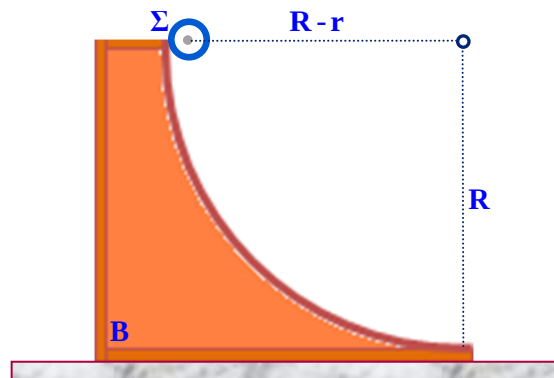


Κύλιση σφαίρας σε μετακινούμενη βάση.

Στο σχήμα φαίνεται η κατακόρυφη τομή μιας βάσης B μάζας M με την μια πλευρά της να είναι τεταρτοκύκλιο ακτίνας R. Η βάση είναι ελεύθερη για μετακίνηση πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Από την κορυφή του τεταρτοκυκλίου αφήνουμε μια μικρή κοίλη σφαίρα Σ αμελητέου πάχους (σφαιρικό φλοιό) ακτίνας $r \ll R$

και μάζας $m = \frac{M}{14}$ που κυλίνεται χωρίς ολίσθηση. Μόλις η σφαίρα φθάνει στη κατώτερη θέση του τεταρτοκυκλίου, να υπολογίσετε:



α. τις ταχύτητες που έχουν εκείνη την στιγμή το cm της σφαίρας Σ και η βάση B ως προς ακίνητο παρατηρητή,

β. την μετατόπιση της βάσης B και την οριζόντια μετατόπιση της σφαίρας Σ.

Όταν η σφαίρα είναι σε μια ενδιάμεση θέση, που επιβατική ακτίνα της σχετικής κίνησης του cm της σφαίρας έχει διαγράψει γωνία $\varphi = 30^\circ$, η βάση έχει ταχύτητα u . Να βρείτε την σχέση που συνδέει ,

γ. την σχετική ταχύτητα $u_{\sigma\chi}$ του cm της σφαίρας (ως προς την βάση) με την ταχύτητα u της βάσης

δ. την απόλυτη ταχύτητα u_{cm} του cm (ως προς ακίνητο παρατηρητή) με την ταχύτητα u της βάσης

ε. την γωνιακή ταχύτητα αυτοπεριστροφής ω με την ταχύτητα u της βάσης θεωρώντας γνωστή την ακτίνα r .

Δίνονται η ροπή αδράνειας της κοίλης σφαίρας $I = \frac{2}{3}mr^2$, $R-r=0,405m$ και $g=10m/s^2$.

... η απάντηση ...

Απάντηση

α. Το σύστημα σφαίρας Σ και βάσης B είναι μονωμένο στον οριζόντιο άξονα $x'x$ και ελεύθερο για μετακίνηση, οπότε (στον άξονα αυτόν) έχουμε διατήρηση ορμής για τις μεταφορικές κινήσεις. Για να υπάρχει η διατήρηση της ορμής πρέπει η βάση να μετακινείται προς τα πίσω, προς τα αρνητικά του άξονα $x'x$. Από τη διατήρηση της ορμής συστήματος στην αρχική και τελική θέση έχουμε..

$$\vec{P}_{ολ,x} = \text{σταθερή} \quad \text{ή} \quad m v_{cm} - M v = 0 \quad \text{ή} \quad v_{cm} = \frac{M}{m} v \quad (1).$$

Αφού έχουμε κύλιση χωρίς ολίσθηση πρέπει η ταχύτητα της σφαίρας στο σημείο επαφής με την βάση και η βάση να έχουν την ίδια ταχύτητα (στον άξονα μεταφορικής κίνησης της σφαίρας). Έτσι όταν η σφαίρα βρίσκεται στο κατώτερο σημείο επειδή $v < 0$ πρέπει να είναι και $v_{cm} - \omega r < 0$ ή $\omega r > v_{cm}$ (μέτρα), άρα

$$v = \omega r - v_{cm} \quad \text{ή} \quad \omega = \frac{v_{cm} + v}{r} \quad (2).$$

