BI\frac{L_1^2}{L}ημα+BI\frac{L_2^2}{L}ημα \Rightarrow$$

$$F_L=BI\frac{L_1^2+L_2^2}{L}ημα \Rightarrow F_L=BI\frac{L^2}{L}ημα \Rightarrow F_L=BILημα \Rightarrow F_L=BI\sqrt{L_1^2+L_2^2}ημα \text{ ή}$$

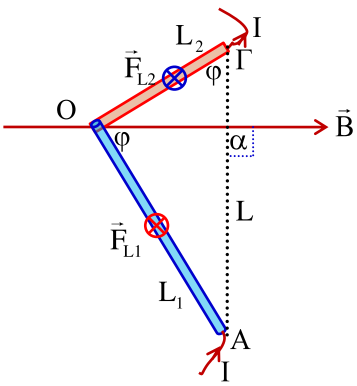
$\mathbf{F_L = BI(ΑΓ)ημα}$ ő. ἔ. δ (… δύναμη Laplace που θα δέχονταν το τμήμα ΑΓ αν ήταν ρευματοφόρο από ρεύμα έντασης Ι από το Α προς το Γ).

β. Η Laplace που ασκείται στο τμήμα ΑΟΓ είναι $F_L=BI\sqrt{L_1^2+L_2^2}ημα$ και από εδώ φαίνεται ότι το μέτρο της εξαρτάται από την γωνία α που σχηματίζει η ΑΓ με την ένταση $\vec{B}$.

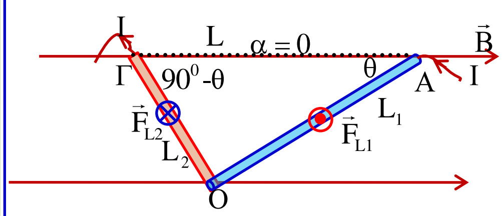


Μέγιστη τιμή του μέτρου της Laplace έχουμε όταν ημα=1 ή **α=90**, όταν $ΑΓ \perp \vec{B}$ με $F_{L,max}=BI\sqrt{L_1^2+L_2^2}$

Ελάχιστη τιμή του μέτρου της Laplace έχουμε όταν ημα=0 ή **α=0**, όταν $ΑΓ // \vec{B}$ με $F_{L,min}=0$



Εδώ έχουμε τη μέγιστη δύναμη Laplace $F_{L,max}=BI\sqrt{L_1^2+L_2^2}$ …



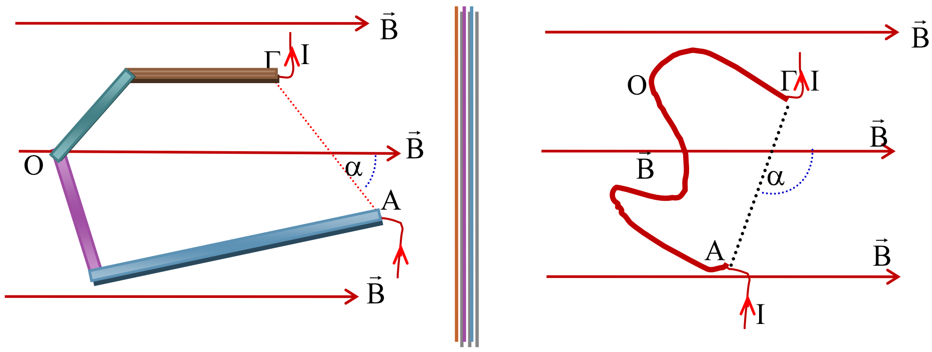
Εδώ έχουμε τη ελάχιστη δύναμη Laplace $F_{L,min}=0$ …

$F_L=BIL_1ημθ-BIL_2ημ(90^0-θ)$ ή

$F_L=BIL_1ημθ-BIL_2συνθ$ ή

$F_L=BIL_1\frac{L_2}{L}-BIL_2\frac{L_1}{L}$ ή $\mathbf{F_L = 0}$

Σχόλιο: Η πρόταση (α) ισχύει δια οποιοδήποτε σύστημα δύο ή περισσοτέρων ομοεπιπέδων αγωγών ή οποιοδήποτε σχήμα του αγωγού ΑΟΓ …



$F_{L(ΑΟΓ)}=BI(ΑΓ)ημα$