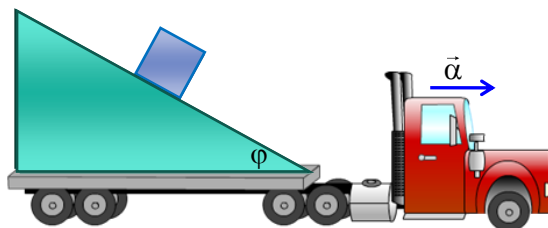


Η ισορροπία σώματος σε οριζόντια επιταχυνόμενο κεκλιμένο επίπεδο

Στην καρότσα ενός φορτηγού αυτοκινήτου που κινείται οριζόντια με σταθερή επιτάχυνση $\vec{a}$ υπάρχει στερεωμένη μια σφήνα κατακόρυφης τομής ορθογωνίου τριγώνου με γωνία κλίσης $\varphi = 30,96^\circ$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Πάνω στη σφήνα αφήνουμε ένα



σώμα που παρουσιάζει με τη σφήνα συντελεστή στατικής τριβής $\mu=0,5$. Να βρείτε,

α. για ποια περιοχή τιμών πρέπει να βρίσκεται η επιτάχυνση $\vec{a}$ του αυτοκινήτου ώστε το σώμα να ηρεμεί ως προς την σφήνα;

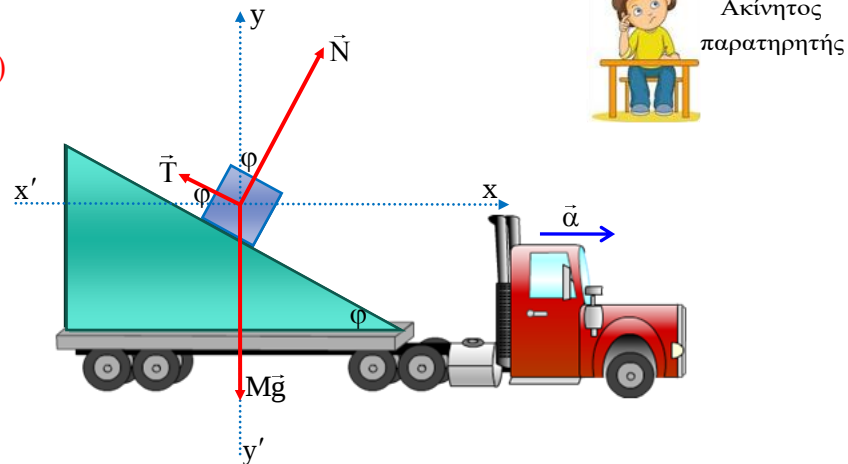
β. για ποια επιτάχυνση η στατική τριβή μεταξύ σώματος και σφήνας έχει μηδενική τιμή.

Δίνονται $g=9,8\text{m/s}^2$, $\text{ef}30,96^\circ=0,6$ και το σώμα να θεωρηθεί ως σώμα αμελητέων διαστάσεων.

γ. Αν το σώμα ήταν ομογενής κύβος να βρείτε για ποια περιοχή τιμών της επιτάχυνση $\vec{a}$ του αυτοκινήτου το σώμα ηρεμεί και δεν ανατρέπεται ως προς την σφήνα;

Απάντηση

Σχήμα : (1)



Το κιβώτιο που για την άσκηση θεωρείται υλικό σημείο [και συνεπώς αγνοείται η δυνατότητα ανατροπής] μόλις αφήνεται στην επιταχυνόμενη σφήνα έχει τάση ολίσθησης κατά μήκος αυτής, αλλά λόγω στατικής τριβής εμποδίζεται προς τούτο.

