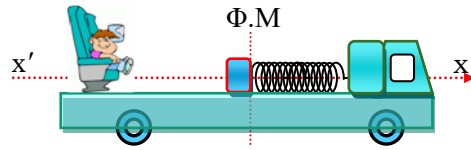


Απλή αρμονική ταλάντωση ...σε επιταχυνόμενο σύστημα

Πάνω στο λείο δάπεδο ενός αυτοκινήτου είναι ακλόνητα στερεωμένο ένα ιδανικό ελατήριο σταθεράς $K = 50 \text{ N/m}$ στο άκρο του οποίου είναι δεμένο ένα σώμα μάζας $m = 2 \text{ Kg}$. Αρχικά όλο το σύστημα ηρεμεί. Την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το αυτοκίνητο αρχίζει από την



ηρεμία να επιταχύνεται με σταθερή επιτάχυνση $a = 2 \text{ m/s}^2$. Ένας παρατηρητής - επιβάτης του αυτοκινήτου που κάθεται σε μια θέση αυτού παρατηρεί την κίνηση του σώματος και γράφει τις αντίστοιχες εξισώσεις κίνησης.

α. Εξηγήστε ότι βλέπει το σώμα να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

β. Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης και να βρείτε την χρονική εξίσωση της δύναμης που ασκεί το ελατήριο στο σώμα.

Την χρονική στιγμή $t_1 = \frac{3\pi}{5} \text{ s}$ το αυτοκίνητο συνεχίζει με σταθερή ταχύτητα. Να υπολογίσετε,

γ. το νέο πλάτος της ταλάντωσης,

δ. την ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή $t_2 = \frac{2\pi}{3} \text{ s}$.

Την χρονική στιγμή $t_3 = 2\pi \text{ s}$ το αυτοκίνητο επιβραδύνεται με σταθερή επιβράδυνση μέτρου $a' = 2 \text{ m/s}^2$

Να υπολογίσετε,

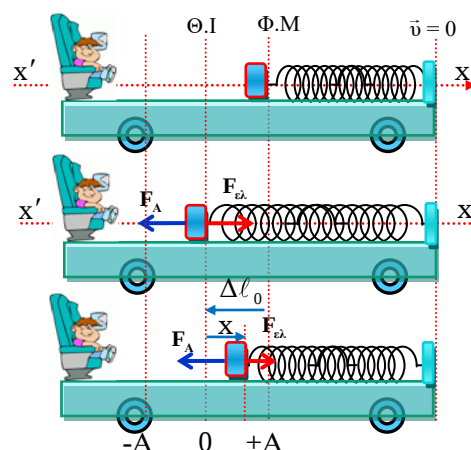
ε. το νέο πλάτος της ταλάντωσης,

στ. την χρονική εξίσωση της κινητικής ενέργειας που δίνει για το σώμα μετά τη χρονική στιγμή $t_3 = 2\pi \text{ s}$ ο κινούμενος παρατηρητής.

Απάντηση

α. Η παρατήρηση του σώματος γίνεται για μη αδρανειακό παρατηρητή ο οποίος εκτός των πραγματικών δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα προσθέτει και την **δύναμη D'Alembert** $\vec{F}_A = -m\vec{a}$ ¹.

Πριν το αυτοκίνητο αρχίσει κινούμενο η θέση ισορροπίας (Θ.Ι) του σώματος ταυτίζεται με την θέση που το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος (Φ.Μ). Μόλις όμως αρχίζει η επιτάχυνση του αυτοκινήτου η Θ.Ι αλλάζει, είναι πιο αρνητικά με το ελατήριο να έχει επιμήκυνση $\Delta\ell_0$ τέτοια ώστε (για τον μη αδρανειακό παρατηρητή) $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{ελ} - F_A = 0 \Rightarrow F_{ελ} = F_A \Rightarrow K\Delta\ell_0 = ma$ (1) ή $\Delta\ell_0 = \frac{ma}{K} \xrightarrow{\text{S.I.}} \Delta\ell_0 = 0,08\text{m}$.



[Σχόλιο –Παρατήρηση: Ένα αδρανειακός παρατηρητής (ακίνητος) εκτός αυτοκινήτου την μόνη δύναμη που τοποθετεί στο σώμα στον άξονα $x'x$ είναι η δύναμη του ελατηρίου. Για τον παρατηρητή αυτόν το σώμα θα ισορροπεί σε εκείνη την θέση, που δύναμη του ελατηρίου θα του «βγάξει» επιτάχυνση ίση με την επιτάχυνση του αυτοκινήτου, ώστε να έχει και την ίδια απόλυτη ταχύτητα και να μην αλλάζει θέση ως προς το αυτοκίνητο.... $\Sigma F_x = ma \Rightarrow F_{ελ} = ma$ ή $K\Delta\ell_0 = ma$ ή $\Delta\ell_0 = \frac{ma}{K} \xrightarrow{\text{S.I.}} \Delta\ell_0 = 0,08\text{m} .]$