Το σύστημα ενεργειακά είναι μονωμένο οπότε για την αρχική και τελική θέση της σφαίρας από την διατήρηση της μηχανικής

$$\text{ενέργειας του συστήματος έχουμε} \quad U_{\text{βάσης}} + mg(R-r) = U_{\text{βάσης}} + \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$\xrightarrow{(2)} mg(R-r) = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} \frac{2}{3} m r^2 \left(\frac{v_{cm} + v}{r} \right)^2 \xrightarrow{(1)}$$

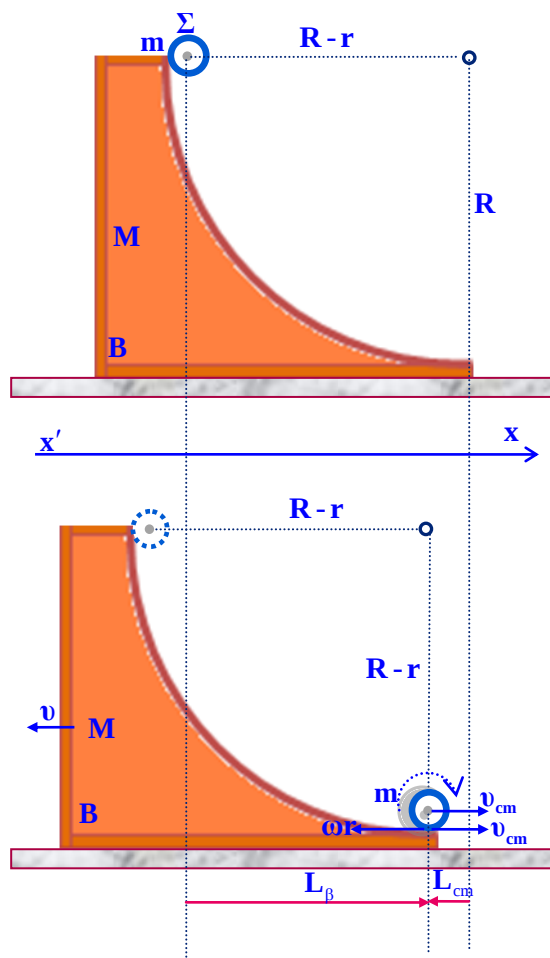
$$mg(R-r) = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{M}{m} v \right)^2 + \frac{1}{3} m \left(\frac{M}{m} v + v \right)^2 \quad \dots \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{6g(R-r)}{5\left(\frac{M}{m}\right)^2 + 7\frac{M}{m} + 2}} \quad (S.1) \rightarrow$$

$$v = 0,15 \frac{m}{s} \quad \text{και η ταχύτητα μεταφοράς της σφαίρας είναι} \quad v_{cm} = \frac{M}{m} v \xrightarrow{(S.1)} v_{cm} = 2,1 \frac{m}{s}$$

β. Για κάθε θέση της σφαίρας η ορμή του συστήματος για τις μεταφορικές κινήσεις στον άξονα $x'x$ είναι σταθερή $\vec{P}_{ολ,x} = \text{σταθερή}$ ή $m v_{cm,x} - M v = 0$ ή $\frac{v_{cm,x}}{v} = \frac{M}{m}$ ή

$$\frac{dx_{cm}/dt}{dx_{\text{βάσης}}/dt} = \frac{M}{m} \quad \text{ή} \quad \frac{dx_{cm}}{dx_{\beta}} = \frac{14}{1} = \text{σταθερό}, \quad \text{άρα (*) και} \quad \frac{L_{cm}}{L_{\beta}} = \frac{14}{1} \quad \text{ή} \quad L_{cm} = 14 L_{\beta} \quad (3).$$

Από το σχήμα $L_{cm} + L_{\beta} = R - r$ ή $L_{cm} + L_{\beta} = 0,405m$ (4). Από το σύστημα των (3) και (4) έχουμε $L_{cm} = 37,8cm$ και $L_{\beta} = 2,7cm$.



