

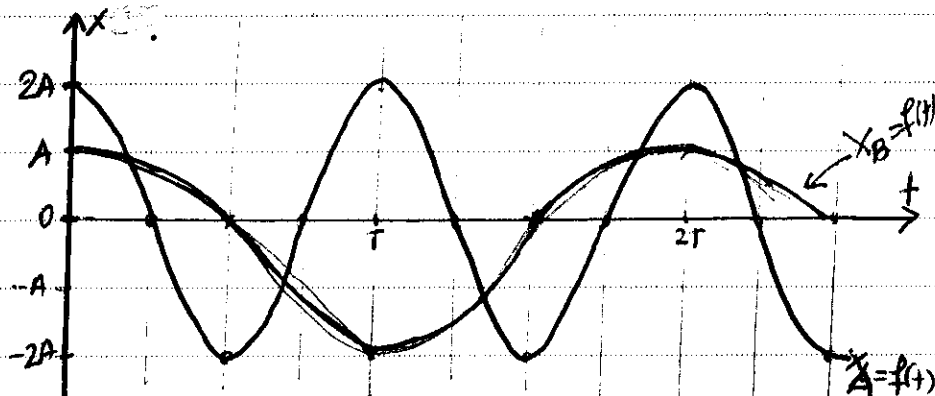
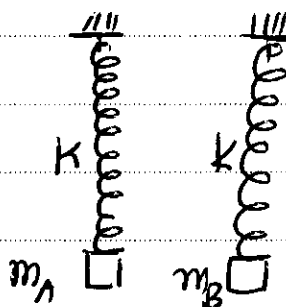
12 ΚΕΙΜΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ - ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα Α.

1-δ, 2-δ, 3-δ, 4-β 5(α-λ, θ-λ, ς-ε, δ-λ, ε-ε)

Θέμα Β.

B.1



$$\left. \begin{array}{l} T_A = T \\ T_B = 2T \end{array} \right\} T_B = 2T_A = \frac{2\pi}{\omega_B} = 2 \frac{2\pi}{\omega_A} \Rightarrow \omega_A = 2\omega_B, A_A = 2A, A_B = A$$

$$\alpha) \left. \begin{array}{l} v_{A,max} = \omega_A A_A \\ v_{B,max} = \omega_B A_B \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{v_{A,max}}{v_{B,max}} = \frac{\omega_A \cdot 2A}{\omega_B \cdot A} = \frac{2\omega_B \cdot 2A}{\omega_B \cdot A} = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_{A,max} = 4 v_{B,max} \quad \text{άρα α-λίστος}$$

$$\beta) D = \frac{1}{2} \Delta l = K = m_A \omega_A^2 = m_B \omega_B^2 \Rightarrow m_A (2\omega_B)^2 = m_B \omega_B^2 \Rightarrow m_A = m_B/4 \quad \text{ή}$$

$$\Rightarrow m_B = 4m_A \quad \text{άρα β-σωστή}$$

$$\gamma) \left. \begin{array}{l} E_A = \frac{1}{2} D A_A^2 = \frac{1}{2} K (2A)^2 \\ E_B = \frac{1}{2} D A_B^2 = \frac{1}{2} K A^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{E_A}{E_B} = 4 \Rightarrow E_A = 4E_B \quad \text{ή} \quad E_B = \frac{E_A}{4}$$

$$\quad \text{άρα γ-λίστος}$$

B.2 και στις δύο περιπτώσεις το πλάτος

βώνται με την στατική παραμόρφωση.

$$1^{\text{η}} \text{ περίπτωση: } mg = K \Delta l_1 = K A_1 \Rightarrow A_1 = \frac{mg}{K}$$

$$\frac{1}{2} D A_1^2 = \frac{1}{2} m v_{01}^2 \Rightarrow K \left(\frac{mg}{K} \right) = m v_{01}^2 \Rightarrow v_{01} = \sqrt{\frac{mg}{K}} \quad (1)$$

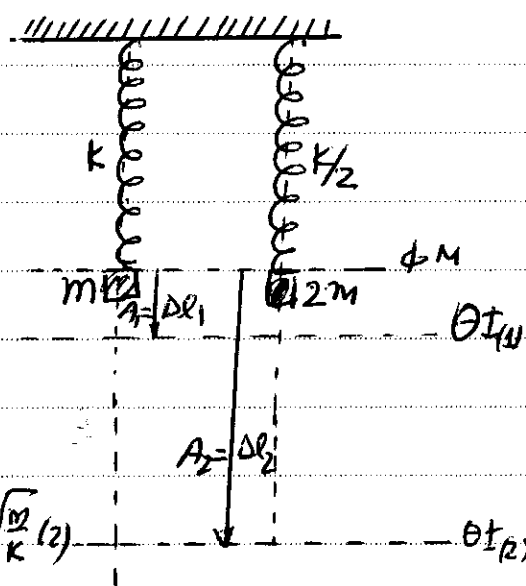
2^η περίπτωση:

$$2mg = \frac{K}{2} \Delta l_2 = \frac{K}{2} A_2 \Rightarrow A_2 = \frac{4mg}{K}$$

$$\frac{1}{2} D A_2^2 = \frac{1}{2} 2m v_{02}^2 \Rightarrow \frac{K}{2} \left(\frac{4mg}{K} \right)^2 = 2m v_{02}^2 \Rightarrow v_{02} = 2\sqrt{\frac{mg}{K}} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow v_{02} = 2v_{01}$$

άρα σωστή η (β)



$$B.3 \quad E_{15} = \frac{E_0}{8} \Rightarrow \frac{1}{2} D A_{15}^2 = \frac{1}{8} \frac{1}{2} D A_0^2 \Rightarrow A_{15} = \frac{A_0}{\sqrt{8}} \quad \text{ή} \quad A_{15} = A_0 2^{-3/2}$$

$$A = A_0 e^{-\lambda t} \xrightarrow[t=15T]{A=A_{15}} A_{15} = A_0 e^{-\lambda 15T} \Rightarrow A_0 2^{-3/2} = A_0 e^{-\lambda 15T}$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2} \ln 2 = -\lambda 15T \Rightarrow 3 \ln 2 = \lambda 15T \quad (1)$$

$$A = A_0 e^{-\lambda t} \xrightarrow[t=NT]{A=A_0/2} \frac{A_0}{2} = A_0 e^{-\lambda NT} \Rightarrow -\ln 2 = -\lambda NT \Rightarrow \ln 2 = \lambda NT \quad (2)$$

$$(1), (2) \quad N = 10 \text{ ταλαντώσεις}$$

Άρα βωρίνη η πρόταξη (ε)

Θέμα Γ.

$$Γ.1) D = K = M\omega^2 \Rightarrow \omega = 10 \text{ rad/s}$$

$$y_{\max} = \omega A \Rightarrow A = 0,2 \text{ m}$$

$$Γ.2) W_F = E_{\text{ελα}} \Rightarrow Fd = \frac{1}{2} k A^2 \Rightarrow F = 20 \text{ N}$$

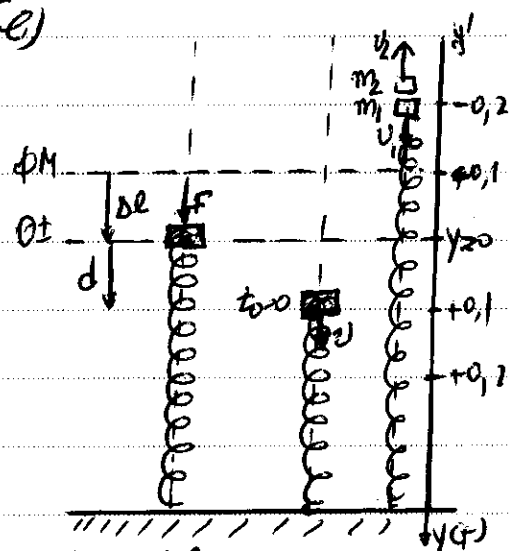
$$Γ.3) \text{ΘΙ: } m\varphi = k\Delta l \Rightarrow \Delta l = 0,1 \text{ m}$$

$$\dots y = 0,2 \text{ m} \cos(10t + \frac{\pi}{6}) \dots \text{ και για}$$

$$t = \frac{\pi}{15} \text{ βρίσκουμε } y = 0,2 \text{ m} \cos(10 \cdot \frac{\pi}{15} + \frac{\pi}{6})$$

$$\Rightarrow y = 0,2 \text{ m} \cos \frac{5\pi}{6} \Rightarrow y = 0,1 \text{ m} \dots \text{ και αφού το σχήμα } \Delta l = 0,2 \text{ m, άρα}$$

$$F_{\text{ελ}} = k\Delta l = 100 \cdot 0,2 \Rightarrow F_{\text{ελ}} = 20 \text{ N} \text{ (σε φορά προς τα πάνω)}$$



Γ.4 'Ο ταλαντωτής, όταν κινείται, έχει $v=0$ και απέχει από το φμ αντιστοίχως απόσταση 0,1 m.

$$P = \text{ελαστική} \Rightarrow 0 = m_2 v_2 - m_1 v_1 \xrightarrow{m_1 = m_2} v_1 = v_2 = 2\sqrt{2} \text{ m/s}$$

$$\text{Νέα θέση ισορροπίας: } \Sigma F_y = 0 \Rightarrow m_1 g = k \Delta l_1$$

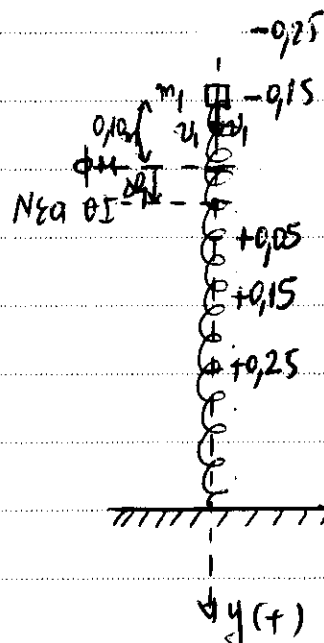
$$\Rightarrow \Delta l_1 = \frac{m_1 g}{k} = 0,05 \text{ m}$$

Μόλις αρχίσει η κίνηση ταλαντώνεται

$$v_1 = +2\sqrt{2} \text{ m/s} \quad y = -(\Delta l_1 + 0,1) = -0,15 \text{ m}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} k y^2 = \frac{1}{2} k A_1^2 \Rightarrow A_1 = \sqrt{\frac{m_1 v_1^2 + k y^2}{k}}$$

$$\stackrel{\text{SI}}{\Rightarrow} A_1 = \sqrt{\frac{0,5 \cdot (2\sqrt{2})^2}{100} + 0,15^2} \Rightarrow A_1 = 0,25 \text{ m}$$



Θέλει Δ!

$$\Delta.1) \Delta t = 25 \cdot 10^{-3} = \frac{T}{4} \Rightarrow T = 100 \cdot 10^{-3} \text{ s}, \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{100 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow \omega = 20 \text{ rad/s}$$

$$A = 0,5 \text{ m}, v_{\max} = \omega A \Rightarrow v_{\max} = 20 \cdot 0,5 \Rightarrow v_{\max} = 10 \text{ m/s}$$

$$K_{\max} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 \Rightarrow 50 = \frac{1}{2} m \cdot 10^2 \Rightarrow m = 1 \text{ kg}$$

$$D = K = m \omega^2 \Rightarrow K = 1 \cdot 20^2 \Rightarrow K = 400 \text{ N/m}$$

$$\Delta.2) S = 2,8 \text{ m} = 2,0 + 1,5 + 0,3 = 5 \cdot (4 \cdot 0,5) + 3 \cdot 0,5 + 0,3 = 5(4A) + 3A + 0,3$$

$$= 5(4A) + 3A + 0,3 \text{ m}$$

Τελικά είναι στην θέση

$$x = +0,3 \text{ m} \text{ και } v > 0$$

$$\text{Η ταχύτητα στην θέση αυτή είναι } v_1 = 20 \sqrt{A^2 - x^2} = 20 \sqrt{0,5^2 - 0,3^2} \Rightarrow v_1 = 8 \text{ m/s}$$

$$P = 6 \text{ ταξίδια} \Rightarrow m_1 v_1 - M v_2 = (m + M) v$$

$$\Rightarrow 1,8 - 3 \cdot 8 = -4 v \Rightarrow v = 4 \text{ m/s}$$

Για την νέα ταχύτητα

$$D = K = 400 \text{ N/m} = m \omega'^2 \Rightarrow \omega' = 10 \text{ rad/s}$$

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} D x^2 = \frac{1}{2} D A'^2$$

$$\Rightarrow A' = \sqrt{x^2 + \frac{m v^2}{D}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A' = \sqrt{0,3^2 + \frac{4 \cdot 4^2}{400}} \Rightarrow A' = 0,5 \text{ m}$$

$$\Delta.3) \text{ Όταν } x = +0,5 \text{ m} = A_0 \text{ η προέκταση } t_0 = 0$$

$$E_0 = \frac{1}{2} D A_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 400 \cdot 0,5^2 = 50 \text{ J}$$

$$E_{10} = \frac{1}{2} D A_{10}^2 \Rightarrow E_0 - Q = \frac{1}{2} D A_{10}^2 \Rightarrow 31,25 = \frac{1}{2} \cdot 400 A_{10}^2 \Rightarrow A_{10} = 0,125 \text{ m}$$

$$\left. \begin{array}{lll} t_0 = 0 & t = 5 \text{ s} & t = 10 \text{ s} \\ A_0 = 0,5 \text{ m} & A_5 & A_{10} = 0,125 \text{ m} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{A_0}{A_5} = \frac{A_5}{A_{10}} \Rightarrow A_5 = \sqrt{A_0 A_{10}}$$

$$\Rightarrow A_5 = \sqrt{0,5 \cdot 0,125} \Rightarrow A_5 = 0,25 \text{ m}$$

$$\frac{E_5}{E_0} = \frac{\frac{1}{2} D A_5^2}{\frac{1}{2} D A_0^2} = \left(\frac{A_5}{A_0} \right)^2 = \left(\frac{0,25}{0,5} \right)^2 = 0,25$$

Άρα η σύρση είναι 67,5% και η ταχύτητα είναι 75%

$$\eta\% = \frac{E_5 - E_0}{E_0} \cdot 100\% = \frac{E_5 - 50}{50} \cdot 100\% = 75\%$$

$$\Delta.4) A = A_0 e^{-\lambda t} \Rightarrow A = 0,500 e^{-\lambda t} \xrightarrow[t=5T]{A_5=0,250} 0,250 = 0,500 e^{-\lambda \cdot 5T}$$

$$\Rightarrow -0,42 = -\lambda \cdot 5T \Rightarrow \lambda = \frac{0,42}{5 \cdot \frac{2\pi}{10}} \Rightarrow \lambda = \frac{0,42}{\pi} = \frac{0,22\pi}{1} = 0,22 \text{ s}^{-1}$$

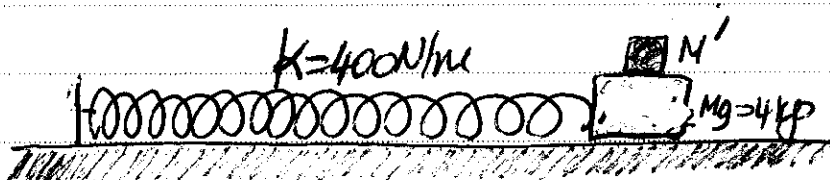
$$\text{όρα } A = 0,500 e^{-0,22 t} \text{ (s)}$$

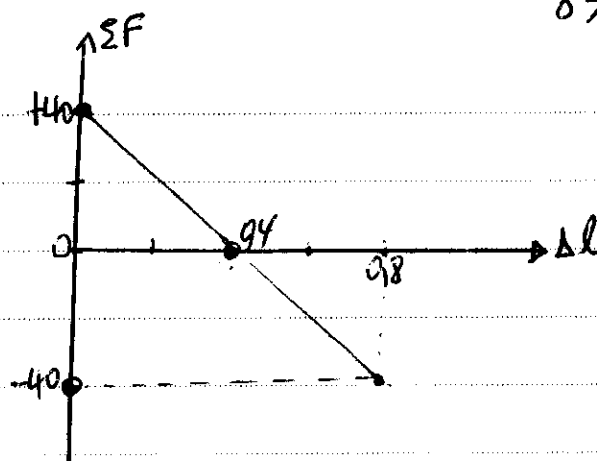
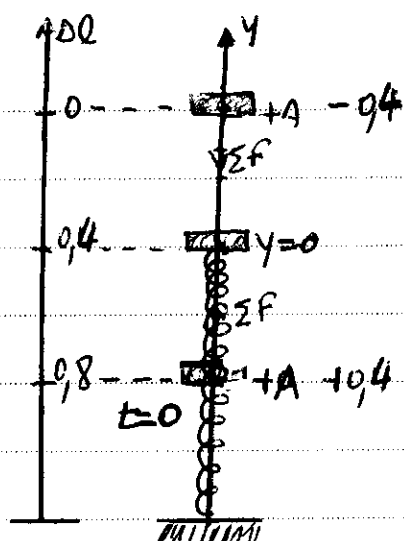
$\Delta.5)$ Πόσο υπάρχει
60x10x10x5 65m

$$\omega_{\text{δωρεάν}} = 8 \text{ rad/s} \text{ περίοδο}$$

η μετρίκη ιδιοσυχνότητα γράει $\omega_{\text{δωρεάν}} = 8 \text{ rad/s}$

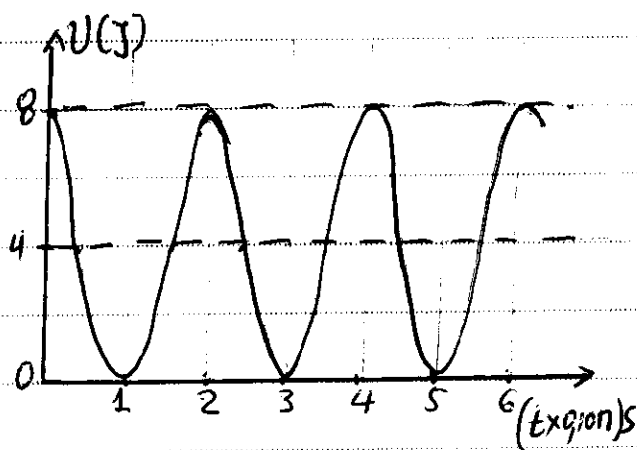
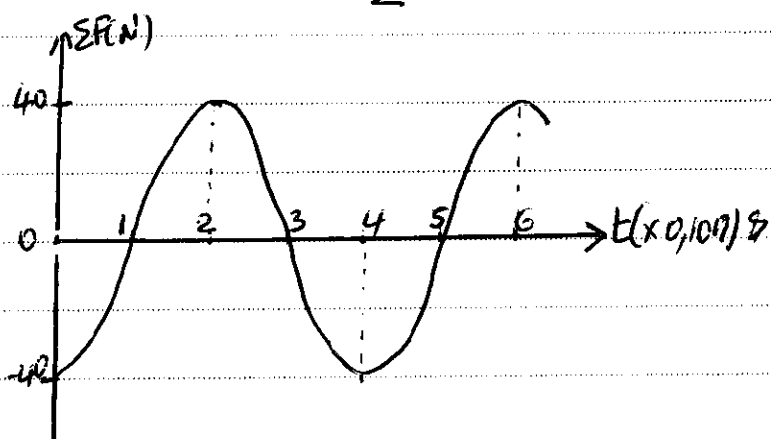
$$\text{όρα } k = (M' + m_{\text{μ}}) \omega_{\text{δωρεάν}}^2 \Rightarrow 400 = (M' + 4) \cdot 8^2 \Rightarrow M' = 2,75 \text{ kg}$$





