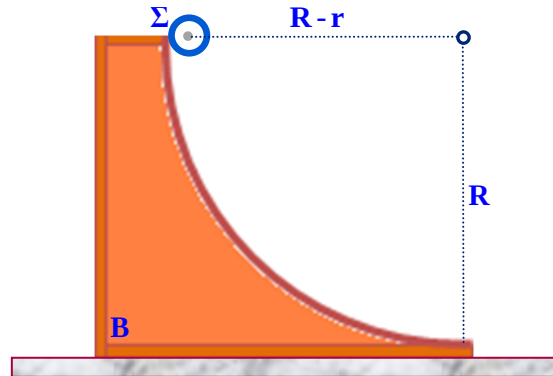


Κύλιση σφαίρας σε μετακινούμενη βάση.

Στο σχήμα φαίνεται η κατακόρυφη τομή μιας βάσης B μάζας M με την μια πλευρά της να είναι τεταρτοκύκλιο ακτίνας R. Η βάση είναι ελεύθερη για μετακίνηση πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Από την κορυφή του τεταρτοκυκλίου αφήνουμε μια μικρή κοίλη σφαίρα Σ αμελητέου πάχους (σφαιρικό φλοιό) ακτίνας $r \ll R$ και

μάζας $m = \frac{M}{14}$ που κυλίνεται χωρίς

ολίσθηση. Μόλις η σφαίρα φθάνει στη κατώτερη θέση του τεταρτοκυκλίου, να υπολογίσετε:



α. τις ταχύτητες που έχουν εκείνη την στιγμή το cm της σφαίρας Σ και η βάση B ως προς ακίνητο παρατηρητή,

β. την μετατόπιση της βάσης B,

γ. την οριζόντια μετατόπιση της σφαίρας Σ.

Όταν η σφαίρα είναι σε μια ενδιάμεση θέση, που επιβατική ακτίνα του cm της σφαίρας έχει διαγράψει γωνία $\varphi = 30^\circ$, έχει ταχύτητα μεταφοράς v'_{cm} και η βάση ταχύτητα v' . Να βρείτε την σχέση που συνδέει,

δ. τις δύο αυτές ταχύτητες,

ε. την γωνιακή ταχύτητα αυτοπεριστροφής ω' με την v'_{cm} , θεωρώντας γνωστή την ακτίνα r.

Δίνονται η ροπή αδράνειας της κοίλης σφαίρας $I = \frac{2}{3}mr^2$, $R-r=0,405m$ και $g=10m/s^2$.

... η απάντηση ...

Απάντηση

α. Το σύστημα σφαίρας Σ και βάσης B είναι μονωμένο στον οριζόντιο άξονα $x'x$ και ελεύθερο για μετακίνηση, οπότε (στον άξονα αυτόν) έχουμε διατήρηση ορμής για τις μεταφορικές κινήσεις. Για να υπάρχει η διατήρηση της ορμής πρέπει η βάση να μετακινείται προς τα πίσω, προς τα αρνητικά του άξονα $x'x$. Από τη διατήρηση της ορμής συστήματος στην αρχική και τελική θέση έχουμε..

$$\vec{P}_{ολ,x} = \text{σταθερή} \quad \text{ή} \quad m v_{cm} - M v = 0 \quad \text{ή}$$

$$v_{cm} = \frac{M}{m} v \quad (1).$$

Αφού έχουμε κύλιση χωρίς ολίσθηση πρέπει η ταχύτητα της σφαίρας στο σημείο επαφής με την βάση και η βάση να έχουν την ίδια ταχύτητα (στον άξονα μεταφορικής κίνησης της σφαίρας). Έτσι όταν η σφαίρα βρίσκεται στο κατώτερο σημείο επειδή $v < 0$ πρέπει να είναι και $v_{cm} - \omega r < 0$ ή $\omega r > v_{cm}$ (μέτρα), άρα

$$v = \omega r - v_{cm} \quad \text{ή} \quad \omega = \frac{v_{cm} + v}{r} \quad (2).$$

