Ταλάντωση σωμάτων σε επαφή (2ο μέρος)

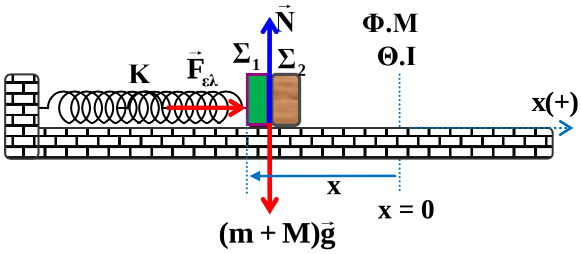
Δ. Ταλάντωση οριζόντιου συστήματος σωμάτων σε επαφή .

Ένα ελατήριο σταθεράς K είναι πάνω σε οριζόντιο λείο δάπεδο στερεωμένο στο ένα άκρο, ενώ στο άλλο είναι δεμένο σώμα Σ_1 μάζας M και σε επαφή με αυτό άλλο σώμα Σ_2 μάζας m . Απομακρύνουμε το σύστημα από την θέση ισορροπίας του ώστε το ελατήριο να συσπειρώνεται και το αφήνουμε ελεύθερο οπότε αρχίζει η ταλάντωση.

Μελέτη

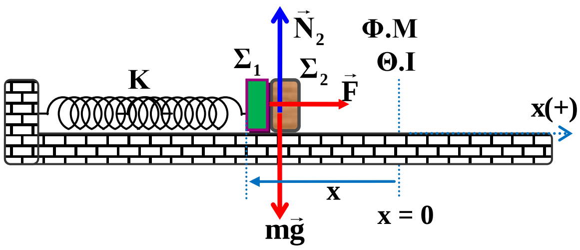
Εδώ ταλάντωση εκτελεί τόσο το σύστημα των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 ως ενιαίος ταλαντωτής, εφόσον το Σ_2 παραμένει σε επαφή με το Σ_1, αλλά και κάθε σώμα ξεχωριστά ως μέρος του ενιαίου συστήματος.

B.1 Ταλάντωση συστήματος δίσκου – σώματος.



Η δύναμη που παίζει τον ρόλο της δύναμης επαναφοράς για τον ενιαίο ταλαντωτή είναι μόνο η δύναμη του ελατηρίου $\vec{F}_{ελ}$ και το κέντρο της ταλάντωσης (θέση ισορροπίας) είναι το άκρο του ελατηρίου όταν αυτό έχει το φυσικό του μήκος. Η σταθερά επαναφοράς D για τον ενιαίο ταλαντωτή είναι $D=K$ (αποδείξτε το) … και $\Sigma\vec{F}=-D\vec{x}$ ή $\vec{F}_{ελ}=-K\vec{x}$ ή $F_{ελ}=-Kx$ (η $F_{ελ}$ με την αλγεβρική τιμής της) … Η κυκλική συχνότητα του ενιαίου ταλαντωτή ω προσδιορίζεται από την σχέση $D=(m+M)\omega^2$ ή $\omega=\sqrt{\dfrac{D}{m+M}} \xrightarrow{D=K} \omega=\sqrt{\dfrac{K}{m+M}}$ (1)

B.2 Ταλάντωση του σώματος Σ2 ως μέλους του συστήματος.



Το σώμα Σ_2 ως μέλος του συστήματος εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με την **ίδια κυκλική συχνότητα** $\omega=\sqrt{\dfrac{K}{m+M}}$ του ενιαίου συνόλου. Η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης του σώματος Σ_2 είναι $D_2=m\omega^2$ $\xrightarrow{(1)} D_2=K\dfrac{m}{m+M}$ (2) .

Η μόνη δύναμη που ασκείται στο σώμα Σ_2 και είναι στον άξονα ταλάντωσης $x'x$ είναι η δύναμη επαφής $\vec{F}$ που ασκεί το σώμα Σ_1 στο Σ_2. Επειδή το σώμα Σ_2 ως μέλος του ενιαίου ταλαντωτή είναι ταλαντωτής, η ανωτέρω δύναμη $\vec{F}$ πρέπει να παίζει το ρόλο της δύναμης επαναφοράς …άρα πρέπει να έχει κατεύθυνση προς το κέντρο της ταλάντωσης και να πληροί την σχέση $\Sigma\vec{F}_x = -D_2\vec{x}$ ή $\vec{F} = -D_2\vec{x}$ ή $F = -D_2 x \xrightarrow{(2)} F = -K\dfrac{m}{m+M}x$ (3) [F η αλγεβρική τιμή της δύναμης επαφής $\vec{F}$.]