Γ.1 $\Delta l = 0 \Rightarrow [F_{\text{el}} = 0, \Sigma F_y = +40 \text{ N}] \Rightarrow \Sigma F = mg \Rightarrow 40 = m \cdot 10 \Rightarrow m = 4 \text{ kg}$
 $\Delta l = 0.4 \text{ m} \Rightarrow \Sigma F = 0 \Rightarrow k \Delta l = mg \Rightarrow k \cdot 0.4 = 4 \cdot 10 \Rightarrow k = 100 \text{ N/m}$
 $D = k = m \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100}{4}} = 5 \text{ rad/s}, T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5} \text{ s}$

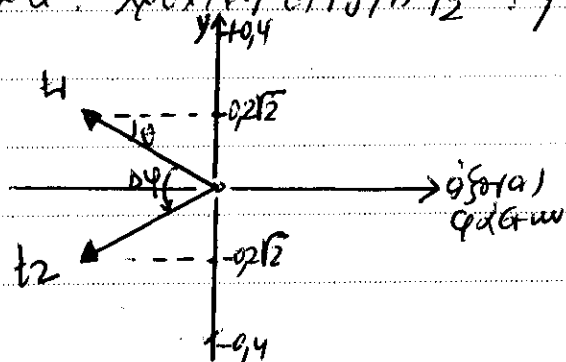
Γ.2 $y = A \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow y = 0.4 \text{ m} \cdot (\sin(5t + \frac{\pi}{2})) \Rightarrow y = 0.4 \sin(5t) \text{ (SI)}$
 $\Sigma F_y = -Dy \Rightarrow \Sigma F_y = -100 \cdot 0.4 \sin(5t) \Rightarrow \Sigma F_y = -40 \sin(5t) \text{ (SI)}$
 $U = \frac{1}{2} D y^2 \Rightarrow U = \frac{1}{2} 100 \cdot 0.4^2 \sin^2(5t) \Rightarrow U = 8 \sin^2(5t) \text{ (SI)}$
 $\Rightarrow U = 8 \frac{1 + \cos(10t)}{2} \Rightarrow U = 4 + 4 \cos(10t) \text{ (SI)}$



Γ.3 $U + K = E \Rightarrow 2U = E \Rightarrow 2 \cdot \frac{1}{2} D y^2 = \frac{1}{2} D A^2 \Rightarrow y = \frac{A^2}{2} \Rightarrow y = \pm \frac{A \sqrt{2}}{2}$
 $\Rightarrow y = \pm 0.2 \sqrt{2}$

1^η φορά: χρονική στιγμή t_1 : $y = +0.2 \sqrt{2}$, $v < 0$

2^η φορά: χρονική στιγμή t_2 : $y = -0.2 \sqrt{2}$, $v < 0$



$\eta \mu \theta = \frac{0.2 \sqrt{2}}{0.4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

$\Delta \phi = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

$\Delta \phi = \omega \Delta t + \frac{\pi}{2} = 5 \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{\pi}{10} \text{ s}$

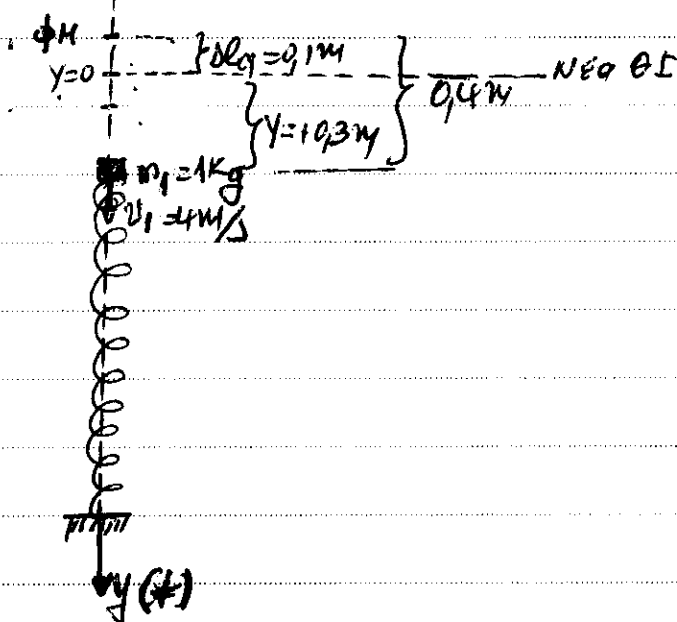
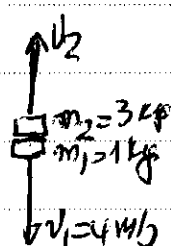
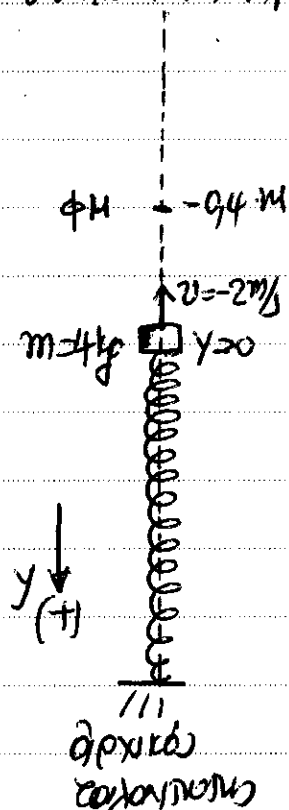
$\Rightarrow \Delta t = 0.314 \text{ s}$

Γ.4 $v_{\max} = -\omega A = -5 \cdot 0,4 = -2 \text{ m/s}$ (πριν την σύγκρουση)

Μετά την σύγκρουση: $v_{1\max} = \omega_1 A_1 \Rightarrow 5 = \omega_1 \cdot 0,5 \Rightarrow \omega_1 = 10 \text{ rad/s}$

$D_1 = K = m_1 \omega_1^2 \Rightarrow m_1 = \frac{K}{\omega_1^2} = m_1 = \frac{100}{10^2} = m_1 = 1 \text{ kg} \wedge m_2 = 3 \text{ kg}$

Ο σταθερά της m_1 έχει θέση ισορροπίας $5 \text{ cm} \Rightarrow m_1 g = k \Delta l_1 \Rightarrow \Delta l_1 = 9,1 \text{ cm}$



Μόλις αρχίσει η νέα ταλάντωση του m_1 αμέσως έχει

απόσταση $y = +0,3 \text{ m}$ και ταχύτητα $v_1 = \omega_1 \sqrt{A_1^2 - y^2}$

$\Rightarrow v_1 = 10 \sqrt{0,5^2 - 0,3^2} = v_1 = 4 \text{ m/s}$

Ρητιν = Ργεν $\Rightarrow -m v = -m_2 v_2 + m_1 v_1 \Rightarrow -8 = -3v_2 + 4$

$\Rightarrow 3v_2 = 12 \Rightarrow v_2 = 4 \text{ m/s}$

Άρα $v_1 = 4 \text{ m/s}$ ψεφοει μετά τη σύγκρουση $\wedge v_2 = 4 \text{ m/s}$ ψεφοει
προς τα πάνω.

... και αν m_1 και m_2 κινηθούν προς τα πάνω.

... δοκιμάστε το ... θα δείτε ότι οδηγείτε σε άτοπο.

Θέμα Δ!

Δ.1) Θέση ισορροπίας της $M_1 = 3 \text{ kg}$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow M_1 g = k \Delta l \Rightarrow 3 \cdot 10 = 100 \Delta l$$

$$\Rightarrow \Delta l = 0.3 \text{ m}$$

Προσέγγιση: Η συνισταμένη δύναμη για όλο χρόνο δρά η δύναμη F έχει

$$\text{γέγραφο } \Sigma F = F + M_1 g - F_{el} \Rightarrow$$

$$\Sigma F = 15 + 100y + 3 \cdot 10 - 100[0.3 + y]$$

$$\Rightarrow \Sigma F = 15 + 100y + 30 - 30 - 100y \Rightarrow \Sigma F = 15 \text{ N}$$

$$\text{Επειδή } \Sigma F = \text{σταθερή}, a = \frac{\Sigma F}{M_1} = \frac{15 \text{ N}}{3 \text{ kg}}$$

$$\Rightarrow a = 5 \text{ m/s}^2. \text{ Η δύναμη } F \text{ έπραξε}$$

$$\text{για μετατόπιση } y = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot (0.2)^2$$

$$\Rightarrow y = 0.1 \text{ m}. \text{ Η εργασία της ταλάντωσης}$$

(γείρα την μετατόπιση της F) γίνεται

η εργασία που προσφέρεται

με βάση την εργασία $F \dots$ το αθροίς βρίσκεται αθροίς σταθερά

της $F = f(y) \dots$ αφού είναι μεταβλητή:

$$W_F = \frac{15 + 25}{2} \cdot 0.1 \Rightarrow W_F = 2 \text{ Joule}, \quad E_{el1} = W_F \Rightarrow \frac{1}{2} D A_1^2 = W_F \Rightarrow A_1 = \sqrt{\frac{2 W_F}{D}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2}{100}}$$

$$\Rightarrow A_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 2}{100}} \Rightarrow A_1 = 0.2 \text{ m}$$

Δ.2) Ο νέος ταλαχνοτής έχει περίοδο $T = 0.4 \text{ s}$ και $\omega = \frac{2\pi}{T} = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

$$D = k = M_{\text{ολ}} \omega^2 \Rightarrow 100 = M_{\text{ολ}} \cdot 5^2 \Rightarrow M_{\text{ολ}} = 4 \text{ kg} \Rightarrow M_1 + M_2 = 4 \text{ kg} \Rightarrow M_2 = 1 \text{ kg}$$

Δ.3) Μετά την κρούση η νέα θ

$$\text{της } M_{\text{ολ}} = 4 \text{ kg} \text{ είναι } M_{\text{ολ}} g = k \Delta l_1$$

$$\Rightarrow \Delta l_1 = 0.4 \text{ m}. \text{ Μόλις αρχίσει η}$$

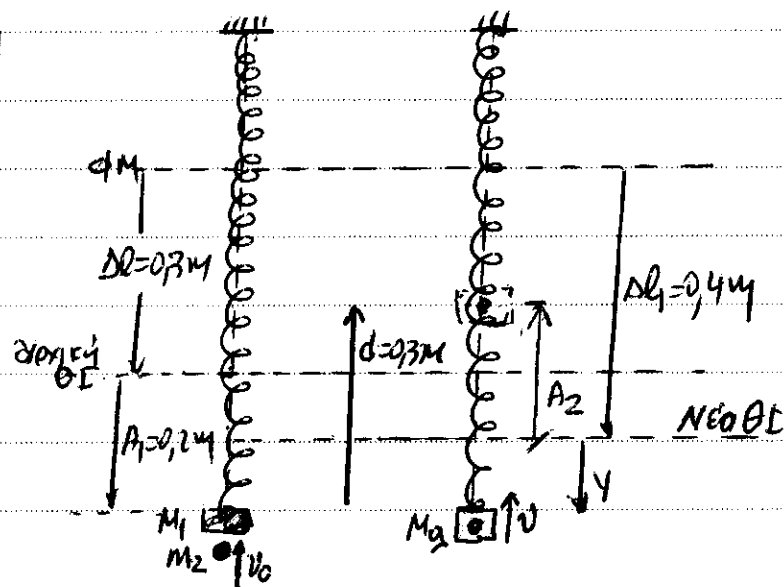
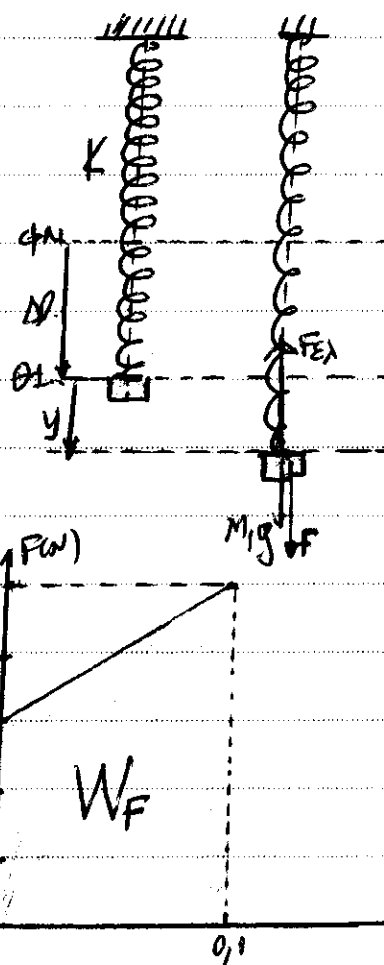
ταλάντωση, αμέσως μετά την

κρούση, ο ταλαχνοτής έχει

$$\text{αθροίς ταχύτητα } y = (\Delta l_1 + A_1 - \Delta l_1)$$

$$\Rightarrow y = 0.1 \text{ m} \text{ και ταχύτητα } v$$

Το πλάτος A_2 της νέας



ταλαντώσει είναι η απόσταση των σημείων που συνεισφέρει
η ταχύτητα στο την νέα θέση ισορροπίας.

Απο το σχήμα φαίνεται ότι $A_2 = d - y \Rightarrow A_2 = 0,3\text{m} - 0,1\text{m}$ ή $A_2 = 0,2\text{m}$.

Δ.4) Η ταχύτητα του ταλαντωτή αμέσως μετά την κρούση
είναι $\frac{1}{2}M_0 v^2 + \frac{1}{2}Dy^2 = \frac{1}{2}DA_2^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{D(A_2^2 - y^2)}{M_0}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{k(A_2^2 - y^2)}{M_0}}$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{100(0,2^2 - 0,1^2)}{4}} \Rightarrow v = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ m/s}$$

$$\vec{P}_{01} = \text{σταθερό} \Rightarrow M_2 v_0 = M_0 v \Rightarrow v_0 = \frac{M_0 v}{M_2} \Rightarrow v_0 = \frac{4\text{kg} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ m/s}}{1\text{kg}}$$

$$\Rightarrow v_0 = 2\sqrt{3} \text{ m/s}$$

3ο Κεφάλαιο αξιολόγησης - απαντήσεις

Θέμα Α

1-δ, 2-β, 3-δ, 4-β, 5 (α-1, β-1, γ-1, δ-1, ε-Σ)

Θέμα Β

Β.1 Το Μ αρχίζει να ταλαντώνεται

την $t_M = 2T$ και έχει εξίσωση,

$$y_M(t) = A \sin[\omega(t - 2T)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_M(t) = A \sin\left[\frac{2\pi}{T}(t - 2T)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_M(t) = A \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - 4\pi\right)$$

Το Λ αρχίζει να ταλαντώνεται την $t_L = 2T - \frac{5T}{4} \Rightarrow t_L = \frac{3T}{4}$

(...κάθε λ του σιγχιότυπου αντιστοιχεί σε χρόνο $T/4$)

$$y_L(t) = A \sin[\omega(t - t_L)] = A \sin\left[\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{3T}{4}\right)\right] = A \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{3\pi}{2}\right)$$

Το Κ αρχίζει να ταλαντώνεται την $t_K = 2T - \frac{6T}{4} = 0,5T$... και έχει

$$\text{εξίσωση ταλάντωσης, } y_K(t) = A \sin\left[\frac{2\pi}{T}(t - t_K)\right] = A \sin\left[\frac{2\pi}{T}(t - 0,5T)\right]$$

$$\Rightarrow y_K(t) = A \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \pi\right)$$

Αρα βωβή η σχέση (β).

Β.2 Αφού $A_M = 2A$ (...ενίσχυση...)

και το Μ είναι 6^η υπερβολή

επίχυσης μετά την φεθοκάθετο δοχεί

$$\Pi_1 M - \Pi_2 M = 6\lambda \text{ ή } r_1 - r_2 = 6\lambda$$

$$\text{Αρχικό μήκος κύματος } \lambda = \frac{v}{f}$$

$$\text{Νέο μήκος κύματος } \lambda' = \frac{v}{f'} = \frac{v}{2f} = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda' = \frac{\lambda}{2} \text{ ή } \lambda = 2\lambda'$$

Η διαφορά απόστασεων των Μ από τις πηγές σε σχέση με το

$$\text{νέο μήκος κύματος είναι } \Pi_1 M - \Pi_2 M = 6\lambda = 6 \cdot 2\lambda' = 12\lambda'$$

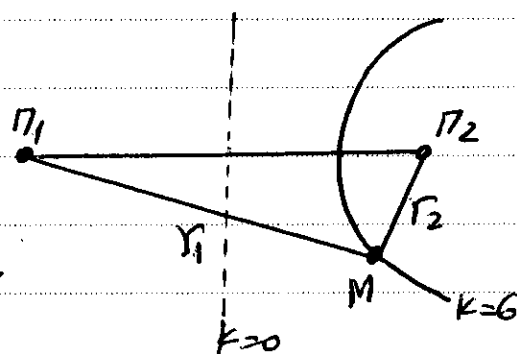
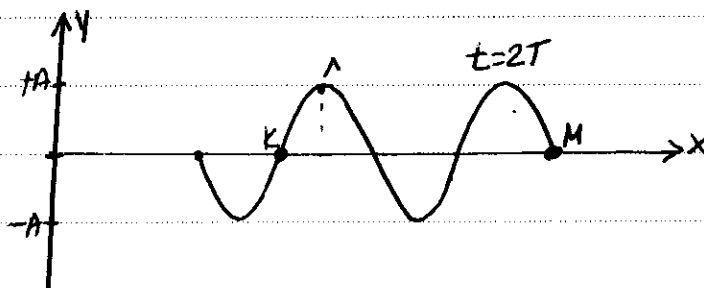
Αρα το Μ συνεχίζει να ανήκει σε υπερβολή ενίσχυσης και

υπόκειται 6^η ή 12^η ($k=12$) μετά την φεθοκάθετο. Μεταξύ

του Μ και της φεθοκάθετου υπάρχουν άλλες $N=11$ υπερβολές

επίχυσης

Σωστή η σχέση (δ)



B.3

$$\lambda_g = (2k+1) \frac{\lambda}{4} \xrightarrow[\substack{\lambda_g = L \\ k=19}]{\text{τέλος}} L = (2 \cdot 19 + 1) \frac{\lambda}{4} \Rightarrow L = 39 \frac{\lambda}{4}$$

Το μ έδον M στο χορδή έχει συντελεστή $\chi_M = \frac{L}{2} = \frac{39\lambda}{8}$ και η τάση

$$A_M = \left| 2A \sin \frac{2\pi \chi_M}{\lambda} \right| = \left| 2A \sin \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{39\lambda}{8} \right| = \left| 2A \sin \frac{39\pi}{4} \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_M = \left| 2A \sin \left(\frac{40\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) \right| = \left| 2A \sin \frac{\pi}{4} \right| = 2A \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow A_M = A\sqrt{2}$$

Ηρραβωμένη η έχέδουδ.

