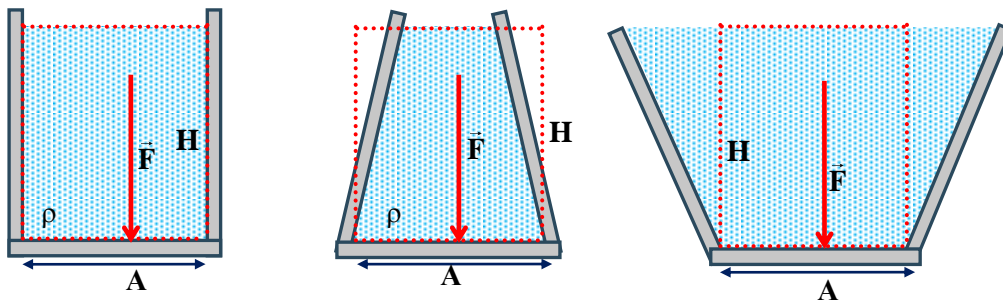


## Το υδροστατικό παράδοξο... ... που δεν είναι παράδοξο!

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται τρία δοχεία με το ίδιο εμβαδόν βάσης  $A$ , αλλά με διαφορετική κλίση των πλευρικών τοιχωμάτων. Τα δοχεία αυτά περιέχουν σε ισορροπία υγρό πυκνότητας  $\rho$  μέχρι το ίδιο ύψος  $H$ . Η πίεση του υγρού σε βάθος  $H$ , στον πυθμένα των τριών δοχείων είναι  $p = \rho g H$ . Η δύναμη  $\vec{F}$  που ασκεί το υγρό στον πυθμένα του δοχείου είναι  $\mathbf{F} = p\mathbf{A} = \rho g H A$ .



Παρατηρούμε ότι η δύναμη αυτή είναι ίδια και στα τρία δοχεία και είναι ανεξάρτητη από το σχήμα του δοχείου.

Ας δούμε η δύναμη αυτή τι σχέση έχει με το βάρος του υγρού που περιέχεται στο δοχείο!

$F = \rho g H A$  ή  $F = \rho g (AH)$  (1) ... η ποσότητα όμως  $AH$  είναι ο όγκος ενός πρίσματος βάσης  $A$  και ύψους  $H$ ,  $V = AH$ . Μια κατακόρυφη τομή του όγκου αυτού στο παραπάνω σχήμα και στα τρία δοχεία αποδίδεται από το ορθογώνιο με την διακεκομμένη κόκκινη γραμμή. Έτσι η σχέση (1) γράφεται  $F = \rho g V$  ή  $F = (V\rho)g$  ή  $\mathbf{F} = \mathbf{m}_{\text{υπ}} \mathbf{g}$  ή  $\mathbf{F} = \mathbf{B}_{\text{υπ}}$  όπου  $\mathbf{B}_{\text{υπ}}$  ένα υποθετικό βάρος του υγρού που καλύπτει τον υποθετικό όγκο του πρίσματος του οποίου η κατακόρυφη τομή είναι το ορθογώνιο με την διακεκομμένη κόκκινη γραμμή.

- ✚ Στο **1<sup>ο</sup> σχήμα** παρατηρούμε ότι η κόκκινη διακεκομμένη ταυτίζεται με τον πραγματικό όγκο του υγρού, άρα  $\mathbf{F} = \mathbf{B}_{\text{υποθετικό}} = \mathbf{B}_{\text{πραγματικό}}$ , δηλαδή το υγρό ασκεί στην βάση του δοχείου δύναμη ίση με το βάρος του  $\mathbf{F} = \mathbf{B}_{\text{υγρού}}$
- ✚ Στο **2<sup>ο</sup> σχήμα** παρατηρούμε ότι η κόκκινη διακεκομμένη είναι μεγαλύτερη από τον πραγματικό όγκο του υγρού, άρα  $\mathbf{F} = \mathbf{B}_{\text{υποθετικό}} > \mathbf{B}_{\text{πραγματικό}}$ , δηλαδή το υγρό ασκεί στην βάση του δοχείου δύναμη μεγαλύτερη από το βάρος του  $\mathbf{F} > \mathbf{B}_{\text{υγρού}}$
- ✚ Στο **3<sup>ο</sup> σχήμα** παρατηρούμε ότι η κόκκινη διακεκομμένη είναι μικρότερη από τον πραγματικό όγκο του υγρού, άρα  $\mathbf{F} = \mathbf{B}_{\text{υποθετικό}} < \mathbf{B}_{\text{πραγματικό}}$ , δηλαδή το υγρό ασκεί στην βάση του δοχείου δύναμη μικρότερη από το βάρος του  $\mathbf{F} < \mathbf{B}_{\text{υγρού}}$

Το φαινόμενο κυρίως του **2<sup>ου</sup> δοχείου** που το υγρό ασκεί στην βάση του **δύναμη μεγαλύτερη από το βάρος του** χαρακτηρίστηκε ως **υδροστατικό παράδοξο**.