1η περίπτωση: Έστω ότι η τάση ολίσθησης είναι προς τα κάτω, οπότε η στατική τριβή είναι προς τα πάνω όπως φαίνεται στο σχήμα (1). Για αδρανειακό ακίνητο παρατηρητή το σώμα στο άξονα $x'x$ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση και στον άξονα $y'y$ ισορροπεί ... και ο παρατηρητής αυτός γράφει:

$$\Sigma \vec{F}_x = M\vec{a} \Rightarrow N\eta\mu\varphi - T\sigma\upsilon\nu\varphi = M\alpha \quad (1) \quad \text{και} \quad \Sigma \vec{F}_y = 0 \Rightarrow N\sigma\upsilon\nu\varphi + T\eta\mu\varphi = Mg \quad (2) \quad \text{Από (1) και}$$

$$(2) \text{ έχουμε } \begin{cases} N\eta\mu\varphi = T\sigma\upsilon\nu\varphi + M\alpha \\ N\sigma\upsilon\nu\varphi = Mg - T\eta\mu\varphi \end{cases} \Rightarrow \frac{\eta\mu\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi} = \frac{T\sigma\upsilon\nu\varphi + M\alpha}{Mg - T\eta\mu\varphi} \Rightarrow$$

$$Mg\eta\mu\varphi - T\eta\mu^2\varphi = T\sigma\upsilon\nu^2\varphi + M\alpha\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow T\sigma\upsilon\nu^2\varphi + T\eta\mu^2\varphi = Mg\eta\mu\varphi - M\alpha\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow T = Mg\eta\mu\varphi - M\alpha\sigma\upsilon\nu\varphi \quad (2)$$

$$\text{Επίσης από (1) και (2) έχουμε } \begin{cases} T\sigma\upsilon\nu\varphi = N\eta\mu\varphi - M\alpha \\ T\eta\mu\varphi = Mg - N\sigma\upsilon\nu\varphi \end{cases} \Rightarrow \frac{\sigma\upsilon\nu\varphi}{\eta\mu\varphi} = \frac{N\eta\mu\varphi - M\alpha}{Mg - N\sigma\upsilon\nu\varphi} \Rightarrow$$

$$N\eta\mu^2\varphi - M\alpha\eta\mu\varphi = Mg\sigma\upsilon\nu\varphi - N\sigma\upsilon\nu^2\varphi \Rightarrow N = Mg\sigma\upsilon\nu\varphi + M\alpha\eta\mu\varphi \quad (4)$$

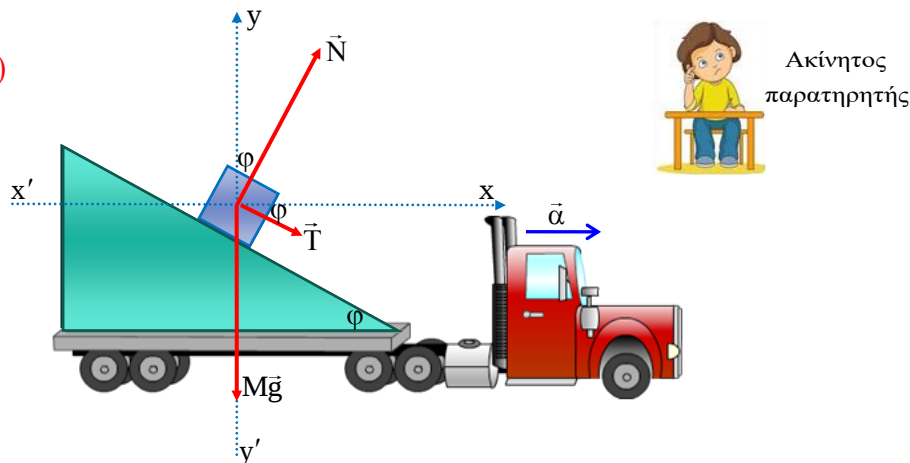
$$\text{Επειδή η τριβή είναι στατική ισχύει } T \leq \mu N \xrightarrow{(3,4)}$$

$$Mg\eta\mu\varphi - M\alpha\sigma\upsilon\nu\varphi \leq \mu(Mg\sigma\upsilon\nu\varphi + M\alpha\eta\mu\varphi) \Rightarrow g\eta\mu\varphi - \alpha\sigma\upsilon\nu\varphi \leq \mu g\sigma\upsilon\nu\varphi + \mu\alpha\eta\mu\varphi \Rightarrow$$

$$g(\eta\mu\varphi - \mu\sigma\upsilon\nu\varphi) \leq \alpha(\sigma\upsilon\nu\varphi + \mu\eta\mu\varphi) \Rightarrow \alpha \geq g \frac{\eta\mu\varphi - \mu\sigma\upsilon\nu\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi + \mu\eta\mu\varphi} \Rightarrow \alpha \geq g \frac{\epsilon\varphi\varphi - \mu}{1 + \mu \cdot \epsilon\varphi\varphi} \quad (5)$$