Θέμα Γ:

Γ.1) Το διάστημα που διαγύει το M στο όδο χρόνο το κύμα χρειάζεται

διανυκτάδου από το M στο N

$$\text{Είχου } \lambda = 6A \text{ (βλ. εκ 2)} \dots 0,90 = 6A$$

$$\Rightarrow A = 0,15 \text{ m} \dots \text{ και απαιτείται } 6\lambda'$$

χρόνο $\Delta t = 1,5 \text{ T}$. Μετά δέ χρόνο

$\Delta t = 1,5 \text{ T}$ το κύμα διαδίδεται κατά

$$MN = \Delta x = 0,6 \text{ m} = v \Delta t \Rightarrow 0,6 \text{ m} = v \cdot 1,5 \text{ T}$$

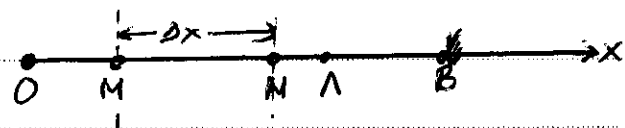
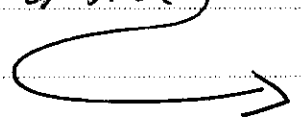
$$\Rightarrow 0,6 = 1,5 \lambda \Rightarrow \lambda = 0,4 \text{ m}$$

$$\text{Επίδου } v = \frac{\omega \lambda}{2\pi} = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} \Rightarrow v = \frac{1,1 \text{ m}}{0,55 \text{ s}} \Rightarrow v = 2 \text{ m/s}$$

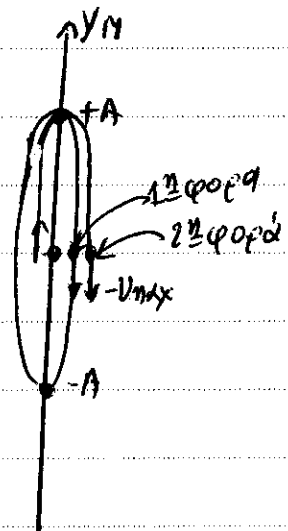
$$f = \frac{v}{\lambda} \Rightarrow f = \frac{2 \text{ m/s}}{0,4 \text{ m}} \Rightarrow f = 5 \text{ Hz}$$

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow \omega = 10\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \text{ και } T = \frac{1}{f} \text{ ή } T = 0,20 \text{ s}$$

Άφου το κύμα δέχεται έχει έρχική φάση θα έχει



Εκ 49 1



Εξίσωση των επιδράσεων : $y(x) = 0,15 \cdot \ln(5,5n - 50x)$

To 10 for 1000 $t = 0,55$ ϕ & ψ $X_1 = 1,1 \mu$, $\frac{\chi_1}{\lambda} = \frac{1,1}{0,4} = \frac{11}{4} = \frac{8+3}{4} = 2 + \frac{3}{4}$

...ΠΙΟ ΘΗΛΗ Η ΞΕΛΑΒΕΥΤΑ ΕΠΙΧΕΙΡΙΣΤΟΝ... ..

Hand-drawn graph of a sinusoidal function $y = 0.15 \sin(2000\pi x)$. The graph shows three full cycles of a sine wave. The y-axis is labeled with 0.15 and -0.15. The x-axis is labeled with $x(m)$. Key points are marked: $x_1 = 0.4$, $x_2 = 0.8$, and $x_3 = 1.2$. A period $T = 0.55 s$ is indicated between x_1 and x_2 .

Ν επιλ όφ αμεσας ταυογ $\chi_M = -A = -0,15 \text{ u.e.}$

Өзім $x_1 = +94 \text{ m}$ және $x_2 = +98 \text{ m}$

Nº 8º d) B.V. $X_N = X_M + 0,6 = 0,8 + 0,6 = 1,4 \text{ m} > 1,1 \text{ m}$

... και διαφορετικά...

$$y_M = 0,15 \text{ m} + (10 \text{ m} - 5 \text{ m} \times 4) \quad \text{TM } t = 0,55 \text{ s} \quad y_M = -0,15 \text{ m}$$

$$\Rightarrow -0,15 = 0,15 \cdot m_H(5,50 - 50x_H) \Rightarrow m_H(5,50 - 50x_H) = -1 \Rightarrow 5,50 - 50x_H = -20 \Rightarrow x_H = \frac{25,5}{50}$$

$$\Rightarrow -50X_M = 2FN - 4N \Rightarrow 50X_M = 4N - 2FN \Rightarrow X_M = \frac{4N - 2FN}{50} \Rightarrow X_M = \frac{4 - 2F}{5} \quad (1)$$

Προφανώς $x_M > 0 \Rightarrow 4 - 2k > 0 \Rightarrow -2k > -4 \Rightarrow k < 2$

... $k=0, k=1$ Για $k=0 \xrightarrow{(1)}$ $\chi_M = 0,8$ αποε
 Για $k=1 \xrightarrow{1}$ $\chi_M = 94\%$ δεινί

Γ.3) $\chi_8 = (2k+1) \frac{\lambda}{4} = (2k+1) \frac{0,4}{4} \Rightarrow \chi_8 = (2k+1) 0,1 \Rightarrow$
 Για τον τελευταίο δεσμό των F^0 , $k=6$ και $\chi_8 = \ell$

$$\ell = (2 \cdot 6 + 1) \cdot 0,1 \Rightarrow \boxed{\ell = 1,3 \text{ m}}$$

Γ.4) $A_M = \left| 2A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \right| = \left| 2 \cdot 0,156 \cos 2\pi \frac{1}{0,4} \right| = \left| 0,306 \cos \pi \right| = 0,3 \text{ m}$ και η

οφθαλμ. $A_M = \left| 2 \cdot 0,156 \cos 2\pi \frac{0,4}{0,4} \right| = 0,3 \text{ m} \dots \text{και η}$

$$\chi_M = 0,4 \text{ m}, \quad \chi_N = 1 \text{ m}$$

Θέτουμε δεσμούς $\chi_8 = (2k+1) \frac{\lambda}{4} = (2k+1) 0,1$

προφανώς $0,4 < \chi_8 < 1 \Rightarrow 0,4 < (2k+1) 0,1 < 1$

$$\Rightarrow 4 < 2k+1 < 10 \Rightarrow 3 < 2k < 9 \Rightarrow 1,5 < k < 4,5$$

Εφα $k = 2, 3, 4 \dots$ τρεις δεσμοί

Θέμα Δ:

Δ.1) $A_M = \left| 2A \cos \pi \frac{r_1 M - r_2 M}{\lambda} \right| = \left| 2A \cos \pi \frac{z - (\ell + z)}{\lambda} \right| = \left| 2A \cos \pi \frac{-\ell}{\lambda} \right| = \left| 2A \cos \pi \frac{\ell}{\lambda} \right|$

$\Rightarrow A_M = \left| 2A \cos \pi \frac{\ell}{\lambda} \right|$ που είναι διεσθόλητα αόρατων
 απόστασης z των M αόρατων r_1

Δ.2) $\ell = \dots$

Αφού στο M έχουμε ενίσχυση. γράφουμε $r_1 M - r_2 M = k\lambda$

$$\Rightarrow z - (\ell + z) = k\lambda \Rightarrow -\ell = k\lambda \Rightarrow k = \frac{\ell}{\lambda} = \frac{0,6}{\lambda}$$

Επειδή k ακέραιος, η μόνη τιμή του λ που δίνει
 ακέραιο k είναι $\boxed{\lambda = 0,1 \text{ m}}$

$\dots f = \frac{v}{\lambda} = \frac{1 \text{ m/s}}{0,1 \text{ m}} \Rightarrow f = 10 \text{ Hz}, \quad \omega = 20\pi \text{ rad/s}, \quad T = 0,1 \text{ s}$

* Η θέση των N δεν αλλάζει, ούτε το γνήσιο μέγεθος
 ... Η ποσότητα $r_1 = r_2$ παρέχει για $r_1 - r_2 = 5\lambda$.

4^ο κεφάλαιο αξιολόγησης - [κύματα] - Απαντήσεις

Θέμα Α

1-γ, 2-δ, 3-δ, 4-β, 5 (α-δ, β-δ, γ-δ, δ-α, ε-α)

Θέμα Β

B.1) $y_M = A \sin \phi_M \Rightarrow A = A \sin \phi_M$

$\Rightarrow \phi_M = 2k\pi + \pi/2, y_N = A \sin \phi_N \Rightarrow$

$+A/2 = A \sin \phi_N \Rightarrow \phi_N = 2k'\pi + \frac{5\pi}{6} \quad (\text{...} \phi_N \omega)$

$\Delta\phi = \phi_M - \phi_N = (2k\pi + \frac{\pi}{2}) - (2k'\pi + \frac{5\pi}{6}) \Rightarrow$

$\Delta\phi = 2(k-k')\pi - \pi/3 \quad (1)$

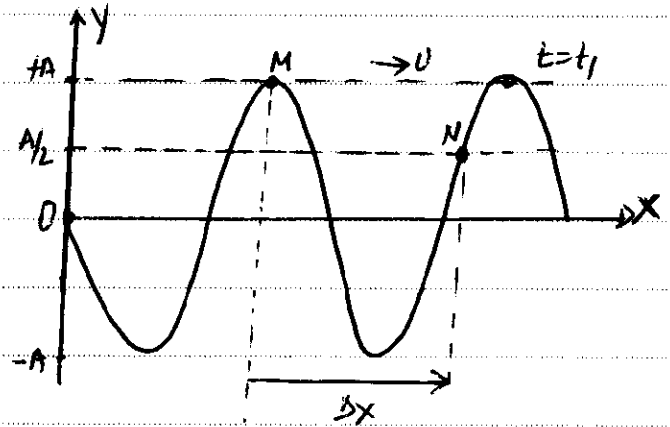
Παρατηρώντας το σχηματικό

$\frac{3\pi}{2} < \Delta\phi < 2\pi \Rightarrow 1,5\pi < 2(k-k')\pi - \frac{\pi}{3} < 2\pi \Rightarrow 1,5\pi + \frac{\pi}{3} < 2(k-k')\pi < 2\pi + \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow 11\pi/6 < 2(k-k')\pi < 7\pi/3 \Rightarrow 11/12 < k-k' < 7/6 \Rightarrow k-k' = 1 \Rightarrow \Delta\phi = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$

$\Delta\phi = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda}$
 $\Delta\phi = \frac{5\pi}{3} \Rightarrow 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} = \frac{5\pi}{3} \Rightarrow \Delta x = \frac{5\lambda}{6}$

Άρα βωστή η πρόταση (β)



B.2)

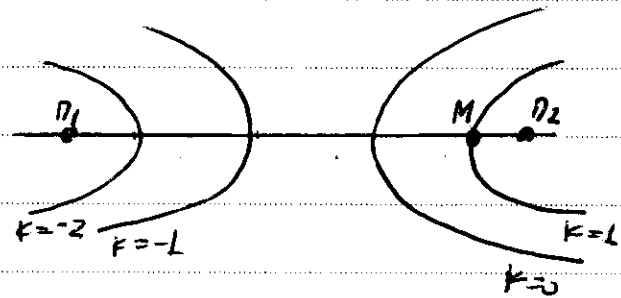
$\pi_2 M = 0,25\lambda$

$\pi_1 M - \pi_2 M = (2k+1)\frac{\lambda}{2} \xrightarrow{k=1} \pi_1 M - 0,25\lambda = 1,5\lambda$

$\Rightarrow \pi_1 M = 1,75\lambda$

$\pi_1 \pi_2 = \pi_1 M + M \pi_2 = 1,75\lambda + 0,25\lambda = 2\lambda$

Άρα βωστή η πρόταση (α)



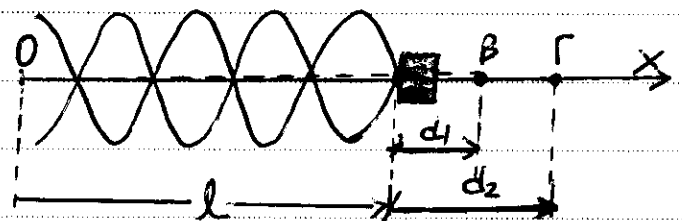
B.3)

Όταν το στάσιμο κύμα δημιουργείται στο σχήμα ίσχύει

$OB = (2k+1)\frac{\lambda}{4} \Rightarrow \lambda + d_1 = (2k+1)\frac{\lambda}{4} \quad (1)$

Όταν το στάσιμο κύμα

δημιουργείται στο σχήμα τότε έχουμε για άτριο



επιπλέον, είναι επιπλέον δεδο

$$(0\tau) = [2(k+1)+1] \frac{\tau}{4} \Rightarrow d+d_2 = (2k+3) \frac{\tau}{4} \quad (7)$$

$$(2) - (1) \Rightarrow d_2 - d_1 = 2 \frac{\tau}{4} \Rightarrow d_2 - d_1 = \frac{\tau}{2} \Rightarrow \lambda = 2(d_2 - d_1)$$

... άρα σωστή η πρόταση (β).

Θέμα Γ:

Γ.1) Το κύμα δεν έχει αρχική φάση ...

$$y(x,t) = A \sin(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda})$$

$$\varphi(x,t) = \omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} \xrightarrow{t=t_1} \varphi(x) = \omega t_1 - \frac{2\pi x}{\lambda} \quad (\text{δωρεάν})$$

$$\text{Για } x = 0,2 \text{ m} \Rightarrow 4\pi = \omega t_1 - \frac{2\pi \cdot 0,2}{\lambda}$$

$$\text{Για } x = 0,6 \text{ m} \Rightarrow 2\pi = \omega t_1 - \frac{2\pi \cdot 0,6}{\lambda}$$

$$2\pi = \frac{2\pi}{\lambda} 0,4 \Rightarrow \boxed{\lambda = 0,4 \text{ m}}$$

(!!) Σωστά με, Ν μπορούμε να (1α) έχουμε

ξεδάγκεν φάσης; $\varphi_M(t) = \omega t - \frac{2\pi x_M}{\lambda}$ για $t \geq t_M$

$\varphi_N(t) = \omega t - \frac{2\pi x_N}{\lambda}$ για $t \geq t_N > t_M$

Η διαφορά φάσης των σημείων αυτών :

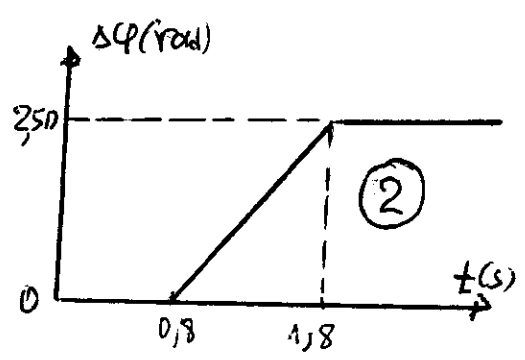
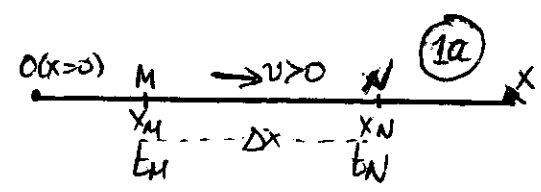
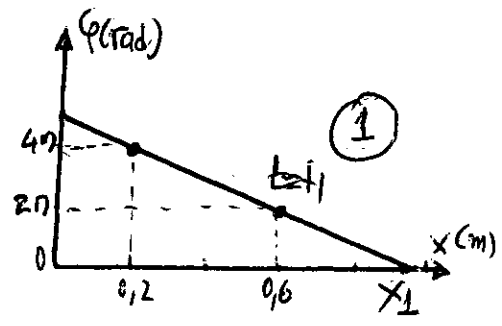
$$\Delta\varphi = \varphi_M - \varphi_N \dots \dots \text{Γίνεται} \dots \dots$$

$$\text{Για } \omega t < t_M \Rightarrow \Delta\varphi = 0$$

$$\text{Για } t_M \leq t < t_N \Rightarrow \Delta\varphi = \varphi_M - 0 = \varphi_M = \omega t - \frac{2\pi x_M}{\lambda}$$

$$\text{Για } t \geq t_N \Rightarrow \Delta\varphi = \varphi_M - \varphi_N = [\omega t - \frac{2\pi x_M}{\lambda}] - [\omega t - \frac{2\pi x_N}{\lambda}]$$

$$\Rightarrow \Delta\varphi = 2\pi \frac{x_N - x_M}{\lambda} \Rightarrow \Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} = 6\pi \text{ rad}$$



Έτσι αφού το διδραμα (2) φέρνεται ότι το Μ αρχίζει να ταλαντώνεται την $t_M = 0,85$ αρχίζει η ταλάντωση του Ν, την $t_N = 1,85$ αρχίζει η ταλάντωση του Ν αφού θα $t > 1,85$ ή διαφορετικά (αδ64) για Ν αφού Ν είναι $\Delta\varphi = 250 = 2\pi\theta$ (αδ64) $\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} \Rightarrow 250 = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} \Rightarrow \Delta x = 1,25\lambda = 1,25 \cdot 0,4 \Rightarrow \Delta x = 0,5\text{m}$

Ο χρόνος μετάβασης από το Μ $\rightarrow$ Ν είναι $\Delta t = t_N - t_M = 1\text{s}$, άρα η ταχύτητα διάδοσης είναι $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0,5\text{m}}{1\text{s}} \Rightarrow v = 0,5\text{m/s}$

$$\begin{aligned} \lambda_M = v t_M = 0,5\text{m/s} \cdot 0,85 &\Rightarrow \lambda_M = 0,4\text{m} \\ \lambda_N = v t_N = 0,5\text{m/s} \cdot 1,85 &\Rightarrow \lambda_N = 0,9\text{m} \end{aligned} \quad \left\| \begin{aligned} v = \lambda f &\Rightarrow f = \frac{v}{\lambda} = \frac{0,5\text{m/s}}{0,4\text{m}} \\ &\Rightarrow f = 1,25\text{Hz}, \omega = 2,5\text{rad/s} \end{aligned} \right.$$

Από το διδραμα (1) φαίνεται ότι το κόμμα την $t = t_1$ έχει μετατοπιστεί x_1

Επίσης από το διδραμα (1) έχουμε

$$\frac{x_1 - 0,2}{x_1 - 0,6} = \frac{4\pi}{2\pi} = 2 \Rightarrow x_1 - 0,2 = 2(x_1 - 0,6) \Rightarrow x_1 - 0,2 = 2x_1 - 1,2 \Rightarrow 1 = x_1 \Rightarrow \boxed{x_1 = 1\text{m}}$$

$$\text{άρα } t_1 = \frac{x_1}{v} = \frac{1\text{m}}{0,5\text{m/s}} \Rightarrow \boxed{t_1 = 2\text{s}}$$

5.2 Όσο να αυξάνει την χορδή ταλαντώνεται ως την ίδια συχνότητα και το ίδιο πλάτος ταλάντωσης.