Αν κάποιος επιμήκυνε το ελατήριο κατά $\Delta\ell_0 = 0,08\text{m}$ (μόλις το αυτοκίνητο άρχισε να επιταχύνεται) και το άφηνε ελεύθερο χωρίς ταχύτητα, το σώμα θα έμεινε ακίνητο ως προς το αυτοκίνητο. Τώρα όμως δεν γίνεται αυτό, αλλά την $t_0 = 0$ το σώμα είναι στην θέση του Φ.Μ με μηδενική ταχύτητα, ενώ ταυτόχρονα αλλάζει η Θ.Ι και απέχει από αυτή απόσταση $0,08$. Άρα θα κάνει ταλάντωση με πλάτος **$A = \Delta\ell_0 = 0,08\text{m}$** .

Σε μια τυχαία θέση που η απομάκρυνση είναι x και η παραμόρφωση του ελατηρίου $\Delta\ell_0 - x$ ο ανωτέρω μη αδρανειακός παρατηρητής γράφει $\Sigma \vec{F}_x = \vec{F}_{ελ} + \vec{F}_A \Rightarrow \Sigma F_x = F_{ελ} - F_A \Rightarrow \Sigma F_x = K(\Delta\ell_0 - x) - ma \Rightarrow \Sigma F_x = K\Delta\ell_0 - Kx - ma \xrightarrow{(1)} \Sigma F_x = -Kx$, άρα ο παρατηρητής βλέπει α.α.τ με σταθερά επαναφοράς $D = K$, κυκλική συχνότητα $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \xrightarrow{\text{S.I.}} \omega = 5\text{rad/s}$, περίοδο

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ ή } T = \frac{2\pi}{5}\text{s} \text{ και πλάτος } A = 0,08\text{m} .$$

¹ Ο D'Alembert έδωσε μία νέα μορφή στον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για να ισχύει σε ένα μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Σε ένα τέτοιο μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς πρέπει να ληφθούν υπόψη εκτός από τις πραγματικές δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα και η δύναμη αδράνειας ή «**δύναμη D'Alembert**». Τη δύναμη αυτή την « αντιλαμβάνεται » μόνο ένας μη αδρανειακός παρατηρητής που κινείται μαζί με το σώμα προκειμένου να ερμηνεύσει την ισορροπία του σώματος ως προς το μη αδρανειακό σύστημα. Η «**δύναμη D'Alembert**» έχει κατεύθυνση αντίθετη της επιτάχυνσης του σώματος και τιμή ίση με το γινόμενο της μάζας επί την επιτάχυνση, δηλαδή $F_A = -m\vec{a}$. Με την βοήθεια των δυνάμεων αυτών ένα μη αδρανειακό σύστημα μπορεί να μελετηθεί ως αδρανειακό και ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα παίρνει μία νέα μορφή όπου περιγράφεται η ισορροπία μεταξύ της πραγματικά ασκούμενης δύναμης και της δύναμης αδράνειας.

β. Η χρονική εξίσωση απομάκρυνσης είναι $x = A\eta\mu(\omega t + \pi/2) \xrightarrow{\text{S.I.}}$

$$x = 0,08\eta\mu(5t + \pi/2) \text{ ή } x = 0,08\sigma\upsilon\nu(5t) \text{ (S.I.)}$$

$$\Sigma F_x = -Dx \Rightarrow F_{ελ} - F_A = -Dx \Rightarrow F_{ελ} = m\alpha - Dx \xrightarrow{\text{S.I.}} F_{ελ} = 2 \cdot 2 - 50 \cdot 0,08\sigma\upsilon\nu(5t) \Rightarrow F_{ελ} = 4 - 4\sigma\upsilon\nu(5t) \text{ (S.I.)}$$

γ. Την χρονική στιγμή $t_1 = \frac{3\pi}{5} \text{ s}$ τα σώμα είναι στην θέση $x = 0,08\sigma\upsilon\nu(10t)$ ή

$$x = 0,08\sigma\upsilon\nu\left(5 \cdot \frac{3\pi}{5}\right) \text{ ή } x = -0,08\text{m} \text{ και επειδή η θέση αυτή είναι η ακραία της ταλάντωσης το}$$

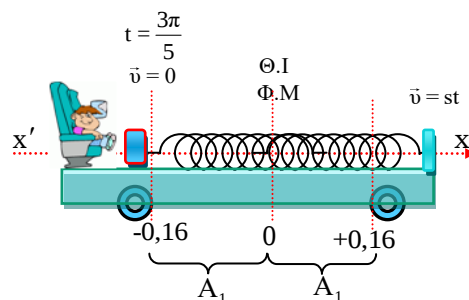
σώμα έχει μηδενική ταχύτητα.

