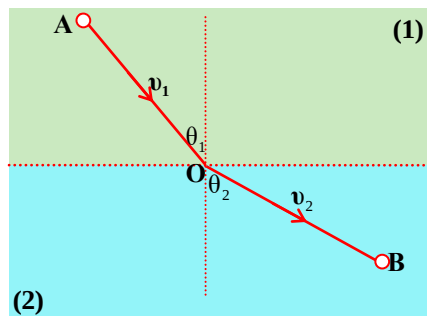


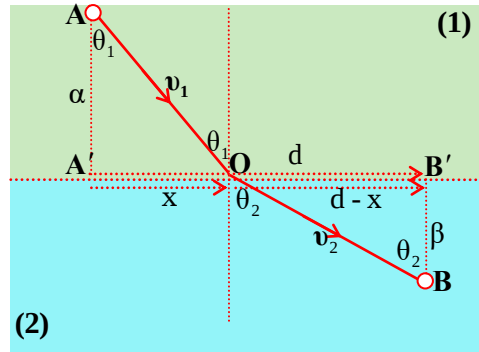
Οπτικό ανάλογο στην κινηματική

Η ταχύτητα ενός κινητού σε ένα μέσον (1) έχει μέτρο v_1 και σε ένα μέσον (2) έχει μέτρο v_2 . Όταν το κινητό μεταβαίνει από το σημείο Α του μέσου (1) στο σημείο Β του μέσου (2) με ευθύγραμμες επιμέρους ισοταχείς κινήσεις, ο απαιτούμενος χρόνος γίνεται ελάχιστος, όταν οι τροχιές έχουν τέτοιες διευθύνσεις ώστε να ισχύει $\frac{\eta\mu\theta_1}{\eta\mu\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$.



Απάντηση

Έστω ότι το κινητό ακολουθεί την διαδρομή του σχήματος μέσω της οποίας επιτυγχάνεται ο ελάχιστος χρόνος. Στο μέσον (1) ακολουθεί την διαδρομή AO που σχηματίζει γωνία θ_1 με την κάθετο στη διαχωριστική επιφάνεια και στο μέσον (2) ακολουθεί την διαδρομή OB που σχηματίζει γωνία θ_2 με την κάθετο στη διαχωριστική επιφάνεια. Ο χρόνος από το A στο B είναι $t = \frac{AO}{v_1} + \frac{OB}{v_2}$ και από την γεωμετρία του



σχήματος και σε συνάρτηση με την απόσταση x του σημείου O από το A' η σχέση του

χρόνου γίνεται $t = \frac{\sqrt{x^2 + \alpha^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(d-x)^2 + \beta^2}}{v_2}$ (1). Εδώ ουσιαστικά ζητείται η τιμή της

μεταβλητής x ώστε ο χρόνος της ποσότητας (1) να γίνει ελάχιστος. Αυτό όμως επιτυγχάνεται όταν η πρώτη παράγωγος της (1) ως προς την μεταβλητή x μηδενίζεται.

$$\frac{dt}{dx} = 0 \xrightarrow{(1)} \frac{d}{dx} \left[\frac{\sqrt{x^2 + \alpha^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(d-x)^2 + \beta^2}}{v_2} \right] = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{(x^2 + \alpha^2)^{1/2}}{v_1} + \frac{((d-x)^2 + \beta^2)^{1/2}}{v_2} \right] = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\frac{1}{2}(x^2 + \alpha^2)^{-1/2} \cdot (2x)}{v_1} + \frac{\frac{1}{2}((d-x)^2 + \beta^2)^{-1/2} \cdot 2(d-x)(-1)}{v_2} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{x}{v_1 \sqrt{x^2 + \alpha^2}} - \frac{d-x}{v_2 \sqrt{(d-x)^2 + \beta^2}} = 0 \xrightarrow{\text{σχήμα}} \frac{x}{v_1 \cdot AO} - \frac{d-x}{v_2 \cdot OB} = 0 \Rightarrow \frac{1}{v_1} \frac{x}{AO} = \frac{1}{v_2} \frac{d-x}{OB}$$

$$\xrightarrow{\text{σχήμα}} \frac{1}{v_1} \eta \mu \theta_1 = \frac{1}{v_2} \eta \mu \theta_2 \quad \text{ή} \quad \frac{\eta \mu \theta_1}{v_1} = \frac{\eta \mu \theta_2}{v_2} \quad \text{ή} \quad \frac{\eta \mu \theta_1}{\eta \mu \theta_2} = \frac{v_1}{v_2} \quad (\delta. \xi. \delta).$$

(*) Αν είχαμε φωτεινή ακτίνα που διαθλάται από διαφανές μέσον (1) με δείκτη διάθλασης n_1 προς άλλο διαφανές μέσον (2) με δείκτη διάθλασης n_2 για τις ταχύτητες του φωτός v_1 και

v_2 στα δύο μέσα ισχύει $n_1 = \frac{c}{v_1}$ ή $v_1 = \frac{c}{n_1}$ και $v_2 = \frac{c}{n_2}$, οπότε η τελευταία σχέση γράφεται

$$\dots \frac{\eta \mu \theta_1}{\eta \mu \theta_2} = \frac{c/n_1}{c/n_2} \quad \text{ή} \quad \frac{\eta \mu \theta_1}{\eta \mu \theta_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad \text{ή} \quad n_1 \cdot \eta \mu \theta_1 = n_2 \cdot \eta \mu \theta_2 \quad [\text{Νόμος Snell}].$$

(**) Στην διάθλαση του φωτός ακολουθείται η πορεία του ελάχιστου χρόνου.

(***) Στην ανάκλαση του φωτός ακολουθείται η πορεία του ελάχιστου δρόμου.