Αν δηλ η χορδή κινείται ως ελατήριο την χορδή η ενέργεια αυτών είναι $\Delta E = \frac{1}{2} \Delta m \omega^2 A^2 \Rightarrow \frac{\Delta E}{\Delta m} = \frac{1}{2} \omega^2 A^2$

$$\Rightarrow 5 \cdot 10^{-2} = \frac{1}{2} (250)^2 \cdot A^2 \Rightarrow 5 \cdot 10^{-2} = \frac{1}{2} \cdot 6,25 \cdot 10^4 \cdot A^2 \Rightarrow A^2 = \frac{5 \cdot 10^{-2}}{3,125} \text{m}$$

$$\Rightarrow \boxed{A = 0,04\text{m}}$$

5.3/αδ64 μω(αδ64)

$$y(x,t) = 0,04 \sin(250t - \frac{2\pi x}{0,4}) \text{ ή } y(x,t) = 0,04 \sin(250t - 5\pi x) \text{ SI}$$

Η ενέργεια καθε στοιχειώδους κομματιού είναι $\Delta E = \frac{1}{2} \Delta m \omega^2 A^2$
 και όταν το κομμάτι έχει διαστάσεις Δx και Δy και Δz
 της ποσότητας που ονομάζεται ενέργεια είναι $m = e^* \lambda_1 = 40 \text{ g} \cdot 1 \text{ m}$

$$\Rightarrow m = 40 \text{ g} = 40 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \Rightarrow m = 0,04 \text{ kg}$$

Η ενέργεια συνολική πηγαίνει ενέργεια $E = \sum \Delta E = \int \frac{1}{2} \Delta m \omega^2 A^2$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2} \omega^2 A^2 \sum \Delta m \Rightarrow E = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = \dots \Rightarrow E = 20 \cdot 10^4$$

$$\Rightarrow \boxed{E = 2 \cdot 10^3 \text{ J}}$$

$$\Gamma.3) (OB) = (2k+1) \frac{\lambda}{4} \Rightarrow (OB) = (2 \cdot 5 + 1) \frac{0,4}{4} \Rightarrow (OB) = 1,1 \text{ m}$$

δενόμοιο
 άρα $k=5$

$$t_2 = \frac{(OB)}{v} = \frac{1,1 \text{ m}}{0,5 \text{ m/s}} \Rightarrow \boxed{t_2 = 2,2 \text{ s}}$$

$$\Gamma.4) \left. \begin{array}{l} \lambda = 5 \text{ cm} \\ \lambda = 0,4 \text{ m} = 40 \text{ cm} \end{array} \right\} \frac{\lambda}{2} = \frac{1}{8} \Rightarrow \lambda = \frac{2}{8}$$

Θετουμε το πλάτος παραλλήλων 6 cm θέτουμε

$$x = x_{\text{κοι}} \pm \frac{\lambda}{8} = x_{\text{κοι}} \pm \frac{2}{8} = k \frac{\lambda}{2} \pm \frac{2}{8}$$

$$A' = \left| 2A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \right| = \left| 2A \cos 2\pi \frac{x_{\text{κοι}} \pm \frac{\lambda}{8}}{\lambda} \right| = \left| 2A \cos 2\pi \frac{k \frac{\lambda}{2} \pm \frac{\lambda}{8}}{\lambda} \right|$$

$$\Rightarrow A' = \left| 2A \cos \left(k\pi \pm \frac{\pi}{4} \right) \right| = \left| 2A \cos \left(\pm \frac{\pi}{4} \right) \right| = \left| 2A \cos \frac{\pi}{4} \right|$$

$$\Rightarrow A = 2A \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow A' = A \sqrt{2} \text{ m} \Rightarrow \boxed{A' = 0,04 \sqrt{2} \text{ m}}$$

Θέμα Δ.

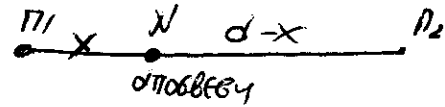
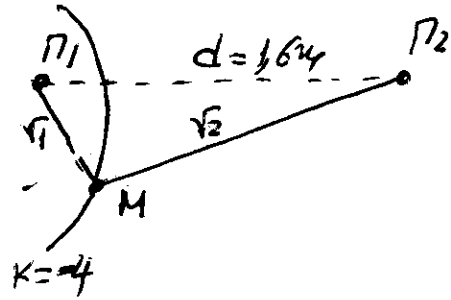
$$y_{\eta_1} = y_{\eta_2} = A \sin(100\pi t)$$

$$\omega = 100 \text{ rad/s} \Rightarrow f = 5 \text{ Hz}$$

$$\lambda = 0,4 \text{ m}$$

$$v = \lambda f = 2 \text{ m/s}$$

$$T = \frac{1}{f} \Rightarrow T = 0,2 \text{ s}$$



Δ.1) Υπόλοιπο Ν σημεία σπιδεσέσ

$$P_1 N - P_2 N = (2k+1) \lambda / 2 \Rightarrow$$

$$x - (d-x) = (2k+1) 0,2 \Rightarrow 2x - d = 0,4k + 0,2 \Rightarrow 2x - 1,6 = 0,4k + 0,2 \Rightarrow$$

$$x = 0,2k + 0,9, \text{ προφανώς } 0 \leq x \leq 1,6 \Rightarrow 0 \leq 0,2k + 0,9 \leq 1,6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -0,9 \leq 0,2k \leq 0,7 \Rightarrow -4,5 \leq k \leq 3,5 \Rightarrow k = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$$

... άρα έχουμε **8** σημεία σπιδεσέσ

Δ.2) Το Μ ανήκει στην υπερβολή σπιδεσέσ γι έ $k = -4$, ... $r_1 - r_2 = (2k+1) \lambda / 2$

$$\Rightarrow r_1 - r_2 = (2(-4)+1) \frac{0,4}{2} = -1 \cdot 0,2 = -0,2 \Rightarrow r_1 - r_2 = -0,2 \text{ ή } r_2 - r_1 = 0,2 \text{ (1)}$$

Η υπερβολή αρχίζει την $t' = 0,85$, άρα πότε φθάνει στο Μ

$$\text{το κόμμι αωδών } P_2 \dots r_2 = v t' = 2 \text{ m/s} \cdot 0,85 = 1,7 \text{ m} \Rightarrow \boxed{r_2 = 1,7 \text{ m}}$$

$$(1) \Rightarrow \boxed{r_1 = 0,2 \text{ m}}$$

Δ.3) Το κόμμι αωδών την στιγμή P_1 φθάνει στο Μ την $t_1 = \frac{r_1}{v} = \frac{0,2 \text{ m}}{2 \text{ m/s}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow t_1 = 0,1 \text{ s}$$

Το Μ έχει να φθάσει και το κόμμι αωδών την P_2 ταυτόχρονα

$$\text{γεται να χρόνο } \Delta t = t' - t_1 = 0,85 - 0,15 = 0,7 \text{ s}$$

$$\text{και συνεπώς } N = \frac{\Delta t}{T} = \frac{0,7}{0,2} = 3,5 \text{ ταξάνωσες και διατάξες}$$

$$\text{για το προπιδό } S = 3,5 \cdot 4 \text{ A} = 14 \text{ A} = \dots = 1,4 \text{ m} \Rightarrow \boxed{A = 0,1 \text{ m}}$$

Εξίσωση ταξάνωσας και ελπίσας

$$y = 0,1 \sin(100\pi t) \text{ SI}$$

Δ.4) Το Μ ελπίσας ταξάνωσας έ ε εξίσωσησας

$$y_1 = 0,1 \sin(100\pi t - \frac{2\pi r_1}{\lambda}) = 0,1 \sin(100\pi t - \frac{2\pi \cdot 0,2}{0,4}) \Rightarrow y_1 = 0,1 \sin(100\pi t - \pi)$$

$$y_2 = 0,1 \sin(100\pi t + \frac{2\pi r_2}{\lambda}) = 0,1 \sin(100\pi t + \frac{2\pi \cdot 1,7}{0,4}) \Rightarrow y_2 = 0,1 \sin(100\pi t + \frac{17\pi}{2})$$

Η συνθετή ταξάνωσας του Μ έ ε έ εξίσωσησας

$$y = y_1 + y_2 = 0,2 \sin(\frac{7\pi - \frac{17\pi}{2}}{2}) \sin(100\pi t - \frac{4,5\pi}{2} + \frac{17\pi}{2}) \Rightarrow$$

$$y = 0,26w(3,5n - \frac{\varphi_0}{2}) \text{ и } k(10n + 4,5n + \frac{\varphi_0}{7})$$

$$A_H = |0,26w(3,5n - \frac{\varphi_0}{2})| = 0,1 \Rightarrow |0,26w(3n + \frac{7}{2} - \frac{\varphi_0}{2})| = 0,1$$

$$\Rightarrow |6w(\frac{7}{2} - \frac{\varphi_0}{2})| = \frac{1}{2} \Rightarrow |4k(n - \frac{\varphi_0}{2})| = \frac{1}{2} \neq |4k(-\frac{\varphi_0}{2})| = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow |4 + \frac{\varphi_0}{2}| = \frac{1}{2} \Rightarrow 4 + \frac{\varphi_0}{2} = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\varphi_0}{2} = -4 \pm \frac{1}{2} \text{ и } \frac{\varphi_0}{2} = -4 \pm \frac{1}{2}$$

и так далее $0 < \varphi_0 \leq \pi$. Следовательно $\boxed{\varphi_0 = \pi/3}$

5^ο Κεφάλαιο αξιολογησών [Μηχανική Ρευστών] - Απαντήσεις

Θέμα Α

1-θ, 2-δ, 3-δ, 4-δ, 5(α-ε, β-λ, γ-ε, δ-λ, ε-λ)

A.1 $p = \rho g h$ ωστε το (β)

A.2 $\Delta p = \frac{F_1}{A_1}$, $F_2 = \Delta p A_2 = \frac{F_1}{A_1} A_2 = F_1 \frac{A_2}{A_1}$ ωστε το δ

A.3 $A_1 = \pi R^2$
 $A_2 = \pi r^2$ $\left\{ \frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{R}{r}\right)^2 = 4 \right.$

$\Rightarrow A_1 = 4A_2$

$\Pi = \text{σταθερή} \Rightarrow A_1 v_1 = A_2 v_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4A_2 v_1 = A_2 v_2 \Rightarrow v_2 = 4v_1$, $P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \Rightarrow P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)$

$\Rightarrow P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho[16v_1^2 - v_1^2] \Rightarrow P_1 - P_2 = 7,5\rho v_1^2$ η $P_2 - P_1 = -7,5\rho v_1^2$ η
 $P_2 = P_1 - 7,5\rho v_1^2$

Άρα η P_2 είναι μικρότερη της P_1 κατά $7,5\rho v_1^2$ ωστε το δ

A.4

$P_1 = \rho g h_1 + P_{at}$

$P_2 = \rho g h_2 + P_{at}$

$P_1 - P_2 = \rho g(h_1 - h_2) = \rho g \Delta h$

$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow P_1 + \left(\frac{\rho}{v}\right)v_1^2 = P_2 + \left(\frac{\rho}{v}\right)v_2^2 \Rightarrow P_1 - P_2 = \left(\frac{\rho}{v}\right)v_2^2 - \left(\frac{\rho}{v}\right)v_1^2 \Rightarrow \rho g \Delta h = \left(\frac{\rho}{v}\right)v_2^2 - \left(\frac{\rho}{v}\right)v_1^2$
 ωστε το (δ)

Θέμα Β

Β-1

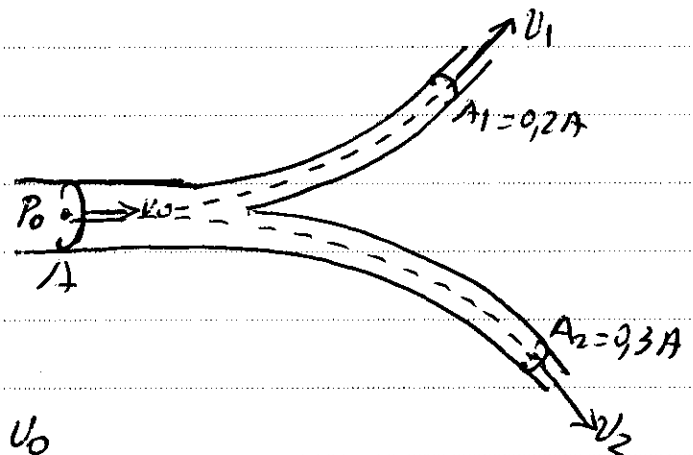
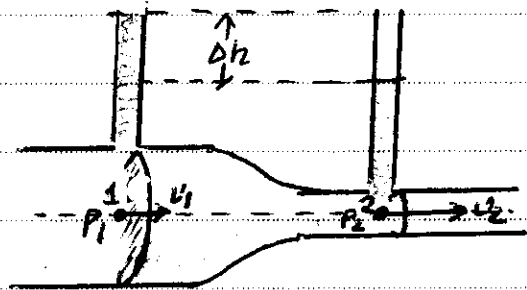
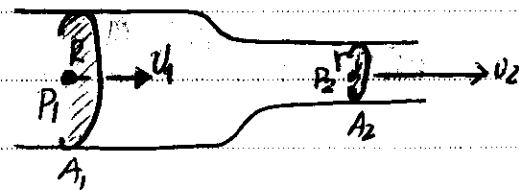
$P_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2 = P_{at} + \frac{1}{2}\rho v_1^2$
 $P_{at} + \frac{1}{2}\rho v_0^2 = P_{at} + \frac{1}{2}\rho v_2^2$ $\left\{ \Rightarrow v_1 = v_2 = v \right.$

$\Pi = \text{σταθερή} \Rightarrow A v_0 = A_1 v_1 + A_2 v_2$

$\Rightarrow A v_0 = 0,2 A v_1 + 0,3 A v_2$ $\underline{v_1 = v_2 = v}$

$\Rightarrow v_0 = 0,2 v + 0,3 v = 0,5 v \Rightarrow v = 2 v_0$

Άρα $v_1 = v_2 = 2 v_0$ σωστή η (δ)

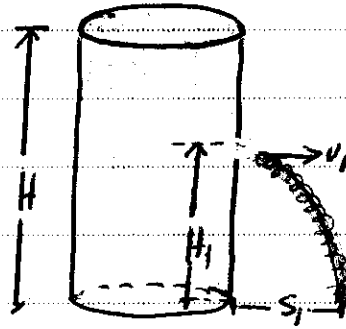


B-2

13 π ρ / π π ω γ : $H_1 = 0,55H$

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \sqrt{2g(H-H_1)} \\ t_k &= \sqrt{\frac{2H_1}{g}} \end{aligned} \right\} S_1 = v_1 t_k = \sqrt{2g(H-H_1)} \frac{2H_1}{g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_1 = 2\sqrt{H_1(H-H_1)}$$



23 π ρ / π π ω γ

$$H' = H - 0,25H = 0,75H$$

$$\left. \begin{aligned} v_1' &= \sqrt{2g(H'-H_1)} \\ t_k' &= \sqrt{\frac{2H_1}{g}} \end{aligned} \right\} \dots S_2 = 2\sqrt{H_1(H'-H_1)}$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{2\sqrt{H_1(H-H_1)}}{2\sqrt{H_1(H'-H_1)}} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{\sqrt{H-H_1}}{\sqrt{H'-H_1}} = \frac{\sqrt{H-0,55H}}{\sqrt{0,75H-0,55H}} = \frac{\sqrt{0,45}}{\sqrt{0,20}} = \sqrt{\frac{45}{20}}$$

$$\Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \sqrt{\frac{5 \cdot 9}{5 \cdot 4}} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{3}{2} \Rightarrow 3S_2 = 2S_1 \Rightarrow S_2 = \frac{2}{3}S_1$$

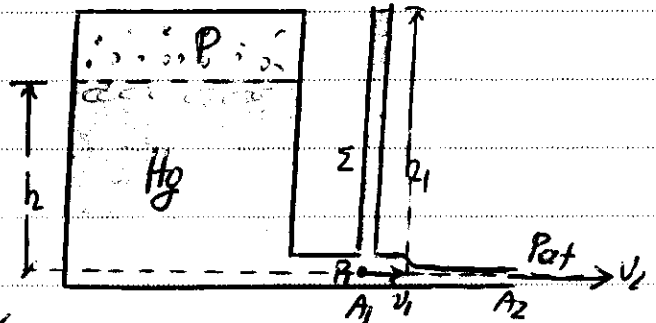
Αρα βωστή η (β)

Θέμα Γ.