(*) **Σχόλιο:** Για κάθε στοιχειώδες χρονικό διάστημα dt ισχύει $\frac{dx_{cm}}{dx_\beta} = \frac{14}{1} = \text{σταθερό}$, οπότε

$$\frac{dx_{(1)cm}}{dx_{(1)\beta}} = \frac{dx_{(2)cm}}{dx_{(2)\beta}} = \frac{dx_{(3)cm}}{dx_{(3)\beta}} = \dots = \frac{dx_{(v)cm}}{dx_{(v)\beta}} = \frac{14}{1} \Rightarrow \frac{dx_{(1)cm} + dx_{(2)cm} + dx_{(3)cm} + \dots + dx_{(v)cm}}{dx_{(1)\beta} + dx_{(2)\beta} + dx_{(3)\beta} + \dots + dx_{(v)\beta}} = \frac{14}{1} \quad \text{ή}$$

$$\frac{L_{cm}}{L_\beta} = \frac{14}{1}$$

γ. Η κίνηση ως προς ακίνητο παρατηρητή (απόλυτη κίνηση) που διαγράφει το κέντρο μάζας (cm) της σφαίρας είναι σύνθετη και αποτέλεσμα

- της σχετικής κίνησης ως προς της βάση που είναι η διαγραφή του κυκλικού τμήματος της βάσης, και
- της ευθύγραμμης μετοχικής κίνησης της βάσης.

Το cm σφαίρα έχει,

- σχετική ταχύτητα ως προς την βάση $\vec{v}_{σχ}$, εφαπτομενική της σχετικής κυκλικής κίνησης,
- μετοχική ταχύτητα, αυτή της βάσης $\vec{v}$.

Η απόλυτη ταχύτητα του cm της σφαίρας $\vec{v}_{cm}$ ως προς ακίνητο παρατηρητή είναι $\vec{v}_{cm} = \vec{v}_{σχ} + \vec{v}_{μετ}$ ή $\vec{v}_{cm} = \vec{v}_{σχ} + \vec{v}$ ή

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_{cm,x} = \vec{v}_{σχ,x} + \vec{v}_x \\ \vec{v}_{cm,y} = \vec{v}_{σχ,y} + \vec{v}_y \end{array} \right\} \text{ και αλγεβρικά}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{cm,x} = v_{σχ,x} - v \\ v_{cm,y} = v_{σχ,y} + 0 \end{array} \right\} \quad \text{ή} \quad \left\{ \begin{array}{l} v_{cm,x} = v_{σχ} \eta \mu \phi - v \quad (1) \\ v_{cm,y} = v_{σχ} \sigma \upsilon \nu \phi \quad (2) \end{array} \right\}$$

Για το σύστημα στον οριζόντιο άξονα x' έχουμε διατήρηση ορμής για τις μεταφορικές κινήσεις. Από τη διατήρηση της ορμής συστήματος στην αρχική και στην ενδιάμεση θέση

$$\text{έχουμε} \dots \vec{P}_{ολ,x} = \text{σταθερή} \quad \text{ή} \quad m v_{cm,x} - M v = 0 \Rightarrow v_{cm,x} = \frac{M}{m} v \quad (3).$$

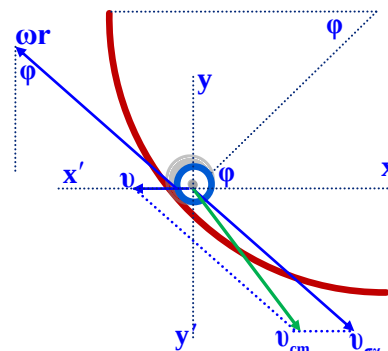
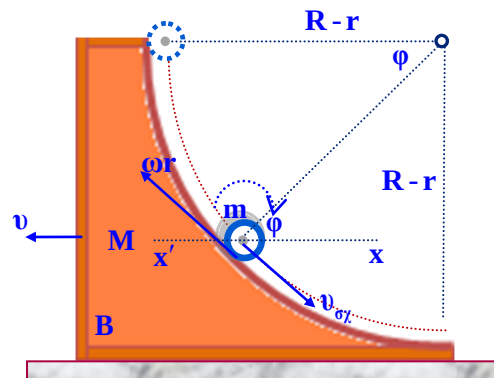
$$\text{Από (1) και (3) έχουμε} \quad \frac{M}{m} v = v_{σχ} \eta \mu \phi - v \quad \text{ή} \quad v_{σχ} = \frac{M+m}{m \cdot \eta \mu \phi} v \xrightarrow{(S.I)} v_{σχ} = 30v \quad (4)$$