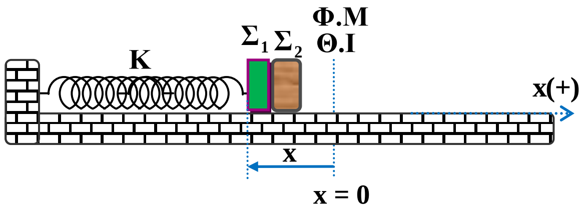
Αυτή η δύναμη $\vec{F}$ όμως **ως δύναμη επαφής** από το Σ_1 στο Σ_2 είναι πάντοτε απωστική και για το σύστημα συντεταγμένων του σχήματος έχει πάντοτε θετική κατεύθυνση και συνεπώς αλγεβρική τιμή $F > 0$ (4).

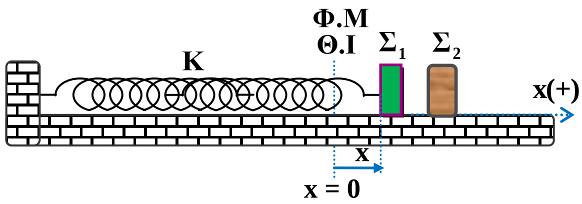
Προσοχή τώρα ως δύναμη επαφής ισχύει πάντοτε η (4) και για να υπάρχει πρέπει να υπάρχει επαφή … και για να είναι η δύναμη επαναφοράς πρέπει να ισχύει η (3) … $F = -K\dfrac{m}{m+M}x$

$$\xrightarrow{(4)} F = -K\frac{m}{m+M}x > 0 \Rightarrow \mathbf{x < 0} \ \ldots$$

… δηλαδή η $\vec{F}$ κατευθύνεται προς το κέντρο της ταλάντωσης (μπορεί να είναι δύναμη επαναφοράς για τον ταλαντωτή Σ_2) και ταυτόχρονα έχει θετική κατεύθυνση (μπορεί να υπάρχει ως δύναμη επαφής από το Σ_1 στο Σ_2) μόνο για $x < 0$!!

Σχόλιο:





- Όταν η ταλάντωση είναι στο αρνητικό τμήμα του άξονα x′x τα σώματα Σ_1, Σ_2 είναι σε επαφή και ταλαντωτής είναι τόσο το ενιαίο σύστημα , όσο και κάθε ένα σώμα ως μέρος του συνόλου.
- Καθώς ο ανωτέρω ταλαντωτής είναι σε $x < 0$ και κινείται προς τα θετικά στην θέση $x = 0$ χάνεται η επαφή του Σ_2 με το υπόλοιπο σύστημα.
- Για θέσεις $x > 0$ ταλαντωτής είναι μόνο το Σ_1 με σταθερά επαναφοράς το K , δύναμη επαναφοράς την $\vec{F}_{\varepsilon\lambda} = -K\vec{x}$ και κυκλική συχνότητα $\omega' = \sqrt{\dfrac{K}{M}}$

Δ.1 Εφαρμογή: Η δράση της κόλλας και η απώλεια επαφής.

Ένα ελατήριο σταθεράς $K = 100N/m$ είναι πάνω σε οριζόντιο λείο δάπεδο στερεωμένο στο ένα άκρο, ενώ στο άλλο είναι δεμένο σώμα Σ_1 μάζας $M = 1Kg$ και σε επαφή με αυτό άλλο σώμα Σ_2 μάζας $m = 3Kg$. Απομακρύνουμε το σύστημα από την θέση ισορροπίας του ώστε το ελατήριο να συσπειρώνεται κατά $\Delta\ell_0$=0,4m και τη χρονικής στιγμή $t = 0$ το αφήνουμε ελεύθερο οπότε αρχίζει η ταλάντωση. Να βρείτε:

α. τη χρονική στιγμή που το σώμα Σ_2 χάνει την επαφή του με το υπόλοιπο σύστημα,

β. την δύναμη επαφής που δέχεται το Σ_2 από το Σ_1 όταν το ελατήριο είναι συσπειρωμένο κατά $\Delta\ell_1$=0,2m,

γ. το πλάτος ταλάντωσης του Σ_1 μετά την απώλεια επαφής ,

δ. την απόσταση των σωμάτων τη χρονική στιγμή $t = \dfrac{7\pi}{60}s$.