$$\Gamma-1) P_{at} + \frac{1}{2} \rho v_2^2 = P_{at} + \rho g h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2(P_{at})}{\rho} + 2gh} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,272 \cdot 10^5}{13,6 \cdot 10^3} + 2 \cdot 10 \cdot 0,6} \Rightarrow v_2 = 4 \text{ m/s}$$



$$\Gamma-2) \dot{V} = A_2 v_2 = 2 \cdot 10^{-4} \cdot 4 = 8 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s} \Rightarrow \dot{V} = 8 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{10^3}{160 \text{ m/s}} \Rightarrow \dot{V} = 48 \frac{\text{L}}{\text{m/s}}$$

$$\Gamma-3) \dot{V} = \text{σταθερή} \Rightarrow A_1 v_1 = A_2 v_2 \Rightarrow 4 v_1 = 2 \cdot 4 \Rightarrow v_1 = 2 \text{ m/s}$$

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_{at} + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \Rightarrow [P_{at} + \rho g h_1] = P_{at} + \frac{1}{2} \rho [v_2^2 - v_1^2]$$

$$\Rightarrow h_1 = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} = \frac{4^2 - 2^2}{2 \cdot 10} = \frac{12}{20} \Rightarrow h_1 = 0,6 \text{ m}$$

$$P.4) P_{at} + \frac{1}{2} \rho v_2^2 = P + \rho_{Hg} g h \Rightarrow \frac{1}{2} \rho v_2^2 = P - P_{at} + \rho_{Hg} g h \quad (1)$$

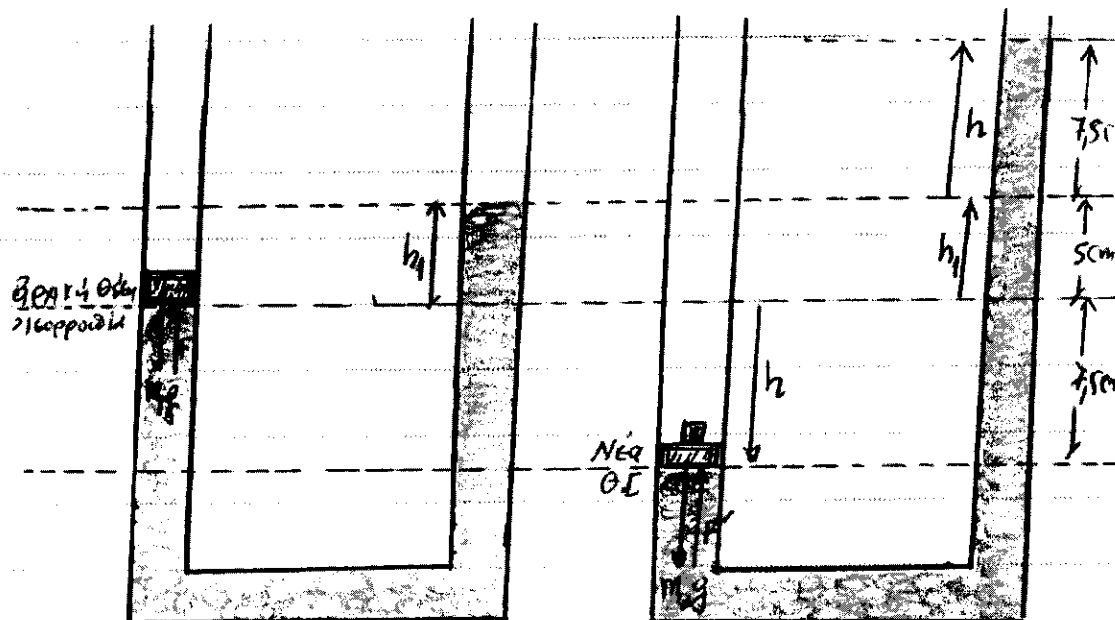
Για να υπάρχει ροή προφανώς πρέπει $v_2 > 0 \Rightarrow$

$$P - P_{at} + \rho_{Hg} g h > 0 \Rightarrow P > P_{at} - \rho_{Hg} g h \Rightarrow P > 10^5 \text{ N/m}^2 - 13,6 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 9,6$$

$$\Rightarrow P > 100 \cdot 10^3 - 8,16 \cdot 10^3 \Rightarrow P > 18,4 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2 \Rightarrow P > 0,184 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P > 0,184 \text{ atm}$$

Θέμα Δ



$$\Delta.1) \sum \vec{F}_{\text{ενέργο}} = 0 \Rightarrow m_1 g - F_{\text{πύκν}} = 0 \Rightarrow m_1 g = P A \Rightarrow m_1 g = \rho g h A \Rightarrow h_1 = \frac{m_1 g}{\rho g A}$$

$$\Rightarrow h_1 = \frac{m_1}{\rho A} = \frac{95 \text{ kg}}{10^3 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2} \Rightarrow h_1 = 0,95 \text{ m} \text{ ή } h_1 = 95 \text{ cm}$$

Σχόλιο: Στο σύστημα θάβειται και η $F_{at} = P_{at} A$... αλλά δεν გაλειώσαμε διότι θάβειται και ο αέρας δύο υγρά (θάβει) των συλλογών (πάνω & κάτω)

Δ.2) Νέα θέση ισορροπίας των βλαίων σε κατάσταση ηρεμίας

$$m_0 = 2 \text{ kg}$$

$$\sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow m_0 g = F_{\text{ηλεκ}} \Rightarrow m_0 g = e \rho (2h + h_1) A \Rightarrow m_0 = e (2h + h_1) A$$

$$\Rightarrow 2h + h_1 = \frac{m_0}{eA} \stackrel{\text{SI}}{\Rightarrow} 2h + 0,05 = \frac{2}{10^3 \cdot 10^{-2}} \Rightarrow 2h = 0,20 - 0,05 \text{ ή } h = 0,075 \text{ m ή } h = 7,5$$

Το σώμα Σ θα κινείται α.α.τ γύρω από αξονά αερίων τη θέση η έ' πλάτος $A_0 = h = 7,5 \text{ cm}$ ή $A_0 = 7,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ (γύρω άρχικε η ταχύτητα $v = 0$)

Για να δείξουμε ότι κινείται α.α.τ θεωρούμε το Σ δίπλα

το χαλκό θέση η έ' αιώνα έ'κτασης y

$$\sum \vec{F}_{\Sigma y} = m_0 \vec{g} + \vec{F}_{\text{ηλεκ}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum F_y = -m_0 g + F \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum F_y = -m_0 g + e \rho (0,20 - 2y) A$$

$$\Rightarrow \sum F_y = -20 + 10^4 (0,20 - 2y) \cdot 10^{-2}$$

$$\sum F_y = -20 + 20 - 200y$$

$$\Rightarrow \sum F_y = -200y \text{ (SI)}$$

Άρα το Σ κινείται

α.α.τ με $D = 200 \text{ N/m}$

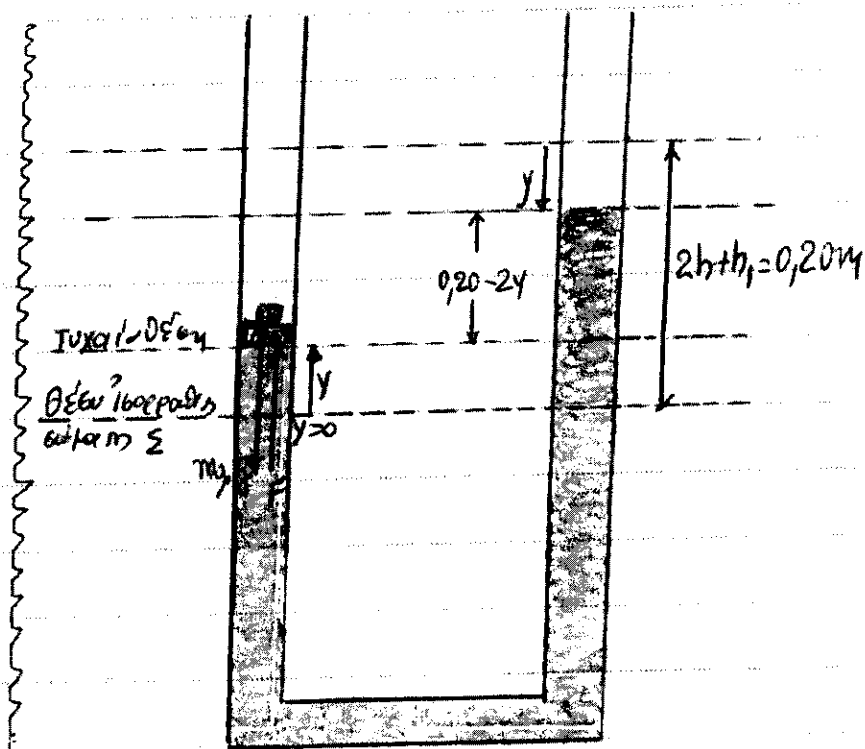
$$\Delta.3) D = m_0 \omega^2 \Rightarrow$$

$$200 = 2 \cdot \omega^2 \Rightarrow \omega = 10 \text{ rad/s}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{10} \text{ s ή } T = 0,2\pi \text{ s}$$

η άρα τα άρχικα

$$A_0 = h = 0,075 \text{ m}$$



$$\Delta.4) y = A_0 \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \text{ ή } y = A_0 \cos(\omega t) \text{ ή } y = 0,075 \sin(10t) \text{ SI}$$

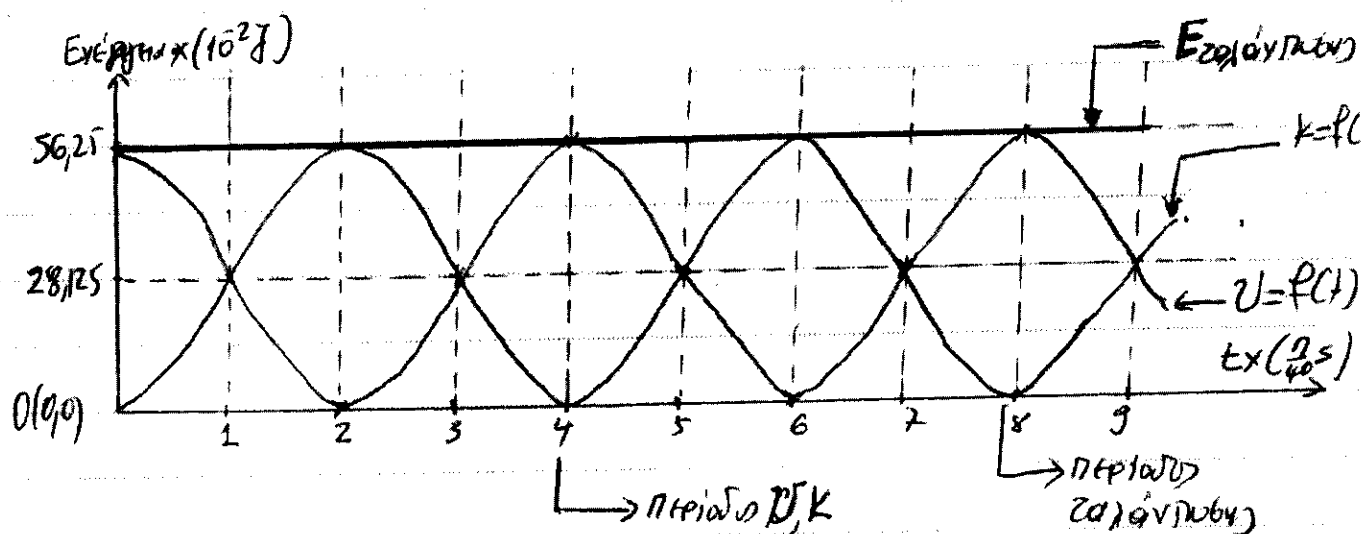
$$v = \omega A_0 \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) \text{ ή } v = 0,75 \cos(10t + \frac{\pi}{2}) \text{ ή } v = -0,75 \sin(10t) \text{ SI}$$

$$U = \frac{1}{2} D y^2 = \frac{1}{2} 200 [0,075 \cos(10t)]^2 \Rightarrow U = 56,25 \cdot 10^{-2} \cos^2(10t)$$

$$\Rightarrow U = 56,25 \cdot 10^{-2} \frac{1 + \cos(20t)}{2} \Rightarrow U = 28,125 \cdot 10^{-2} + 28,125 \cdot 10^{-2} \cos(20t) \text{ (SI)}$$

$$K = \frac{1}{2} m_0 v^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 (-0,75 \sin(10t))^2 \Rightarrow K = 56,25 \cdot 10^{-2} \sin^2(10t)$$

$$\Rightarrow K = 56,25 \cdot 10^{-2} \frac{1 - \cos(20t)}{2} \Rightarrow K = 28,125 \cdot 10^{-2} - 28,125 \cdot 10^{-2} \cos(20t) \text{ (SI)}$$



$$\text{Περίοδος ταλάντωσης: } T_{\text{ταλ}} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{10} = \frac{8\pi}{40} = 8 \frac{\pi}{40} \text{ s}$$

$$\text{Περίοδος δυναμικής κ' κινητικής ενέργειας: } T'_U = T'_K = \frac{2\pi}{20} = \frac{4\pi}{40} = 4 \frac{\pi}{40} \text{ s}$$

Θέμα Α!

1-δ, 2-δ, 3-δ, 4-β 5 (α-ε, β-1, γ-1, δ-1, ε-ε)

Θέμα Β

B-1) $K = W_F = F \Delta x + F \Delta y = F \Delta x_{cm} + F \Delta s = 2F \Delta x_{cm}$ αν εσθαι μ' M
Tυ, 4 ωδαι. Άρα βλεπεί η πρόταση (δ)

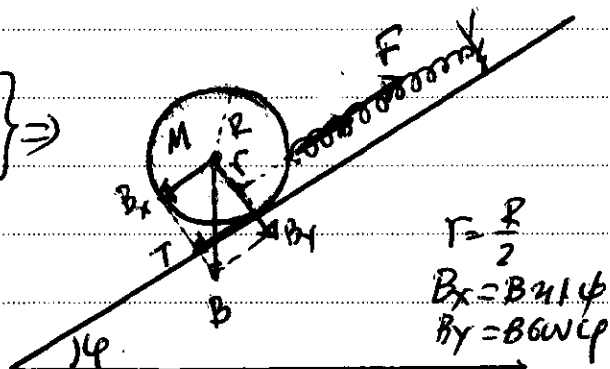
B-2)

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F = T + Mg \sin \phi$$

$$\Sigma \tau = 0 \Rightarrow F \cdot r = T R \Rightarrow F r = T \cdot 2r \Rightarrow F = 2T \Rightarrow$$

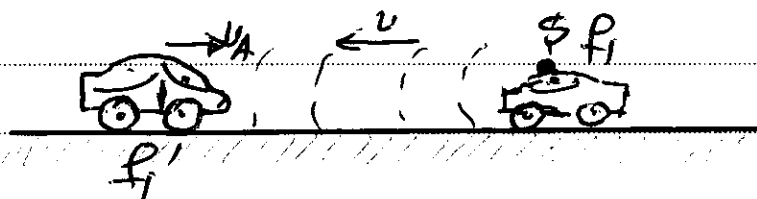
$$\Rightarrow 2T = T + Mg \sin \phi \Rightarrow T = Mg \sin \phi$$

Σωστή η πρόταση (δ)



B-3)

$$f_1' = \frac{v + v_A}{v} f_1 \quad (1)$$



$$f_2 = \frac{v}{v - v_A} f_1' \quad (1) \Rightarrow f_2 = \frac{v}{v - v_A} \cdot \frac{v + v_A}{v} f_1 \Rightarrow f_2 = \frac{v + v_A}{v - v_A} f_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_2 = \frac{v + v/10}{v - v/10} f_1 \Rightarrow f_2 = \frac{11v}{9v} f_1 \Rightarrow \frac{f_2}{f_1} = \frac{11}{9} \quad \text{Σωστή η εκδοχή (α)}$$

Θέμα Γ!

Γ1) Έστω ότι ο κύλινδρος

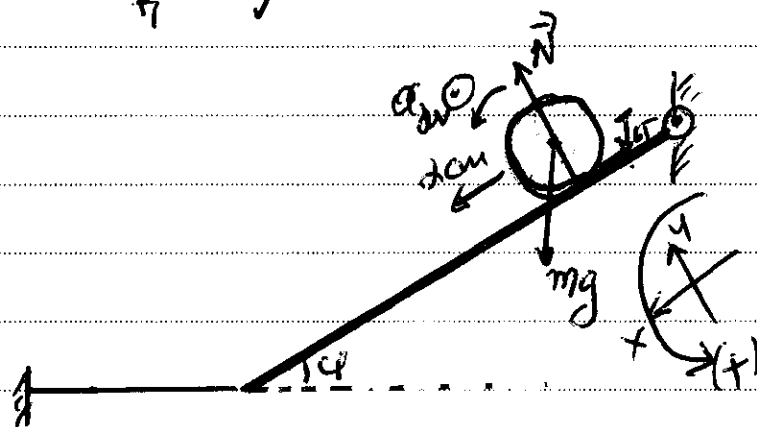
κατέρχεται κολιόβοντας

χωρίς ολίσθηση... $v_{cm} = \omega R$

$$r' \alpha_{cm} = R \omega_{\mu\omega}$$

$$\Sigma F_x = m \alpha_{cm} \Rightarrow mg \sin \phi - T = m \alpha_{cm}$$

$$\Sigma \tau = I \alpha_{\mu\omega} \Rightarrow T R = \frac{1}{2} m R^2 \frac{\alpha_{cm}}{R} \Rightarrow T = \frac{1}{2} m \alpha_{cm} \quad (1)$$



$$\Rightarrow mg \sin \phi = \frac{3}{2} m \alpha_{cm} \Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{2}{3} g \sin \phi \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow T = \frac{1}{2} m \frac{2}{3} g \sin \varphi = T = \frac{1}{3} m g \sin \varphi \leq 10 \text{ N} \Rightarrow \frac{1}{3} m g \sin \varphi \leq 10 \text{ m g} \sin \varphi$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi} \leq 3 \Rightarrow \sin \varphi \leq 3 \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow \sin \varphi \leq 1 \Rightarrow \varphi \leq 90^\circ$$

Από την ανάλυση είναι ότι την δεδομένη ταχύτητα ο κύλινδρος αφήνουν $\sin \varphi = \frac{\sin \varphi}{0,8} = \frac{0,6}{0,8} = 0,75 < 1 \Rightarrow \varphi \leq 90^\circ$

$$(2) \quad a_{cm} = \frac{2}{3} g \sin \varphi = \frac{2}{3} \cdot 10 \cdot 0,6 \Rightarrow a_{cm} = 4 \text{ m/s}^2$$

$$a_{\text{γων}} = \frac{a_{cm}}{R} \Rightarrow a_{\text{γων}} = \frac{4 \text{ m/s}^2}{0,2 \text{ m}} \Rightarrow a_{\text{γων}} = 40 \text{ rad/s}^2$$

$$(3) \quad dK_{\text{ετε}} = dW_{T_{\text{ετε}}} = T_{\text{ετε}} d\varphi = T_{\text{ετε}} ds_{\text{πτε}} = T_{\text{ετε}} dx_{cm} \Rightarrow$$

↳ κίνηση χωρίς ολίσθηση

$$\Rightarrow \frac{dK_{\text{ετε}}}{dx_{cm}} = T_{\text{ετε}} = \frac{1}{3} m g \sin \varphi \stackrel{\text{SF}}{\Rightarrow} 12 = \frac{1}{3} \cdot m \cdot 10 \cdot 0,6 \Rightarrow m = 6 \text{ kg}$$

(4) Οι δυνάμεις που δρουν στα

έκτα βαλίστα είναι

- Το βάρος $M\vec{g}$
- Η τάση των νημάτων $\vec{T}$
- Η δύναμη που δρουν $\vec{A}$
- Η δύναμη $N = mg \sin \varphi$ και $T_{\text{ετε}}$ από τον κύλινδρο.