**Η δύναμη που ασκεί το υγρό στον πυθμένα ...**  
**... Ας δούμε όμως πόσο παράδοξο είναι ...**

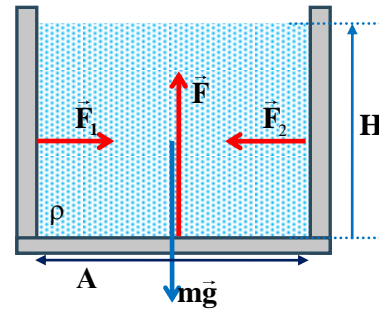
**1ο δοχείο:**

Οι δυνάμεις που δέχεται το υγρό είναι, το βάρος του  $\vec{B}_{\text{υγρού}} = m\vec{g}$ , η δύναμη  $\vec{F}$  από την βάση του δοχείου και οι δυνάμεις  $\vec{F}_1$  και  $\vec{F}_2$  από τα πλευρικά τοιχώματα.

Επειδή η μάζα αυτή του δοχείου ισορροπεί,  $\Sigma \vec{F}_x = 0$  ή  $F_1 - F_2 = 0$  ή  $F_1 = F_2$  και  $\Sigma \vec{F}_y = 0$  ή  $F - mg = 0$  ή  $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$  ή  $\mathbf{F} = \mathbf{B}_{\text{υγρού}}$ .

Άρα η δύναμη που δέχεται το υγρό από τον πυθμένα του δοχείου είναι ίση με το βάρος του υγρού που υπάρχει στο δοχείο. Έτσι σύμφωνα με τον 3ο νόμο Newton το υγρό ασκεί την αντίθετη της  $\vec{F}$  που ισούται με το βάρος του περιεχόμενου υγρού.

(\*) Η ατμοσφαιρική πίεση ως ασκούμενη στη επιφάνεια του υγρού μεταφέρεται σε όλα τα σημεία του υγρού και δεν επηρεάζει την ισορροπία του υγρού.



**2ο δοχείο:**

Οι δυνάμεις που δέχεται το υγρό είναι, το βάρος του  $\vec{B}_{\text{υγρού}} = m\vec{g}$ , η δύναμη  $\vec{F}$  από την βάση του δοχείου και οι δυνάμεις  $\vec{F}_1$  και  $\vec{F}_2$  από τα πλευρικά τοιχώματα που αναλύονται σε δύο συνιστώσες (οριζόντια και κατακόρυφη).

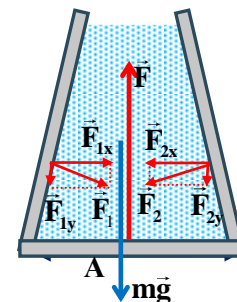
Επειδή η μάζα αυτή του δοχείου ισορροπεί,

$$\Sigma \vec{F}_x = 0 \text{ ή } F_{1x} - F_{2x} = 0 \text{ ή } F_{1x} = F_{2x} \text{ και}$$

$$\Sigma \vec{F}_y = 0 \text{ ή } F - F_{1y} - F_{2y} - mg = 0 \text{ ή } \mathbf{F} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{1y} + \mathbf{F}_{2y} \text{ ή}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{B}_{\text{υγρού}} + \mathbf{F}_{1y} + \mathbf{F}_{2y} \text{ ή } \mathbf{F} > \mathbf{B}_{\text{υγρού}}$$

Άρα η δύναμη που δέχεται το υγρό από τον πυθμένα του δοχείου είναι μεγαλύτερη από το βάρος του υγρού που υπάρχει στο δοχείο. Έτσι σύμφωνα με τον 3ο νόμο Newton το υγρό ασκεί την αντίθετη της  $\vec{F}$  που είναι μεγαλύτερη από το βάρος του περιεχόμενου υγρού.



**2ο δοχείο:**

Οι δυνάμεις που δέχεται το υγρό είναι, το βάρος του  $\vec{B}_{\text{υγρού}} = m\vec{g}$ , η δύναμη  $\vec{F}$  από την βάση του δοχείου και οι δυνάμεις  $\vec{F}_1$  και  $\vec{F}_2$  από τα πλευρικά τοιχώματα που αναλύονται σε δύο συνιστώσες (οριζόντια και κατακόρυφη).