Αν μεταξύ των δύο σωμάτων υπήρχε ειδική κόλλα που μπορεί να ασκεί μεταξύ των σωμάτων ελκτικές δυνάμεις μέχρι και 22,5N, να υπολογίσετε:

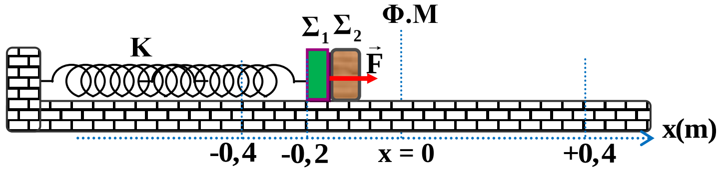
ε. σε ποια θέση το σώμα Σ_2 χάνει την επαφή του με το υπόλοιπο σύστημα,

στ. το πλάτος της ταλάντωσης του Σ_1 μετά την απώλεια επαφής ,

ζ. την μέγιστη αντοχή της κόλλας για μην χαθεί η επαφή του Σ_2 με το υπόλοιπο σύστημα στην ανωτέρω ταλάντωση.

Απάντηση:

α. Το πλάτος ταλάντωσης του συστήματος είναι $A_0 = 0,4\text{m}$, η σταθερά επαναφοράς D για τον ενιαίο ταλαντωτή είναι $D = K$, η κυκλική συχνότητα του ενιαίου ταλαντωτή



$\omega = \sqrt{\dfrac{K}{m+M}}$ ή $\omega = \sqrt{\dfrac{100\text{N/m}}{4\text{Kg}}}$ ή $\omega = 5\,\text{rad/s}$ και η περίοδος $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ ή $T = \dfrac{2\pi}{5}\text{s}$.

Το σύστημα όμως κάνει ταλάντωση ως ενιαίος ταλαντωτής μόνο για το τμήμα $-0,4\text{m} \le x \le 0\text{m}$ [βλέπε Β.2] και για χρόνο $t_1 = \dfrac{T}{4}$ ή $\mathbf{t_1 = \dfrac{2\pi}{20}s}$

β. Στο τμήμα $-0,4\text{m} \le x \le 0\text{m}$ και κάθε ένα από τα σώματα Σ_1 και Σ_2 είναι ταλαντωτής ως μέλη του ενιαίου ταλαντωτή με $\omega = 5\,\text{rad/s}$. Η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης του σώματος Σ_2 είναι $D_2 = m\omega^2$ ή $D_2 = 75\text{N/m}$ και η δύναμη επαναφοράς είναι η δύναμη επαφής $F = -D_2 x$ ή $F = -75x\,(\text{S.I})$ $\xrightarrow{x=-0,2\text{m}}$ **$F = +15N$**

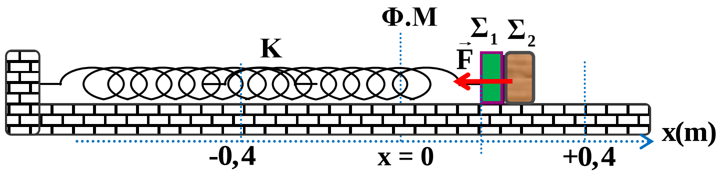
γ. Στη θέση x=0 το σύστημα οριακά είναι ακόμη ενιαίος ταλαντωτής και έχει τη μέγιστη ταχύτητα $\upsilon = \omega A$ ή $\upsilon = 2\text{m/s}$ …ταχύτητα που έχει και κάθε σώμα τη στιγμή που χάνεται η επαφή. Μετά την $t_1 = \dfrac{2\pi}{20}\text{s}$ και x=0 που χάνεται η επαφή ταλαντωτής είναι μόνο το σώμα Σ_1 με σταθερά επαναφοράς $D' = K$ (…προσοχή!!!) και κυκλική συχνότητα $\omega' = \sqrt{\dfrac{K}{M}}$ ή $\omega' = \sqrt{\dfrac{100\text{N/m}}{1\text{Kg}}}$ ή $\omega' = 10\text{rad/s}$. Ο νέος αυτός ταλαντωτής μόλις αρχίζει την νέα αυτή ταλάντωση είναι στην Θ.Ι x=0 και η ταχύτητά του $\upsilon = 2\text{m/s}$ είναι η μέγιστη και για την νέα ταλάντωση… οπότε $\upsilon = \upsilon_{max} = \omega A_1 \xrightarrow{\text{S.I}} 2 = 10A_1$ ή $\mathbf{A_1 = 0,2m}$.