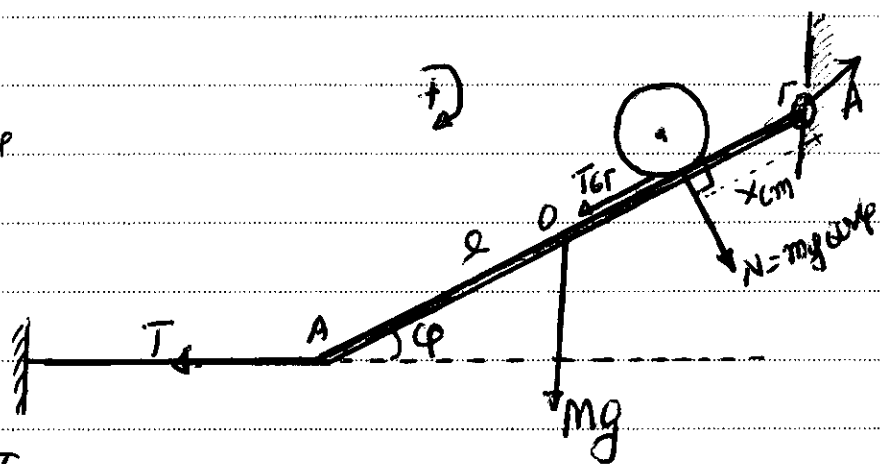
Από την βαλίστα γοερραδεί $\sum \tau = 0 \Rightarrow \tau_T + \tau_{T_{\text{ετε}}} + \tau_{Mg} + \tau_N + \tau_A = 0$

και επειδή $\tau_{T_{\text{ετε}}} = 0$, $\tau_A = 0$ προκύπτει

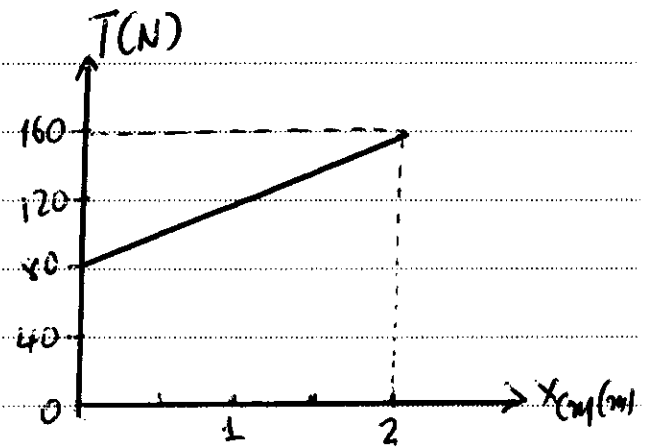
$$T \ell \sin \varphi = Mg \frac{\ell}{2} \sin \varphi + N x_{cm} \Rightarrow T \ell \sin \varphi = Mg \frac{\ell}{2} \sin \varphi + mg \sin \varphi x_{cm}$$

$$\stackrel{\text{SF}}{\Rightarrow} T \cdot 2 \cdot 0,6 = 12 \cdot 10 \cdot \frac{2}{2} \cdot 0,8 + 6 \cdot 10 \cdot 0,8 x_{cm} \Rightarrow T \cdot 1,2 = 96 + 48 x_{cm}$$

$$\Rightarrow T = 80 + 40 x_{cm} \quad | \quad 0 \leq x_{cm} \leq 2 \text{ m}$$



Προφανώς στο γα γην
υποθέτουμε να μην
πην υφίστατο τον κωλύοντα
πρέσσο $T \geq 160 \text{ N}$



Θέλα Δ.

$$\begin{aligned} \Delta_1) \quad \sum F_y = M a_{cm} &\Rightarrow F - F_1 - Mg = M a_{cm} \quad (1) \\ \Delta_1) \quad \sum \tau = I \alpha_{1, \text{γων}} &\Rightarrow F_1 R = \frac{1}{2} M R^2 \alpha_{1, \text{γων}} \\ &\Rightarrow F_1 = \frac{1}{2} M R \alpha_{1, \text{γων}} \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_2) \quad \sum F_y = 0 &\Rightarrow F_1 = Mg \quad (3) \\ \Delta_2) \quad \sum \tau = I \alpha_{2, \text{γων}} &\Rightarrow F_2 R = \frac{1}{2} M R^2 \alpha_{2, \text{γων}} \\ &\Rightarrow F_2 = \frac{1}{2} M R \alpha_{2, \text{γων}} \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2), (4) &\Rightarrow \alpha_{1, \text{γων}} = \alpha_{2, \text{γων}} (= \alpha_{\text{γων}}) \\ (3), (4) \quad Mg &= \frac{1}{2} M R \alpha_{2, \text{γων}} \Rightarrow \alpha_{2, \text{γων}} = \frac{2g}{R} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \alpha_{1, \text{γων}} = \alpha_{2, \text{γων}} = \alpha_{\text{γων}} = \frac{2 \cdot 10 \text{ m/s}^2}{0,2 \text{ m}} \Rightarrow \alpha_{1, \text{γων}} = \alpha_{2, \text{γων}} = \boxed{\alpha_{\text{γων}} = 100 \text{ rad/s}^2}$$

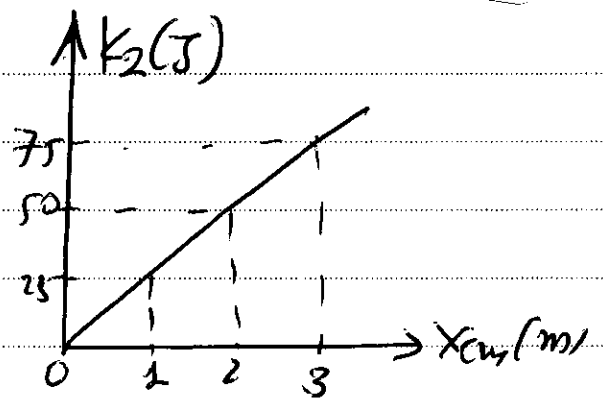
$$\begin{aligned} \Delta_2) \quad \text{Υπολογίζοντας την ταχύτητα } v \text{ για } v_N = v_A = v_B \Rightarrow v_{cm} - \omega_1 R = \omega_2 R \\ \Rightarrow v_{cm} = \omega_1 R + \omega_2 R \Rightarrow \frac{dv_{cm}}{dt} = R \frac{d\omega_1}{dt} + R \frac{d\omega_2}{dt} \Rightarrow \alpha_{cm} = R (\alpha_{1, \text{γων}} + \alpha_{2, \text{γων}}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \alpha_{cm} = 2R \alpha_{\text{γων}} \Rightarrow \alpha_{cm} = 2 \cdot 0,2 \cdot 100 \Rightarrow \boxed{\alpha_{cm} = 40 \text{ m/s}^2}$$

$$\Delta_3) \quad (3) \Rightarrow F_1 = Mg = 50 \text{ N}, \quad (1) \Rightarrow F - 50 - 50 = 5 \cdot 40 \Rightarrow \boxed{F = 300 \text{ N}}$$

$$\begin{aligned} \Delta_4) \quad K_2 &= \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} M R^2 (\alpha_{\text{γων}} t)^2 = \frac{1}{4} \cdot 5 \cdot 0,04 \cdot 100^2 \cdot t^2 = 500 t^2 \\ x_{cm} &= \frac{1}{2} \alpha_{cm} t^2 = 20 t^2 \end{aligned}$$

$$\frac{k_2}{x_{cm}} = \frac{500 \text{ t}^2}{20 \text{ t}^2} = 25 \Rightarrow k_2 = 25 \text{ N/m}$$



12 ΚΕΛΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΜΕΝΟ - ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα Α.

1-δ, 2-δ, 3-δ, 4-δ, 5 (α-1, β-1, γ-1, δ-1, ε-ε)

Θέμα Β

Β.1

$$F_{\text{ελ}} = 0 \Leftrightarrow y = -0,1 \text{ m}$$

$\rightarrow$ θέση 4.Μ

$$A = 0,3 \text{ m}$$

$$F_{\text{ελ}} = k \Delta l \Rightarrow 40 = k \cdot 0,4$$

$$\Rightarrow k = 100 \text{ N/m}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{\text{ελ}} = mg$$

$$\Rightarrow k \Delta l = mg \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 100 \cdot 0,1 = m \cdot 10$$

$$\Rightarrow m = 1 \text{ kg}$$

$$D = k = m \omega^2 \Rightarrow 100 = 1 \cdot \omega^2 \Rightarrow \omega = 10 \text{ rad/s}$$

$$a) y = A \sin(\omega t + \phi_0) \xrightarrow[y = +A]{t=0} y = 0,3 \sin(10t + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow y = 0,3 \cos(10t) \text{ (SI)}$$

$\alpha - 6 \omega 6 \text{ m}$

$$b) v = \omega A \cos(\omega t + \phi_0) \Rightarrow v = 3 \cos(10t + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow v = 3 \sin(10t + \pi) \Rightarrow v = -3 \sin(10t) \text{ (SI)}$$

$\beta - 6 \omega 6 \text{ m}$

$$g) \sum F_y = -Dy \Rightarrow \sum F_y = -100y \Rightarrow \vec{F}_{\text{ελ}} + \vec{B} = -100y \Rightarrow \vec{F}_{\text{ελ}} + 10 = -100y$$

$\alpha - 6 \omega 6 \text{ m}$

$$\Rightarrow F_{\text{ελ}} = -10 - 100y = -10 - 100 \cdot 0,3 \cos(10t) \Rightarrow$$

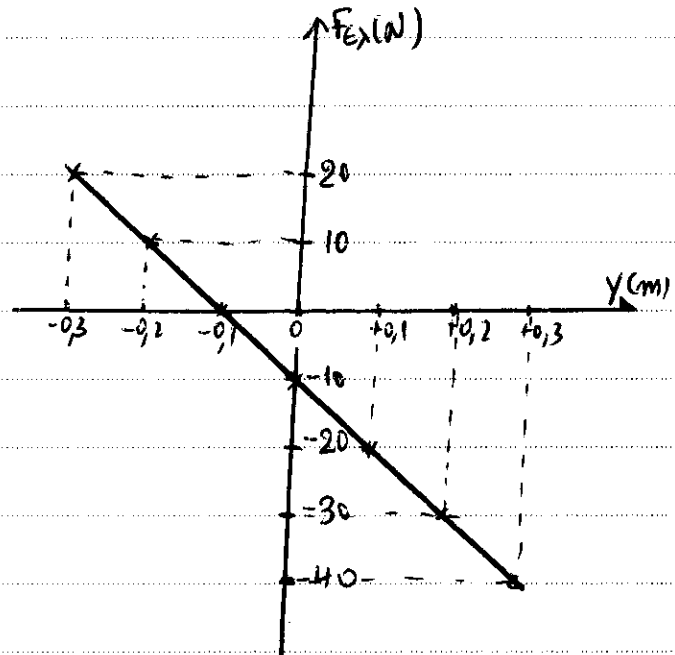
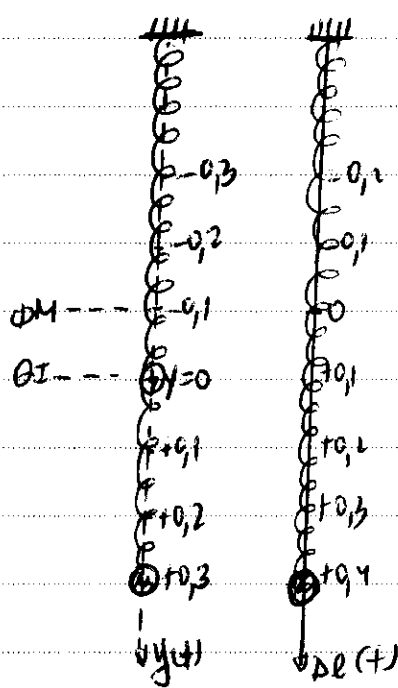
$$\Rightarrow F_{\text{ελ}} = -10 - 30 \cos(10t) \text{ (SI)} \quad \delta - 6 \omega 6 \text{ m}$$

$\alpha - 6 \omega 6 \text{ m}$

$$d) K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot [-3 \sin(10t)]^2 \Rightarrow K = 4,5 \sin^2(10t)$$

$\delta - \lambda \delta \theta \delta s$

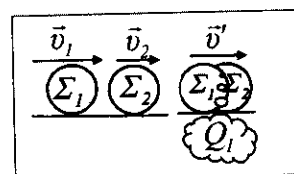
$$\alpha - \Sigma, \beta - \Sigma, \gamma - \Sigma, \delta - \Lambda$$



$$\text{B.2 } p_{\text{ολ}} = \text{σταθ} \Rightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v' \Rightarrow v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad (1)$$

$$Q = |\Delta K| \Rightarrow Q = |\Delta K| \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v'^2$$

$$\xrightarrow{(1)} Q = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2 \Rightarrow Q = c(v_1 - v_2)^2 \quad (2)$$



$$1^{\text{η}} \text{ περίπτωση: } v_1 = 3v, v_2 = v \xrightarrow{(2)} Q_1 = 4cv^2 \quad (3)$$

$$2^{\text{η}} \text{ περίπτωση: } v_1 = 3v, v_2 = -v \xrightarrow{(2)} Q_2 = 16cv^2 \quad (3) \text{ Από (3,4) } \boxed{Q_2 = 4Q_1}$$

Άρα σωστή η σχέση (γ).

$$\text{B.3 α)} v_A = at, f_A = \frac{v + v_A}{v} f_s \Rightarrow f_A = \frac{v + at}{v} f_s \Rightarrow$$

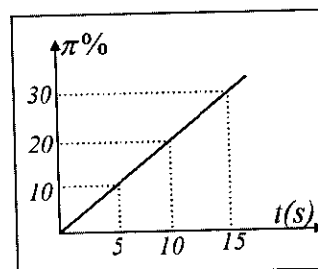
$$f_A = f_s + \frac{a}{v} f_s t \Rightarrow \frac{f_A - f_s}{f_s} = \frac{a}{v} t \quad (1) \text{ και επειδή την } t_0 = 0 \text{ η}$$

συχνότητα που λαμβάνει ο Α είναι $f_{0A} = f_s$, έχουμε:

$$\pi\% = \frac{f_A - f_{0A}}{f_{0A}} 100\% \Rightarrow \pi\% = \frac{f_A - f_s}{f_s} 100\% \xrightarrow{(1)}$$

$$\pi\% = \frac{a}{v} 100t\%. \text{ Η κλίση } k \text{ της } \pi = f(t) \text{ είναι } k = \frac{a}{v} 100 \quad (2) \text{ και από το διάγραμμα}$$

$$k = \frac{10 - 0}{5 - 0} = 2 \quad (3). \text{ Από (2) και (3) } \dots \frac{a}{v} 100 = 2 \Rightarrow \boxed{\frac{a}{v} = 0,02 \text{ s}^{-1}}$$

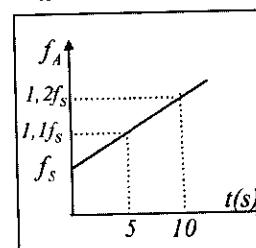


Άρα σωστή η σχέση (α.2)

β) Το πλήθος των κυμάτων που δέχεται ο παρατηρητής είναι $N_A = f_A t$, μόνο όμως αν

f_A είναι σταθερή. Τώρα που η συχνότητα λήψης αυξάνεται η συχνότητα βρίσκεται από το εμβαδόν της $f_A = f(t)$. Για χρόνο από $[0\text{s}, 5\text{s}]$ το πλήθος των κυμάτων είναι

$$N_1 = \frac{f_s + 1,1f_s}{2} 5 \Rightarrow N_1 = \frac{2,1f_s}{2} 5 \quad (4). \text{ Για χρόνο από } [5\text{s}, 10\text{s}]$$



$$\text{το πλήθος των κυμάτων είναι } N_2 = \frac{1,1f_s + 1,2f_s}{2} 5 \Rightarrow$$

$$N_1 = \frac{2,3f_s}{2} 5 \quad (5). \text{ Από τις (4) και (5) παίρνουμε... } \frac{N_2}{N_1} = \frac{23}{21}$$

$$\Rightarrow N_2 = \frac{23}{21} 2100 \Rightarrow \boxed{N_2 = 2300} \text{ άρα σωστή η σχέση (β.3)}$$

Θέμα Γ. Γ.1) $f = \frac{N}{t} = \frac{600}{60s} \Rightarrow f = 10\text{Hz}$, $\lambda = \frac{v}{f} \Rightarrow \lambda = \frac{2\text{m/s}}{10\text{Hz}} \Rightarrow \boxed{\lambda = 0,2\text{m}}$

$s = N4A_K \Rightarrow 4800 = 600 \cdot 4 \cdot A_K \Rightarrow A_K = 0,2\text{m} = 2A$, $x_\delta = (2k+1)\frac{\lambda}{4} \xrightarrow[k=4]{x_\delta=\ell}$

$\ell = (24+1)\frac{0,2}{4} \Rightarrow \boxed{\ell = 0,45\text{m}}$, Η εξίσωση του στασίμου κύματος είναι

$y(x,t) = 2A\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\eta\mu(\omega t) \Rightarrow \boxed{y(x,t) = 0,2\sin(10\pi x)\eta\mu(20\pi t)} \quad (\text{S.I})$

Γ.2) Η κοιλία της ατράκτου αυτής $x = 0,1\text{m}$ έχει εξίσωση

$y_K(t) = 0,2\sin(10\pi \cdot 0,1)\eta\mu(20\pi t) \Rightarrow y_K(t) = -0,2\eta\mu(20\pi t) \Rightarrow y_K(t) = 0,2\eta\mu(20\pi t + \pi)$.