2η περίπτωση: Έστω ότι η τάση ολίσθησης είναι προς τα πάνω, οπότε η στατική τριβή είναι προς τα κάτω όπως φαίνεται στο σχήμα (2). Για αδρανειακό ακίνητο παρατηρητή το σώμα στο άξονα $x'x$ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση και στον άξονα $y'y$ ισορροπεί ... και ο παρατηρητής αυτός γράφει:

Σχήμα : (2)



$$\Sigma \vec{F}_x = M\vec{a} \Rightarrow N\eta\mu\varphi + T\sigma\upsilon\nu\varphi = M\alpha \quad (6) \quad \text{και} \quad \Sigma \vec{F}_y = 0 \Rightarrow N\sigma\upsilon\nu\varphi = Mg + T\eta\mu\varphi \quad (7) . \quad \text{Από (6)}$$

$$\text{και (7) έχουμε} \quad \left\{ \begin{array}{l} N\eta\mu\varphi = M\alpha - T\sigma\upsilon\nu\varphi \\ N\sigma\upsilon\nu\varphi = Mg + T\eta\mu\varphi \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\eta\mu\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi} = \frac{M\alpha - T\sigma\upsilon\nu\varphi}{Mg + T\eta\mu\varphi} \Rightarrow$$

$$Mg\eta\mu\varphi + T\eta\mu^2\varphi = M\alpha\sigma\upsilon\nu\varphi - T\sigma\upsilon\nu^2\varphi \Rightarrow T\eta\mu^2\varphi + T\sigma\upsilon\nu^2\varphi = M\alpha\sigma\upsilon\nu\varphi - Mg\eta\mu\varphi \Rightarrow$$

$$\mathbf{T = M\alpha\sigma\upsilon\nu\varphi - Mg\eta\mu\varphi} \quad (8)$$

$$\text{Επίσης από (6) και (7) έχουμε} \quad \left\{ \begin{array}{l} T\sigma\upsilon\nu\varphi = M\alpha - N\eta\mu\varphi \\ T\eta\mu\varphi = N\sigma\upsilon\nu\varphi - Mg \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\sigma\upsilon\nu\varphi}{\eta\mu\varphi} = \frac{M\alpha - N\eta\mu\varphi}{N\sigma\upsilon\nu\varphi - Mg} \Rightarrow$$

$$N\sigma\upsilon\nu^2\varphi - Mg\sigma\upsilon\nu\varphi = M\alpha\eta\mu\varphi - N\eta\mu^2\varphi \Rightarrow \mathbf{N = M\alpha\eta\mu\varphi + Mg\sigma\upsilon\nu\varphi} \quad (9)$$

Επειδή η τριβή είναι στατική ισχύει $T \leq \mu N \xrightarrow{(8,9)}$

$$M\alpha\sigma\upsilon\nu\varphi - Mg\eta\mu\varphi \leq \mu(M\alpha\eta\mu\varphi + Mg\sigma\upsilon\nu\varphi) \Rightarrow \alpha\sigma\upsilon\nu\varphi - \mu\alpha\eta\mu\varphi \leq g\eta\mu\varphi + \mu g\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow$$

$$\alpha(\sigma\upsilon\nu\varphi - \mu\eta\mu\varphi) \leq g(\eta\mu\varphi + \mu\sigma\upsilon\nu\varphi) \Rightarrow \alpha \leq g \frac{\eta\mu\varphi + \mu\sigma\upsilon\nu\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi - \mu\eta\mu\varphi} \Rightarrow \mathbf{\alpha \leq g \frac{\epsilon\varphi\varphi + \mu}{1 - \mu \cdot \epsilon\varphi\varphi}} \quad (10)$$

Από τις σχέσεις (9) και (10) παίρνουμε τη γενική σχέση

$$\mathbf{g \frac{\epsilon\varphi\varphi - \mu}{1 + \mu \cdot \epsilon\varphi\varphi} \leq \alpha \leq g \frac{\epsilon\varphi\varphi + \mu}{1 - \mu \cdot \epsilon\varphi\varphi}}$$