δ. Η χρονική εξίσωση ταλάντωσης του ταλαντωτή Σ_1 [**για το ίδιο σύστημα αναφοράς και ίδια αρχή χρόνων**] είναι $x(t) = A_1\eta\mu[\omega'(t - t_1) + \varphi_0] \xrightarrow{\text{S.I}} x(t) = 0,2\eta\mu\left(10\left(t - \dfrac{2\pi}{20}\right) + 0\right)$ ή $x(t) = 0,2\eta\mu(10t - \pi)$ για $t \ge t_1 = \dfrac{2\pi}{20}\text{s}$. Τη χρονική στιγμή $t = \dfrac{7\pi}{60}\text{s}$ το κινητό Σ_1 είναι σε απομάκρυνση $x_1 = 0,2\eta\mu\left(10\dfrac{7\pi}{60} - \pi\right)$ ή $x_1 = +0,1\text{m}$. Την ίδια στιγμή το κινητό Σ_2 έχει μετατοπισθεί από την θέση x=0 που χάθηκε η επαφή κατά $\Delta x = \upsilon(t - t_1) \xrightarrow{\text{S.I}}$

$$\Delta x = 2\left(\frac{7\pi}{60} - \frac{2\pi}{20}\right) \text{ ή } \Delta x = 2\frac{\pi}{60}\text{m ή } \Delta x = 0{,}1046\text{m}$$ και είναι σε συντεταγμένη $x_2 = 0{,}1046\text{m}$

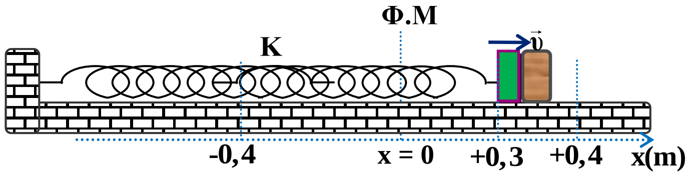
και απέχει από το Σ_1 απόσταση $\Delta x' = 0{,}1046\text{m} - 0{,}1\text{m}$ ή $\mathbf{\Delta x' = 0{,}0046m}$

ε. Μετά τη θέση x=0 για να παραμένει ενιαίος ο ταλαντωτής και συνεπώς να είναι ταλαντωτής και το Σ_2 (ως τμήμα του συνόλου) πρέπει να δρα η κόλλα ώστε να έλκεται το Σ_2 από το Σ_1 με



δύναμη $\vec{F}$ και η οποία να μπορεί να παίξει τον ρόλο της δύναμης επαναφοράς.
Για το ταλαντωτή τώρα Σ_2 ισχύει ότι ίσχυε και στην περιοχή $-0{,}4\text{m} \le x \le 0\text{m}$ με τη διαφορά την απαιτούμενη ελκτική δύναμη [δύναμη επαναφοράς] τη βγάζει η κόλα και ισχύει $F = -D_2 x$. Η δύναμη όμως της κόλλας δεν μπορεί να ξεπεράσει τα 22,5N, οπότε $0 \le |F| = |-D_2 x| \le 22{,}5$ ή $0 \le 75|x| \le 22{,}5$ ή $0 \le |x| \le 0{,}3\text{m}$ … δηλαδή η επαφή θα χαθεί στη θέση $x = +0{,}3\text{m}$. Από εκεί και μετά παραμένει ως ταλαντωτής μόνο το Σ_1.

στ. Λίγο πριν χαθεί η επαφή στην ανωτέρω περίπτωση του συστήματος , άρα και κάθε σώματος είναι $\upsilon = \omega\sqrt{A_0^2 - x^2}$ ή $\upsilon = 5\sqrt{0{,}4^2 - 0{,}3^2}$ ή $\upsilon = \sqrt{1{,}75}\text{m/s}$.
Μετά την απώλεια επαφής το σώμα Σ_1 εκτελεί ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D' = K$ (…προσοχή!!!)



και κυκλική συχνότητα $\omega' = \sqrt{\frac{K}{M}}$ ή $\omega' = \sqrt{\frac{100\text{N/m}}{1\text{Kg}}}$ ή $\omega' = 10\text{rad/s}$ ….και πλάτος που

βρίσκεται από την διατήρηση της ενέργειας … $\frac{1}{2}M\upsilon^2 + \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}KA_2^2$ ή $A_2 = \sqrt{x^2 + \frac{M\upsilon^2}{K}}$

$$\xrightarrow{\text{S.I}} A_2 = \sqrt{0{,}3^2 + \frac{1.1{,}75}{100}} \text{ ή } \mathbf{A_2 = 0{,}328m}$$

ζ. Για να μην χαθεί η ανωτέρω επαφή έπρεπε η κόλλα να αντέχει και βγάζει την απαραίτητη δύναμη επαναφοράς στο Σ_2 μέχρι και $x = +A_0 = +0{,}4\text{m}$ … $F = -D_2 x$ ή $F = -75x$ (S.I)

$$\xrightarrow{x=+0{,}4\text{m}} \mathbf{F = -30N}$$

Άρα η κόλα πρέπει να αντέχει δυνάμεις μέτρου μέχρι και **F = 30N** .

Βασίλης Τσούνης www.btsounis.gr mail@btsounis.gr