Όλα τα σημεία αυτής της «ατράκτου» έχουν την ίδια φάση $\varphi(t) = (20\pi t + \pi)$, έτσι η εξίσωση ταλάντωσης του σημείου M θα είναι $y_M(t) = A_M\eta\mu(20\pi t + \pi) \Rightarrow$

$y_M(t) = -A_M\eta\mu(20\pi t)$ και για $t = \frac{1}{120}\text{s}$, $y_M = -0,08\text{m} \dots -0,08 = -A_M\eta\mu(20\pi \frac{1}{120}) \Rightarrow$

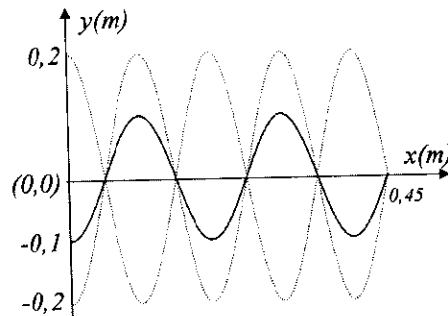
$A_M = 0,16\text{m} \Rightarrow y_M(t) = -0,16\eta\mu(20\pi t) \Rightarrow \boxed{v_M(t) = -3,2\pi\sin(20\pi t)}$

Γ.3) Η εξίσωση του στιγμιότυπου του

στάσιμου κύματος για $t = \frac{7}{120}\text{s}$ είναι

$y(x) = 0,2\sin(10\pi x)\eta\mu(20\pi \frac{7}{120}) \Rightarrow$

$y(x) = -0,1\sin(10\pi x)$ και το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος φαίνεται με την μεσαία συνεχή γραμμή στο διάγραμμα. Οι ακραίες διακεκομμένες είναι οι περιβάλλουσες των ακραίων θέσεων της χορδής.



Γ.4) Τώρα για να σχηματισθεί στάσιμο κύμα,

αφού έχουμε δεσμούς και στα δύο άκρα πρέπει το μήκος της χορδής να είναι

$\ell = N\frac{\lambda}{2} = N\frac{v}{2f} \Rightarrow f = N\frac{v}{2\lambda} \Rightarrow f = N\frac{2}{2 \cdot 0,45} \Rightarrow f = N\frac{20}{9} \quad (1) \text{ με } N \in \mathbb{Z}^+ \text{ (πλήθος}$

ατράκτων). Σύμφωνα με την άσκηση $f < 70\text{Hz} \Rightarrow N\frac{20}{9} < 70 \Rightarrow N < 32,5 \quad (2).$

Στην περίπτωση της τωρινής χορδής οι θέσεις των κοιλιών από το πρώτο άκρο της χορδής είναι $x = \frac{\lambda}{4} + k\frac{\lambda}{2} \Rightarrow x = (2k+1)\frac{\lambda}{4}$ με $(2k+1)$ ακέραιος περιττός ...και για το

σημείο Δ , $x_\Delta = (2k+1)\frac{v}{4f} \Rightarrow 0,325 = (2k+1)\frac{2}{4f} \Rightarrow f = (2k+1)\frac{2}{4 \cdot 0,325} \Rightarrow$

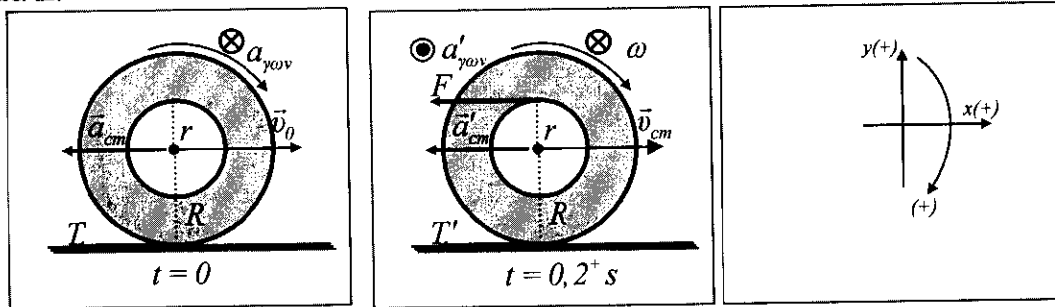
$f = (2k+1)\frac{20}{13} \quad (3).$ Από (1) και (3) παίρνουμε $\frac{N}{2k+1} = \frac{9}{13}$, άρα οι ελάχιστες τιμές

που μπορεί να πάρουν τα N και $2k+1$ είναι δεδομένου ($N = 9$, $2k+1 = 13$) και όλα τα ακέραια περιττά πολλαπλάσια αυτών. Επειδή όμως $N < 32,5$ ένα ακόμη ζεύγος τιμών είναι δυνατό το ($N = 27$, $2k+1 = 39$).

Έτσι από την (1) βρίσκουμε τις ζητούμενες δυνατές συχνότητες:

$f = N\frac{20}{9} \Rightarrow f = 9\frac{20}{9} \Rightarrow \boxed{f = 20\text{Hz}}$ $f = N\frac{20}{9} \Rightarrow f = 27\frac{20}{9} \Rightarrow \boxed{f = 60\text{Hz}}$

Θέμα Δ.



Δ.1) Την χρονική στιγμή $t = 0,2s$ η κύλιση γίνεται χωρίς ολίσθηση και τότε $v_{cm} = \omega R$, οπότε το καρούλι έχει αποκτήσει ταχύτητα $v_{cm} = 6 \cdot 0,5 = 3m/s$. Η κίνηση μέχρι τα $0,2s$ είναι επιβραδυνόμενη η μεταφορική και επιταχυνόμενη η στροφική.

$$v_{cm} = v_{0cm} - |a_{cm}|t \Rightarrow 3 = 4 - |a_{cm}|0,2 \Rightarrow |a_{cm}| = 5m/s^2 \Rightarrow a_{cm} = -5m/s^2$$

$$\omega = a_{γων}t \Rightarrow 6 = a_{γων}0,2 \Rightarrow a_{γων} = 30rad/s^2$$

$$\Sigma F_x = Ma_{cm} \Rightarrow -T = Ma_{cm} \Rightarrow T = 3000N$$

$$\Sigma \tau = Ia_{γων} \Rightarrow TR = Ia_{γων} \Rightarrow I = \frac{TR}{a_{γων}} \Rightarrow \boxed{I = 50Kgm^2}, \Sigma \tau = Ia_{γων} \Rightarrow \boxed{\Sigma \tau = 1500Nm}.$$

Η στροφορμή και η κινητική ενέργεια του κυλίνδρου την $t = 0,2s$ είναι $L_0 = I\omega \Rightarrow$

$$L_1 = 300Kgm^2/s \text{ και } K_1 = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \Rightarrow K_1 = 3600J.$$

Δ.2) Κύλιση χωρίς ολίσθηση με επιβραδυνόμενες τις δύο επιμέρους κινήσεις και με $v_{cm} = \omega R, a'_{cm} = a'_{γων}R$.

$$\Sigma F_x = Ma'_{cm} \Rightarrow -F - T = Ma'_{cm} \quad (1), \Sigma \tau = Ia'_{γων} \Rightarrow TR - Fr = I \frac{a'_{cm}}{R} \Rightarrow T - F \frac{r}{R} = I \frac{a'_{cm}}{R^2} \quad (2)$$

$$(1)+(2) \Rightarrow a_{cm} = -\frac{F(R+r)R}{MR^2 + I} \Rightarrow \boxed{a_{cm} = -0,25m/s^2} \text{ και } \boxed{a'_{γων} = -0,5rad/s^2}$$

Από την (1) ή (2) βρίσκουμε $\boxed{T = 25N}$

Δ.3) Η κινητική ενέργεια είναι $K = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{v_{cm}}{R}\right)^2$ και για

$$K = 1600J \text{ βρίσκουμε } v_{cm} = 2m/s \text{ και } \omega = 4rad/s.$$

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma \tau \omega + \Sigma F v_{cm} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = Ia'_{γων}\omega + Ma'_{cm}v_{cm} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = 50(-0,5) \cdot 4 + 400(-0,25)2 \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{dK}{dt} = -400J/s}$$

$$\Delta.4) \frac{dL}{dt} = \Sigma \tau = Ia'_{γων} \Rightarrow \frac{dL}{dt} = 50 \cdot (-0,5) = -25 \frac{Kgm^2}{s^2} = \text{σταθερή ποσότητα} \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = -25 \frac{Kgm^2}{s^2} \Rightarrow \frac{L - L_1}{t - t_1} = -25 \frac{Kgm^2}{s^2} \text{ (με } L_1 = 300Kgm^2/s \text{ και } t_1 = 0,2s) \dots$$

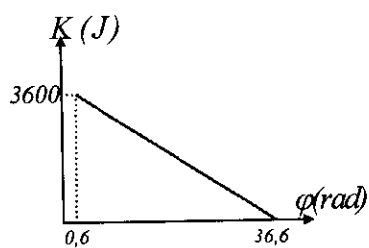
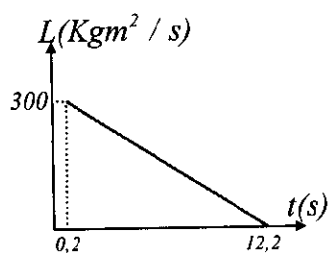
$$\boxed{L = 300 - 25(t - 0,2)} \text{ (S.I) με } \boxed{0,2s \leq t \leq 12,2s}$$

$$\Delta K = W_F + W_T \xrightarrow{W_T=0} K - K_I = -F\Delta x_{cm} - Fr\Delta\varphi \Rightarrow K - K_I = -FR\Delta\varphi - Fr\Delta\varphi \Rightarrow$$

$$K = K_I - F(R+r)\Delta\varphi \Rightarrow K = K_I - F(R+r)(\varphi - \varphi_0) \quad \mu\epsilon \quad \varphi_0 = \frac{1}{2}a_{\text{rov}}t_I^2 \Rightarrow$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{2}30 \cdot 0,2^2 = 0,6 \text{ rad} \dots K = 3600 - 125(0,5 + 0,3)(\varphi - 0,6) \Rightarrow$$

$$\boxed{K = 3600 - 100(\varphi - 0,6)} \text{ (S.I.)} \quad \mu\epsilon \quad \boxed{0,6 \text{ rad} \leq \varphi \leq 36,6 \text{ rad}}$$



2^ο ΚΕΛΗΘΕΙΟ ΑΞΙΟΠΟΘΗΚΗΣ - ΕΠΙΛΑΒΗΤΗΤΙΚΟ 2^η ΑΝΤΙΘΕΣΗ

Θέμα Α!

1-δ, 2-β, 3-δ, 4-δ, 5 (α-1, β-ε, γ-1, δ-1, ε-1)

Θέμα Β!

B.1 $f_{\text{δίσκου}} = \frac{f_0}{2} \Rightarrow \omega_{\text{δίσκου}} = \frac{\omega_0}{2}$

$F_{\text{ανατομής}} = -Dx = -m\omega^2 x$

$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{F}_{\text{δίσκου}} + \vec{F}_{\text{έν}} + \vec{F}_{\text{έν}} = m\vec{a}$

$\Rightarrow \underbrace{F_{\text{δίσκου}} + F_{\text{έν}} + F_{\text{έν}}}_{\text{από το άρτιο}} = -m\omega_{\text{δίσκου}}^2 x = -m\frac{\omega_0^2}{4} x$

$\Rightarrow F_{\text{δίσκου}} + F_{\text{έν}} + F_{\text{έν}} = \frac{F_{\text{έν}}}{4}$

Φαρά

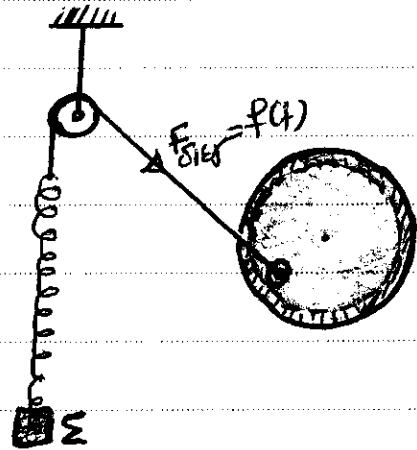
ΘΕΒΗ
 $F_{\text{από το άρτιο}} = -bV = 0$

γέρ

$\Rightarrow F_{\text{δίσκου}} = \frac{3}{4} F_{\text{έν}}$

$F_{\text{δίσκου}} + F_{\text{έν}} = \frac{F_{\text{έν}}}{4} \Rightarrow F_{\text{δίσκου}} = -\frac{3}{4} F_{\text{έν}}$

Αρα βλέπουμε το (δ)



B.2. Ο πυθμός γενεαλογίας της σφαιρικής δύναμης γενεαλογίας
3^η γενεαλογίας γενεαλογίας

$\frac{dE}{dt} = \frac{dW_{\text{από}}}{dt} = \frac{F_{\text{από}} dx}{dt} = F_{\text{από}} \cdot v = -bV \cdot V = -bV^2$ και ο πυθμός
γενεαλογίας $\left| \frac{dE}{dt} \right| = bV^2$

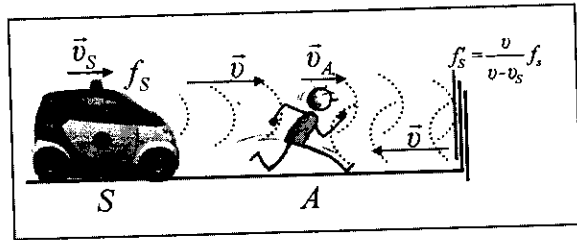
1^η γενεαλογίας $\left| \frac{dE}{dt} \right| = bV_1^2 = 1,6 \text{ (στ)}$

2^η γενεαλογίας $\left| \frac{dE}{dt} \right| = bV_2^2 = 0,1 \text{ (στ)}$ $\int \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^2 = \frac{1,6}{0,1} = 16$

$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = 4 \Rightarrow V_1 = 4V_2 \text{ ή } V_2 = \frac{V_1}{4} \text{ ή } V_2 = 0,25V_1$

Αρα βλέπουμε η σχέση (δ)

B.3) Ο τοίχος λειτουργεί ως ακίνητη δευτερογενής πηγή κυμάτων με συχνότητα εκπομπής ίση με την συχνότητα λήψης από έναν ακίνητο υποθετικό παρατηρητή που είναι πάνω στον τοίχο, $f'_S = f'_A = \frac{v}{v-v_S} f_S$. Ο



παρατηρητής Α λαμβάνει κύματα απευθείας από την πηγή με συχνότητα $f_A = \frac{v-v_A}{v-v_S} f_S$ (1) και από ανάκλαση $f'_A = \frac{v+v_A}{v} f'_S \Rightarrow f'_A = \frac{v+v_A}{v} \frac{v}{v-v_S} f_S$

$\Rightarrow f'_A = \frac{v+v_A}{v-v_S} f_S$ (2). Από τις (1) και (2) αν θέσουμε $v_A = \frac{v}{40}$ βρίσκουμε $\frac{f_A}{f'_A} = \frac{39}{41}$

που μας δείχνει ότι οι αρμονικοί ήχοι που δέχεται ο Α έχουν παραπλήσιες συχνότητες. Έτσι η μεμβράνη του τυμπάνου του αυτιού του εκτελεί σύνθετη ταλάντωση – διακρότημα με συχνότητα $\bar{f} = \frac{f_A + f'_A}{2}$ και συχνότητα διακροτήματος

$f_\delta = f'_A - f_A$. Σε μια περίοδο διακροτήματος θα δέχεται πλήθος ταλαντώσεων

$$N = \bar{f} T_\delta \Rightarrow N = \frac{f_A + f'_A}{2} \frac{1}{f'_A - f_A} \Rightarrow N = \frac{f_A + \frac{41}{39} f_A}{2 \left(\frac{41}{39} f_A - f_A \right)} \Rightarrow \boxed{N = 20 \text{ ταλαντώσεις}},$$

άρα σωστή η σχέση (β).

Θέμα Γ':

Γ.1) $\Pi_1 M - \Pi_2 M = k\lambda \Rightarrow (\ell + r) - r = k\lambda \Rightarrow$

$$\ell = k\lambda \Rightarrow k = \frac{\ell}{\lambda} \Rightarrow k = \frac{1,5}{\lambda} \text{ με τον } k \text{ να}$$

παίρνει ακέραιες τιμές. Η μόνη τιμή του λ που δίνει k ακέραιο είναι $\boxed{\lambda = 0,30m}$.