Το σύστημα ενεργειακά είναι μονωμένο οπότε για την αρχική και τελική θέση της σφαίρας από την διατήρηση της μηχανικής

$$\text{ενέργειας του συστήματος έχουμε} \quad U_{\text{βάσης}} + mg(R-r) = U_{\text{βάσης}} + \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$\xrightarrow{(2)} mg(R-r) = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} \frac{2}{3} m r^2 \left(\frac{v_{cm} + v}{r} \right)^2 \xrightarrow{(1)}$$

$$mg(R-r) = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{M}{m} v \right)^2 + \frac{1}{3} m \left(\frac{M}{m} v + v \right)^2 \quad \dots \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{6g(R-r)}{5\left(\frac{M}{m}\right)^2 + 7\frac{M}{m} + 2}} \quad (S.1) \rightarrow$$

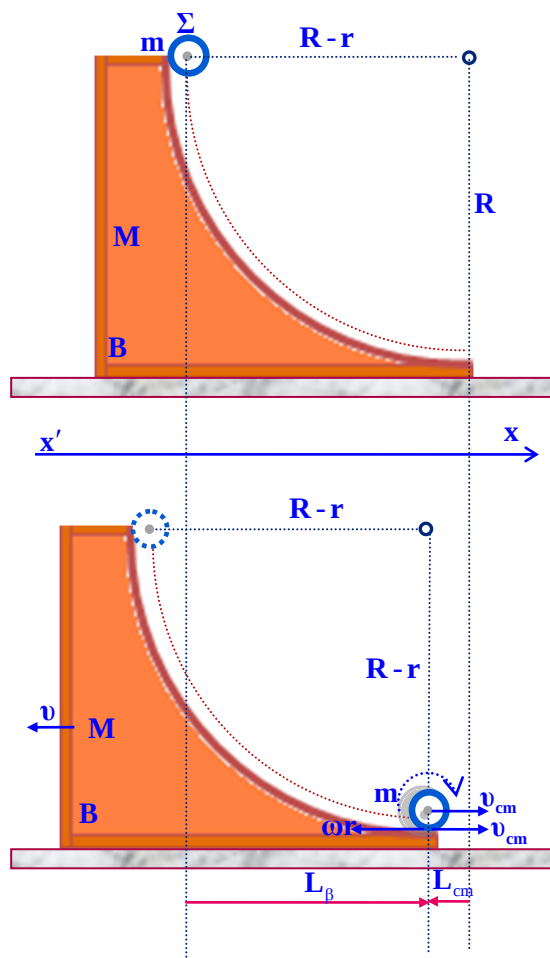
$$v = 0,15 \frac{m}{s} \quad \text{και η ταχύτητα μεταφοράς της σφαίρας είναι} \quad v_{cm} = \frac{M}{m} v \xrightarrow{(S.1)} v_{cm} = 2,1 \frac{m}{s}$$

β. Για κάθε θέση της σφαίρας η ορμή του συστήματος για τις μεταφορικές κινήσεις στον

$$\acute{\alpha}\xi\omega\nu\alpha \quad x'x \quad \acute{\epsilon}\iota\nu\alpha\iota \quad \text{σταθερή} \quad \vec{P}_{ολ,x} = \text{σταθερή} \quad \text{ή} \quad m v_{cm,x} - M v = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{v_{cm,x}}{v} = \frac{M}{m} \quad \text{ή}$$

$$\frac{dx_{cm}/dt}{dx_{\text{βάσης}}/dt} = \frac{M}{m} \quad \text{ή} \quad \frac{dx_{cm}}{dx_{\beta}} = \frac{14}{1} = \text{σταθερό}, \quad \acute{\alpha}\rho\alpha (*) \quad \text{και} \quad \frac{L_{cm}}{L_{\beta}} = \frac{14}{1} \quad \text{ή} \quad L_{cm} = 14 L_{\beta} \quad (3).$$

Από το σχήμα $L_{cm} + L_{\beta} = R - r$ ή $L_{cm} + L_{\beta} = 0,405m$ (4). Από το σύστημα των (3) και (4) έχουμε $L_{cm} = 37,8cm$ και $L_{\beta} = 2,7cm$.