δ. Τώρα από την (1) και (2) με βάση την (4) έχουμε

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{cm,x} = 30v \cdot 0,5 - v \\ v_{cm,y} = 30v \cdot \sqrt{3}/2 \end{array} \right\} \quad \text{ή} \quad \left\{ \begin{array}{l} v_{cm,x} = 14v \quad (5) \\ v_{cm,y} = 15\sqrt{3}v \quad (6) \end{array} \right\} \quad \text{και η απόλυτη ταχύτητα είναι}$$

$$v_{cm} = \sqrt{v_{cm,x}^2 + v_{cm,y}^2} \xrightarrow{(S.I)} v_{cm} \cong 29,51v$$

ε. Αφού έχουμε κύλιση χωρίς ολίσθηση πρέπει η απόλυτη ταχύτητα του σημείου της σφαίρας που είναι σε επαφή με την βάση να ισούται σε κάθε χρονική στιγμή με την



ταχύτητα της βάσης (που είναι στον άξονα $x'x$), οπότε έχουμε $v_{\text{απόλυτη σημείου επαφής σφαίρας}} = v_{\text{βάσης}} \Rightarrow$

$$\vec{v}_{\text{γραμμική σφαίρας στον άξονα } x'x} + \vec{v}_{\text{cm},x} = \vec{v}_{\text{βάσης}} \text{ ή } \omega r_{\text{ημφ}} - v_{\text{cm},x} = v \xrightarrow{(5)} \omega r_{\text{ημφ}} - 14v = v \Rightarrow \omega r_{\text{ημφ}} = 15v \Rightarrow$$

$$\omega = \frac{30v}{r} \xrightarrow{(4)} \omega = \frac{v_{\sigma\chi}}{r}$$

Σχόλιο -Παρατήρηση: Ας δούμε αν επιβεβαιώνονται τα αποτελέσματα για τις ταχύτητες όταν η σφαίρα είναι στην κατώτερη θέση με τις γενικές εξισώσεις που βρήκαμε στην ενδιάμεση θέση:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{\text{cm},x} = v_{\sigma\chi} \eta\mu\varphi - v \\ v_{\text{cm},y} = v_{\sigma\chi} \sigma\upsilon\nu\varphi \end{array} \right\} \xrightarrow{\varphi=90^\circ} \left\{ \begin{array}{l} v_{\text{cm},x} = v_{\sigma\chi} - v \\ v_{\text{cm},y} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow v_{\text{cm}} = v_{\sigma\chi} - v \xrightarrow{(3)}$$

$$v_{\text{cm}} = \frac{M+m}{m \cdot \eta\mu\varphi} v - v \xrightarrow{(\varphi=90^\circ)} v_{\text{cm}} = \frac{M}{m} v, \text{ άρα } v_{\text{cm}} = 14v, \text{ όσο βρήκαμε και στην ερώτηση}$$

(α).

$$\text{Το } \omega \text{ από την ερώτηση (α) είναι } \omega = \frac{v_{\text{cm}} + v}{r} \text{ ή } \omega = \frac{14v + v}{r} \text{ ή } \omega = \frac{15v}{r}$$

$$\text{Το } \omega \text{ από την γενική επεξεργασία είναι } \omega r_{\text{ημφ}} = 15v \xrightarrow{(\varphi=90^\circ)} \omega = \frac{15v}{r} \dots \text{το ίδιο!}$$

...καλοκαιρινοί προβληματισμοί με τον φίλο και εξαίρετο συνάδελφο κ. Γεώργιο Κοϊνάκη [[George Koinakis](#)] για την εκπαίδευση, την Φυσική και κυρίως την διδακτική αυτής για μεγαλύτερη αποδοχή και κατανόηση από τους μαθητές!