Γ.2) $k = \frac{1,5}{\lambda} = \frac{1,5}{0,30} = 5$, άρα από το Π_2

διέρχεται ο κροσσός ενίσχυσης με $k=5$ (είναι εκφυλισμένος σε ημιευθεία $\Pi_2 x$). Μεταξύ μεσοκάθετου της $\Pi_1 \Pi_2$ και Π_2 υπάρχουν 5 συνολικά κροσσοί ενίσχυσης (η $k=0$ είναι η μεσοκάθετος και η $k=5$ ημιευθεία και οι $k=1,2,3,4$ υπερβολές). Το Ν ανήκει στην $k=3$ υπερβολή ενίσχυσης, οπότε $\Pi_1 N - \Pi_2 N = 3\lambda \Rightarrow r_1 - r_2 = 3\lambda \Rightarrow$

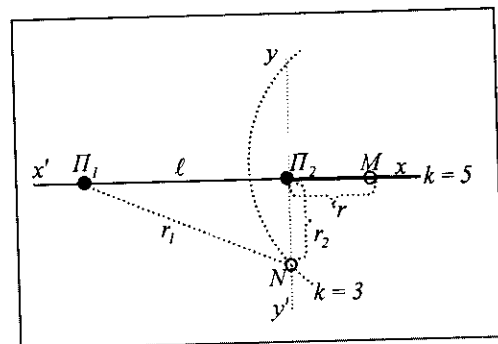
$$\sqrt{\ell^2 - r_2^2} - r_2 = 3,0,3 \Rightarrow \boxed{r_2 = 0,8m} \dots r_1 = \sqrt{\ell^2 + r_2^2} = 1,7m \dots f = \frac{v}{\lambda} = \frac{20}{3} \text{ Hz} \dots$$

$$T = 0,15s \dots \omega = \frac{40\pi}{3} \text{ rad/s}$$

Γ.3) Τα κύματα από τις πηγές Π_1 και Π_2 φθάνουν στο Ν τις χρονικές στιγμές

$$t_1 = \frac{r_1}{v} = 0,85s \text{ και } t_2 = \frac{r_2}{v} = 0,40s.$$

Για $0 \leq t < 0,40s$ δεν έχει φθάσει κανένα κύμα στο Ν και αυτό είναι ακίνητο $y_N(t) = 0$

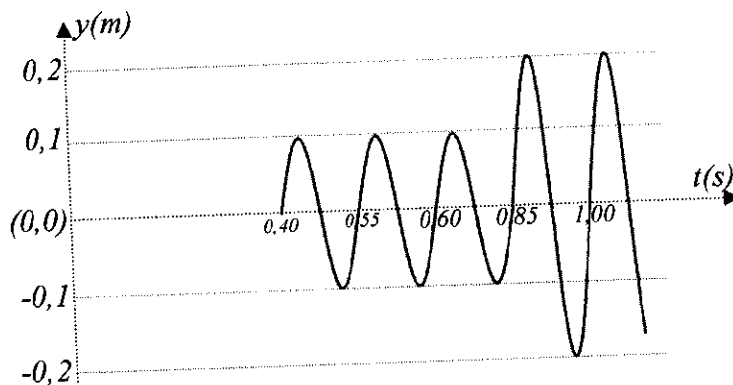
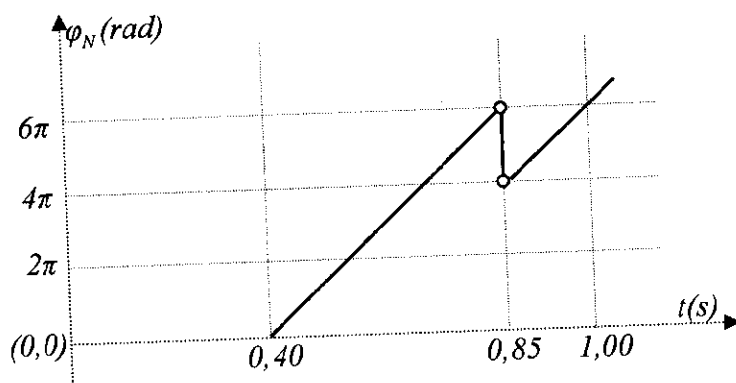


Για $0,40 \leq t < 0,85$ στο Ν έχει φθάσει μόνο το κύμα από την πηγή Π2 και η εξίσωση ταλάντωσής του είναι $y_N(t) = A\eta\mu(\omega t - \frac{2\pi r_2}{\lambda}) \Rightarrow y_N(t) = 0,1\eta\mu(\frac{40\pi}{3}t - \frac{16\pi}{3})$ S.I

Για $t \geq 0,85$ στο Ν έχουν φθάσει και τα δύο κύματα και έχουμε συμβολή, η δε εξίσωση ταλάντωσής του είναι $y_N(t) = 2A\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{r_1 - r_2}{2\lambda}\right)\eta\mu\left(\omega t - \frac{2\pi(r_1 + r_2)}{2\lambda}\right)$

$$\Rightarrow y_N(t) = -0,2\eta\mu\left(\frac{40\pi}{3}t - \frac{25\pi}{3}\right) \Rightarrow y_N(t) = 0,2\eta\mu\left(\frac{40\pi}{3}t - \frac{25\pi}{3} + \pi\right) \Rightarrow$$

$y_N(t) = 0,2\eta\mu\left(\frac{40\pi}{3}t - \frac{22\pi}{3}\right)$. Οι ζητούμενες γραφικές παραστάσεις αποδίδονται στα διαγράμματα...



Γ.4) Οι εξισώσεις των πηγών τώρα είναι $y_1(t) = 0,1\eta\mu(\frac{40\pi}{3}t)$ και

$$y_2(t) = 0,1\eta\mu\left(\frac{40\pi}{3}(t - 0,05)\right) \Rightarrow y_2(t) = 0,1\eta\mu\left(\frac{40\pi t}{3} - \frac{2\pi}{3}\right) \text{ και οι εξισώσεις}$$

$$\text{ταλάντωσης του σημείου Ν: } y_{1N}(t) = 0,1\eta\mu\left(\frac{40\pi}{3}t - \frac{2\pi r_1}{\lambda}\right) \Rightarrow$$

$$y_{1N}(t) = 0,1\eta\mu\left(\frac{40\pi}{3}t - \frac{34\pi}{3}\right), \quad y_{2N}(t) = 0,1\eta\mu\left(\frac{40\pi}{3}t - \frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi r_2}{\lambda}\right) \Rightarrow$$

$$y_{2N}(t) = 0,1\eta\mu\left(\frac{40\pi}{3}t - \frac{18\pi}{3}\right). \text{ Παρατηρούμε ότι το σημείο Ν εκτελεί σύνθετη}$$

ταλάντωση με τις επιμέρους ταλαντώσεις να έχουν την ίδια συχνότητα, ίδια διεύθυνση, ίδιο κέντρο ταλάντωσης, πλάτη $A_1 = A_2 = 0,1m$ και διαφορά φάσης

$$\Delta\varphi = \left(\frac{40\pi}{3}t - \frac{18\pi}{3}\right) - \left(\frac{40\pi}{3}t - \frac{34\pi}{3}\right) \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{16\pi}{3} \Rightarrow \Delta\varphi = 5\pi + \frac{\pi}{3}. \text{ Έτσι το Ν θα έχει}$$

$$\text{πλάτος ταλάντωσης } A_N = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi} \Rightarrow$$

$$A_N = \sqrt{0,1^2 + 0,1^2 + 2 \cdot 0,1 \cdot 0,1(-\frac{1}{2})} \Rightarrow \boxed{A_N = 0,1m}$$

Θέμα Δ':

Δ.1) Ισορροπία ράβδου-σφαιριδίου: $\Sigma\tau_{(O)} = 0 \Rightarrow$

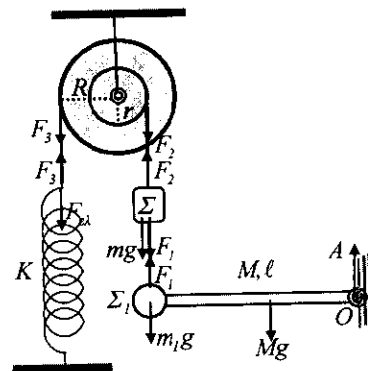
$$F_l \ell = m_l g \ell + Mg \frac{\ell}{2} \Rightarrow F_l = 7,5N$$

Ισορροπία σώματος $\Sigma: \Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_2 = mg + F_l$

Ισορροπία τροχαλίας: $\Sigma\tau = 0 \Rightarrow F_2 r = F_3 R \Rightarrow$

$$\frac{F_3 = F_{el}}{R=2r} \rightarrow mg + F_l = 2F_{el} \Rightarrow F_{el} = \frac{mg + F_l}{2} \quad (1) \Rightarrow$$

$$\boxed{F_{el} = 13,75N}$$



Δ.2) Μελετάμε την κίνηση του σφαιριδίου τοποθετώντας δυνάμεις. Οι ασκούμενες δυνάμεις είναι το βάρος του $m_l \vec{g}$

και η δύναμη $\vec{F}$ από τη ράβδο. Επειδή η κίνηση του σφαιριδίου ως υλικού σημείου είναι κυκλική με κέντρο το O

και ακτίνα ℓ αναλύουμε την δύναμη $\vec{F}$ σε δύο συνιστώσες, μία ακτινική την $\vec{F}_k$ και

μία εφαπτομενική την $\vec{F}_e$. $\Sigma\vec{F}_k = m_l \vec{a}_k \Rightarrow F_k = m_l \omega^2 \ell \xrightarrow{\omega=0} F_k = 0$,

$$\Sigma\vec{F}_e = m_l \vec{a}_e \Rightarrow m_l g - F_e = m_l \ell a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow F_e = m_l (g - \ell a_{\gamma\omega\nu})$$

Υπολογισμός της ροπής αδράνειας και της γωνιακής επιτάχυνσης του συστήματος:

$$I = \frac{1}{3} M \ell^2 + m_l g \ell^2 \Rightarrow I = \frac{2}{3} Kgm^2, \Sigma\tau_{(O)} = I a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow m_l g \ell + Mg \frac{\ell}{2} = I a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow$$

$$a_{\gamma\omega\nu} = 11,25 \text{ rad} / s^2.$$

Με αντικατάσταση στην $F_e = m_l (g - \ell a_{\gamma\omega\nu})$ παίρνουμε $F_e = -0,625N$. Άρα η δύναμη $\vec{F}$ είναι $\vec{F} = \vec{F}_k + \vec{F}_e = \vec{F}_e \Rightarrow \boxed{F = 0,625N}$ με φορά αντίθετη από αυτή που είναι στο σχήμα.

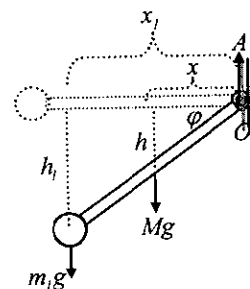
Δ.3) Στην θέση αυτή της ράβδου ας υπολογίσουμε την γωνιακή επιτάχυνση και την γωνιακή ταχύτητα. $\Sigma\tau_{(O)} = I a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow m_l g x_l + Mg x = I a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow$

$$m_l g \ell \sin\varphi + Mg \frac{\ell}{2} \sin\varphi = I a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = 10,35 \text{ rad} / s^2$$

$$\Delta K = W_{m_l g} + W_{Mg} \Rightarrow \frac{1}{2} I \omega^2 = m_l g h_l + M g h \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} I \omega^2 = m_l g \ell \eta \mu\varphi + M g \frac{\ell}{2} \eta \mu\varphi \Rightarrow \omega = 3 \text{ rad} / s$$

Ρυθμός μεταβολής κινητικής ενέργειας στη ράβδο:



$$\frac{dK_p}{dt} = \Sigma \tau_{\rho\alpha\beta\delta\omega} \Rightarrow \frac{dK_p}{dt} = I_{\rho\alpha\beta\delta\omega} \alpha_{\gamma\omega\omega} \Rightarrow \frac{dK_p}{dt} = \frac{1}{3} M \ell^2 \alpha_{\gamma\omega\omega} \omega$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dK_p}{dt} = 5,175 \text{ J/s}}$$

$$\dots \text{ και διαφορετικά } \dots K_p = \frac{1}{2} I_p \omega^2 \Rightarrow \frac{dK_p}{dt} = \frac{d(\frac{1}{2} I_p \omega^2)}{dt} \Rightarrow \frac{dK_p}{dt} = \frac{1}{2} I_p \frac{d(\omega^2)}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{dK_p}{dt} = \frac{1}{2} I_p 2\omega \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \frac{dK_p}{dt} = I_p \omega \alpha_{\gamma\omega\omega} \Rightarrow \frac{dK_p}{dt} = I_p \alpha_{\gamma\omega\omega} \omega \dots$$

Σχόλιο: Εδώ υπάρχει μεγάλη πιθανότητα λάθους αν στην σχέση $\frac{dK_p}{dt} = \Sigma \tau_{\rho\alpha\beta\delta\omega}$

λάβουμε ως μοναδική ροπή μόνο την ροπή του βάρους της ράβδου ενώ υπάρχει και η ροπή της δύναμης που δέχεται η ράβδος από το σφαιρίδιο.
Ρυθμός μεταβολής κινητικής ενέργειας στο σφαιρίδιο:

$$\frac{dK_{\Sigma_l}}{dt} = \Sigma \tau_{\Sigma_l} \omega \Rightarrow \frac{dK_{\Sigma_l}}{dt} = I_{\Sigma_l} \alpha_{\gamma\omega\omega} \omega \Rightarrow \frac{dK_{\Sigma_l}}{dt} = m_l \ell^2 \alpha_{\gamma\omega\omega} \omega \Rightarrow \boxed{\frac{dK_{\Sigma_l}}{dt} = 15,525 \frac{\text{J}}{\text{s}}}$$

$$\text{και διαφορετικά } \dots K_{\Sigma_l} = \frac{1}{2} m_l v^2 \Rightarrow K_{\Sigma_l} = \frac{1}{2} m_l \omega^2 \ell^2 \Rightarrow K_{\Sigma_l} = \frac{1}{2} m_l \ell^2 \omega^2 \Rightarrow$$

$$\frac{dK_{\Sigma_l}}{dt} = \frac{d(\frac{1}{2} m_l \ell^2 \omega^2)}{dt} \Rightarrow \frac{dK_{\Sigma_l}}{dt} = \frac{1}{2} m_l \ell^2 \frac{d(\omega^2)}{dt} \Rightarrow \frac{dK_{\Sigma_l}}{dt} = \frac{1}{2} m_l \ell^2 2\omega \frac{d\omega}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dK_{\Sigma_l}}{dt} = m_l \ell^2 \alpha_{\gamma\omega\omega} \omega \dots$$

Δ.4) Αρχική παρατήρηση: Αν το σώμα Σ κατεβεί κατά y τότε το ελατήριο επιμηκύνεται επί πλέον κατά $\Delta \ell$ έτσι ώστε: $y = \Delta s_1 = r \Delta \varphi$ και $\Delta \ell = \Delta s_2 = R \Delta \varphi$

$$\xrightarrow{R=2r} \Delta \ell = 2y.$$

Στη θέση ισορροπίας του ταλαντωτή Σ έστω ότι το ελατήριο είναι παραμορφωμένο κατά $\Delta \ell_0$.

$$\text{Ισορροπία ταλαντωτή } \Sigma: \Sigma F_y = 0 \Rightarrow F = mg$$

$$\text{Ισορροπία τροχαλίας: } \Sigma \tau = 0 \Rightarrow Fr = F'R$$

$$\xrightarrow{\frac{F' = F \ell}{R=2r}} mg = 2F_{\ell} \Rightarrow mg = 2K \Delta \ell_0 \quad (2).$$

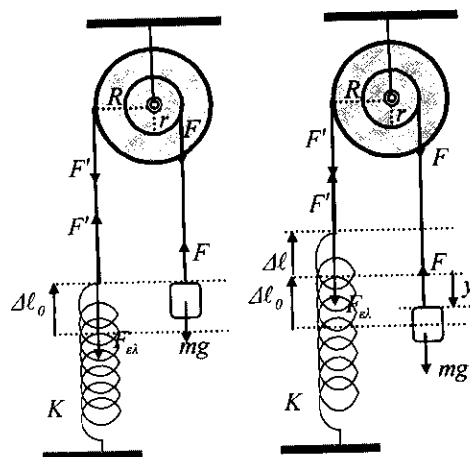
Θεωρούμε τον ταλαντωτή Σ σε μια τυχαία απομάκρυνση $y > 0$ και έστω ότι έχει και θετική φορά κίνησης... (προς τα κάτω).

$$\text{Ταλαντωτής: } \Sigma \vec{F}_y = m \vec{a}_\Sigma \Rightarrow mg - F = m a_\Sigma \quad (3)$$

Η επιτάχυνση a_Σ και $a_{\gamma\omega\omega}$ της τροχαλίας συνδέονται με την σχέση $a_\Sigma = r a_{\gamma\omega\omega} \dots$

$$\text{Τροχαλία: } \Sigma \tau = I a_{\gamma\omega\omega} \Rightarrow Fr - F'R = I a_{\gamma\omega\omega} \Rightarrow$$

$$Fr - F'2r = I \frac{a_\Sigma}{r} \Rightarrow F - 2F' = I \frac{a_\Sigma}{r^2}$$



$$\overrightarrow{F' = F \varepsilon \lambda = K(\Delta \ell_0 + \Delta \ell)} \rightarrow$$

$$F - 2K(\Delta \ell_0 + \Delta \ell) = I \frac{a_\Sigma}{r^2} \quad (4), \dots (3) + (4) \Rightarrow mg - 2K\Delta \ell_0 - 2K\Delta \ell = ma_\Sigma + I \frac{a_\Sigma}{r^2} \xrightarrow{(2)}$$

$$-2K\Delta \ell = ma_\Sigma + I \frac{a_\Sigma}{r^2} \xrightarrow{\Delta \ell = 2y} -4Ky = \frac{mr^2 + I}{r^2} a_\Sigma \Rightarrow a_\Sigma = -\frac{4Kr^2}{mr^2 + I} y$$

Για την δύναμη που ασκείται στον ταλαντωτή Σ έχουμε $\Sigma F_y = ma_\Sigma \Rightarrow$

$$\Sigma F_y = -\frac{4Kmr^2}{mr^2 + I} y, \text{ άρα το σώμα Σ εκτελεί απλή αρμονική με σταθερά επαναφοράς}$$

$$D = \frac{4Kmr^2}{mr^2 + I} \Rightarrow \boxed{D = 50 \text{ N} / \text{m}}$$

$$\text{Η κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης είναι } D = m\omega_{\text{ταλ}}^2 \Rightarrow \omega_{\text{ταλ}} = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_{\text{ταλ}} = 5 \text{ rad} / \text{s}}$$

Στη θέση ισορροπίας του ταλαντωτή το ελατήριο είναι τεντωμένο – όπως φαίνεται

από την σχέση (2) -κατά $\Delta \ell_0 = \frac{mg}{2K}$. Μόλις κόπηκε το νήμα το ελατήριο είχε

επιμήκυνση - όπως φαίνεται από την σχέση (1) – κατά $\Delta \ell = \frac{mg + F_l}{2K}$. Αντίστοιχα το σώμα μόλις κόπηκε το νήμα απείχε από το την θέση ισορροπίας του απόσταση όσο το πλάτος A της ταλάντωσης του, για το οποίο ισχύει $2A = \Delta \ell - \Delta \ell_0 \Rightarrow A = \frac{\Delta \ell - \Delta \ell_0}{2} \Rightarrow$

$$A = \frac{F_l}{4K} \Rightarrow \boxed{A = 0,05 \text{ m}}$$

Δ.5) Η μέγιστη ταχύτητα του ταλαντωτή είναι $v_{\text{max}} = \omega_{\text{ταλ}} A \Rightarrow v_{\text{max}} = 0,25 \text{ m} / \text{s}$.

$$v_{\text{ταλαντωτή}} = v_{\text{γραμμική}} = \omega_{\text{τροχ}} r \Rightarrow v_{\text{max, ταλ}} = \omega_{\text{τροχ, max}} r \Rightarrow \omega_{\text{τροχ, max}} = 2,5 \text{ rad} / \text{s}.$$

Η μέγιστη κινητική ενέργεια της τροχαλίας είναι: $K_{\text{max}} = \frac{1}{2} I \omega_{\text{τροχ, max}}^2 \Rightarrow$

$$\boxed{K_{\text{max}} = 0,125 \text{ J}}$$