(*) **Σχόλιο:** Για κάθε στοιχειώδες χρονικό διάστημα dt ισχύει $\frac{dx_{cm}}{dx_\beta} = \frac{14}{1} = \text{σταθερό}$, οπότε

$$\frac{dx_{(1)cm}}{dx_{(1)\beta}} = \frac{dx_{(2)cm}}{dx_{(2)\beta}} = \frac{dx_{(3)cm}}{dx_{(3)\beta}} = \dots = \frac{dx_{(v)cm}}{dx_{(v)\beta}} = \frac{14}{1} \Rightarrow \frac{dx_{(1)cm} + dx_{(2)cm} + dx_{(3)cm} + \dots + dx_{(v)cm}}{dx_{(1)\beta} + dx_{(2)\beta} + dx_{(3)\beta} + \dots + dx_{(v)\beta}} = \frac{14}{1} \quad \text{ή}$$

$$\frac{L_{cm}}{L_\beta} = \frac{14}{1}$$

γ. Για το σύστημα στον οριζόντιο άξονα $x'x$ έχουμε διατήρηση ορμής για τις μεταφορικές κινήσεις. Από τη διατήρηση της ορμής συστήματος στην αρχική και στην ενδιάμεση θέση έχουμε $\dots \vec{P}_{ολ,x} = \text{σταθερή}$ ή

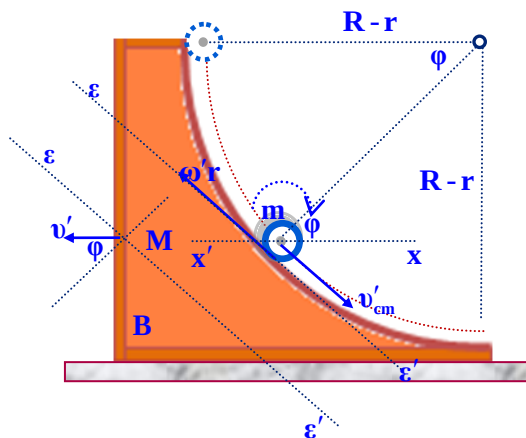
$$mv'_{cm} \eta \mu \phi - Mv' = 0 \Rightarrow v'_{cm} = \frac{M}{m} \frac{1}{\eta \mu \phi} v'$$

$$\xrightarrow{(S.1)} v'_{cm} = 28v'$$

Αφού έχουμε κύλιση χωρίς ολίσθηση πρέπει η ταχύτητα της σφαίρας στο σημείο επαφής με την βάση και η βάση να έχουν την ίδια

ταχύτητα στον άξονα μεταφορικής κίνησης της σφαίρας $\epsilon'\epsilon$. Έτσι όταν η σφαίρα βρίσκεται στο ενδιάμεσο σημείο πρέπει $v'_\epsilon = \omega'r - v'_{cm} \Rightarrow v' \eta \mu \phi = \omega'r - v'_{cm} \Rightarrow v'_{0,5} = \omega'r - 28v' \Rightarrow$

$$28,5v' = \omega'r \Rightarrow 28,5 \frac{v'_{cm}}{28} = \omega'r \Rightarrow v'_{cm} = \frac{280}{285} \omega'r \Rightarrow v'_{cm} = \frac{56}{57} \omega'r$$



Η άσκηση είναι το αποτέλεσμα σκέψης και πρότασης από τον φίλο και εξάιρετο συνάδελφο κ. Γεώργιο Κοϊνάκη [[George Koinakis](#)] ... καλοκαιρινοί προβληματισμοί για την εκπαίδευση, την Φυσική και κυρίως την διδακτική αυτής για μεγαλύτερη αποδοχή και κατανόηση από τους μαθητές!