Τώρα όμως το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα, δεν υπάρχει πλέον η δύναμη D'Alembert και η Θ.Ι ταυτίζεται με το Φ.Μ ... $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow$

$$F_{ελ} = 0 \text{ ή } K\Delta\ell = 0 \text{ ή } \Delta\ell = 0.$$

Την $t_1 = \frac{3\pi}{5} \text{ s}$ μόλις αλλάζει η Θ.Ι και

ταυτίζεται με το Φ.Μ το σώμα έχει μηδενική ταχύτητα, και απέχει από αυτή $0,08 + 0,08 = 0,16\text{m}$... άρα εκτελεί άλλη α.α.τ με πλάτος $A_1 = 0,16\text{m}$



δ. Η χρονική εξίσωση απομάκρυνσης είναι $x = A_1\eta\mu[\omega(t - t_1) + 3\pi/2] \xrightarrow{\text{S.I.}}$

$$x = 0,16\eta\mu\left[5\left(t - \frac{3\pi}{5}\right) + \frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow x = 0,16\eta\mu\left[5t - 3\pi + \pi + \frac{\pi}{2}\right] \text{ ή } x = 0,16\sigma\upsilon\nu(5t) \text{ (S.I.)}$$

(προσοχή) για $\frac{3\pi}{5} \leq t \leq 2\pi$. Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας για $\frac{3\pi}{5} \leq t \leq 2\pi$ είναι

$$v = -0,8\eta\mu(5t) \text{ και για } t_2 = \frac{2\pi}{3} \text{ s βρίσκουμε } v = -0,8\eta\mu\left(5 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow v = 0,4\sqrt{3} \text{ m/s}$$

ε. Την χρονική στιγμή $t_3 = 2\pi \text{ s}$ το σώμα είναι στην θέση $x = 0,16\sigma\upsilon\nu(5 \cdot 2\pi)$ ή $x = +0,16\text{m}$.

Εκείνη όμως την στιγμή αρχίζει η επιβράδυνση του αυτοκινήτου η Θ.Ι αλλάζει, είναι **πιο θετικά** με το ελατήριο να έχει συσπείρωση $\Delta\ell_1$ τέτοια ώστε (για τον μη αδρανειακό παρατηρητή) $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow -F_{ελ} + F_A = 0 \Rightarrow F_{ελ} = F_A \Rightarrow K\Delta\ell_1 = ma$ ή

$$\Delta\ell_1 = \frac{ma}{K} \xrightarrow{\text{S.I.}} \Delta\ell_1 = 0,08\text{m}.$$

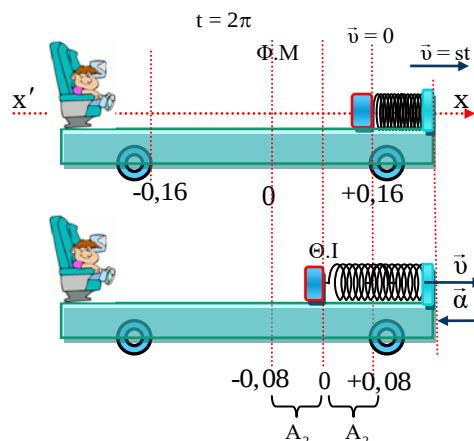
Παρατηρώντας το σχήμα την χρονική στιγμή $t_3 = 2\pi \text{ s}$ που αρχίζει η νέα ταλάντωση αλλάζει η Θ.Ι και απέχει από αυτή απόσταση 0,08. Άρα θα κάνει ταλάντωση με πλάτος $A_2 = 0,08\text{m}$.

στ. Η χρονική εξίσωση απομάκρυνσης είναι

$$x = A_2\eta\mu[\omega(t - t_3) + \pi/2] \xrightarrow{\text{S.I.}}$$

$$x = 0,08\eta\mu[5(t - 2\pi) + \pi/2] \Rightarrow$$

$$x = 0,08\eta\mu[5t - 10\pi + \pi/2] \Rightarrow$$



$x = 0,08\sin(5t)$ (S.I)(προσοχή!) για $t \geq 2\pi$.

Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας για $t \geq 2\pi$ είναι $v = -0,4\eta\mu(5t)$ (S.I).

Ο **κινούμενος παρατηρητής** δίνει ως κινητική ενέργεια $K = \frac{1}{2}mv^2 \xrightarrow{\text{S.I}} \rightarrow$

$$K = \frac{1}{2}2[-0,4\eta\mu(5t)]^2 \Rightarrow K = 0,16\eta\mu^2(5t) \Rightarrow K = 0,16\frac{1-\sin(10t)}{2} \Rightarrow$$

$K = 0,08 - 0,08\sin(10t)$ (S.I) για $t \geq 2\pi$.