Επειδή η μάζα αυτή του δοχείου ισορροπεί,

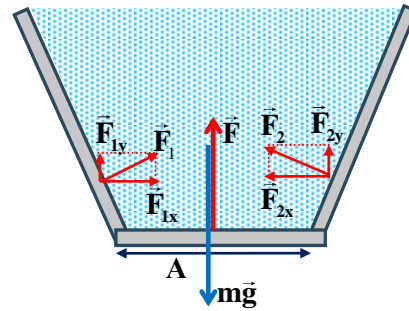


$$\Sigma \vec{F}_x = 0 \text{ ή } F_{1x} - F_{2x} = 0 \text{ ή } F_{1x} = F_{2x} \text{ και}$$

$$\Sigma \vec{F}_y = 0 \text{ ή } F + F_{1y} + F_{2y} - mg = 0 \text{ ή}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{mg} - \mathbf{F}_{1y} - \mathbf{F}_{2y} \text{ ή } \mathbf{F} = \mathbf{B}_{\text{υγρού}} - \mathbf{F}_{1y} - \mathbf{F}_{2y} \text{ ή}$$

$$\mathbf{F} < \mathbf{B}_{\text{υγρού}}$$



Άρα η δύναμη που δέχεται του υγρού από τον πυθμένα του δοχείου είναι μικρότερη από το βάρος του υγρού που υπάρχει στο δοχείο. Έτσι σύμφωνα με τον 3<sup>ο</sup> νόμο Newton το υγρό ασκεί την αντίθετη της  $\vec{F}$  που είναι μικρότερη από το βάρος του περιεχόμενου υγρού.

### Η δύναμη που ασκεί το υγρό σε όλα τα τοιχώματα .

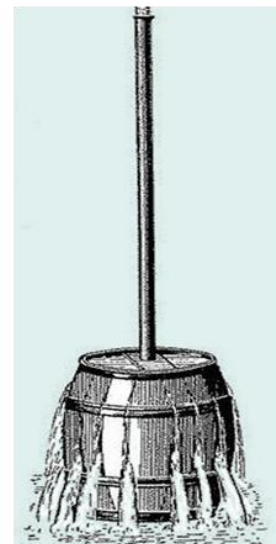
Ας δούμε αυτό για το 3<sup>ο</sup> δοχείο ...

Η συνολική δύναμη που δέχεται το υγρό από όλα τα τοιχώματα του δοχείου [ αφού οι  $\vec{F}_{1x}, \vec{F}_{2x}$  εξουδετερώνονται] είναι η συνισταμένη των  $\vec{F}, \vec{F}_{1y}, \vec{F}_{2y}$  . Από την ισορροπία όμως του υγρού έχουμε  $\Sigma \vec{F}_y = 0$  ή  $F + F_{1y} + F_{2y} - mg = 0$  ή

$\mathbf{F} + \mathbf{F}_{1y} + \mathbf{F}_{2y} = \mathbf{mg}$  ή  $\mathbf{F}_{\text{ολική δοχείου στο υγρό}} = \mathbf{B}_{\text{υγρού}}$  ...επομένως το υγρό ασκεί συνολικά στο δοχείο την αντίθετη της  $\mathbf{F}_{\text{ολική δοχείου στο υγρό}}$  που ισούται με το βάρος του υγρού ανεξάρτητα από το σχήμα του δοχείου.

### Το βαρέλι του Pascal ... και το παράδοξο για την εποχή του.

Ο Blaise Pascal (1623 – 1662) πήρε ένα κλειστό βαρέλι χωρητικότητας 1000L γεμάτο με νερό και στην πάνω επιφάνεια άνοιξε μια μικρή τρύπα. Στην τρύπα αυτή προσάρμοσε ένα λεπτό κατακόρυφο σωλήνα με μήκος αρκετών μέτρων και προσθέτοντας νερό στο σωλήνα – όπως στο σχήμα- παρατήρησε ότι τα τοιχώματα του βαρελιού άνοιξαν και το νερό χύνονταν. Αυτό για την εποχή του χαρακτηρίστηκε ως υδροστατικό παράδοξο.



3

Για μια απλή εξήγηση είναι να υπολογίσουμε πόσο αυξάνεται η δύναμη που δέχεται από το νερό μια στοιχειώδη επιφάνεια εμβαδού A στο πλευρικό τοίχωμα του

βαρελιού που απέχει ύψος  $h$  από την πάνω επιφάνεια του βαρελιού, αφού ο Pascal έβαλε τον κατακόρυφο σωλήνα ύψους  $H$ .

$$\frac{F_{\text{μετά}}}{F_{\text{πριν}}} = \frac{\rho g (h + H)}{\rho g h} = \frac{h + H}{h} . \text{ Αν υποθέσουμε ότι } g = h = 0,4\text{m και } H = 9,6\text{m έχουμε}$$

$$\frac{F_{\text{μετά}}}{F_{\text{πριν}}} = 25 \text{ ή } F_{\text{μετά}} = 25F_{\text{πριν}} \dots \text{δηλαδή η δύναμη που ασκεί το νερό στη στοιχειώδη}$$

$$\text{επιφάνεια αυξήθηκε κατά } \pi\% = \frac{\Delta F}{F_{\text{πριν}}} 100\% \text{ ή } \pi\% = \frac{F_{\text{μετά}} - F_{\text{πριν}}}{F_{\text{πριν}}} 100\% \text{ ή}$$

$$\pi\% = \frac{24F_{\text{πριν}}}{F_{\text{πριν}}} 100\% \text{ ή } \pi\% = 2400\%$$