και με αντικατάσταση των δεδομένων της άσκησης βρίσκουμε $\mathbf{0,75 \frac{m}{s^2} \leq \alpha \leq 15,4 \frac{m}{s^2}}$

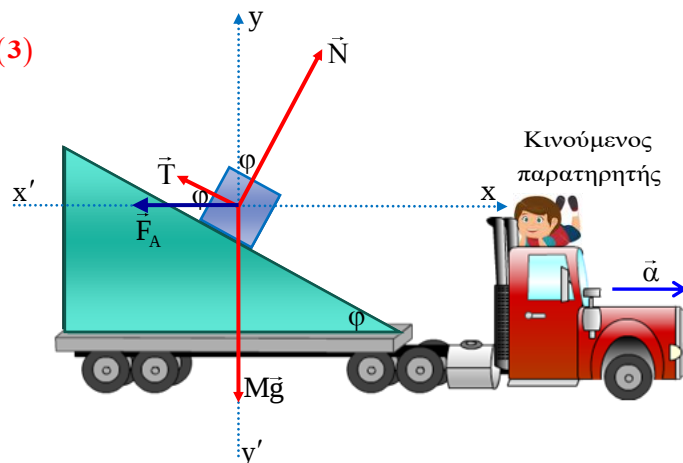
β.

Από τη σχέση (2) ή (8) για να έχει η τριβή μηδενική τιμή πρέπει $T = M\alpha\sigma\upsilon\nu\varphi - Mg\eta\mu\varphi = 0$ ή

$$\alpha = g \frac{\eta\mu\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi} \quad \text{ή} \quad \alpha = g \cdot \epsilon\varphi\varphi \quad \text{ή} \quad \mathbf{\alpha = 5,88 \frac{m}{s^2}} .$$

1ο Σχόλιο: Αν το φαινόμενο το μελετούσε παρατηρητής κινούμενος μαζί με το αυτοκίνητο – μη αδρανειακός παρατηρητής- αυτός θα «έβλεπε» ισορροπία ...και για να την δικαιολογήσει προσθέτει την δύναμη **D'Alembert** $\vec{F}_A = -M\vec{a}$...που για την 1^η περίπτωση θα είχαμε το παρακάτω σχήμα (3)

Σχήμα : (3)

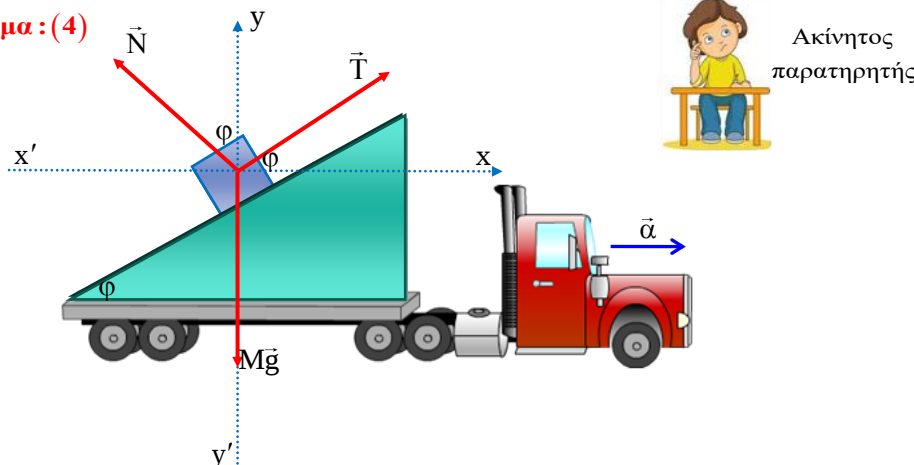


Για τον μη αδρανειακό κινούμενο παρατηρητή το σώμα τόσο στο άξονα $x'x$ όσο και στον άξονα $y'y$ ισορροπεί ...και ο παρατηρητής αυτός γράφει:

$\Sigma \vec{F}_x = 0 \Rightarrow N\eta\mu\phi - T\sigma\upsilon\nu\phi - Ma = 0$ (1') και $\Sigma \vec{F}_y = 0 \Rightarrow N\sigma\upsilon\nu\phi + T\eta\mu\phi = Mg$ (2') και ακολουθεί η ίδια μαθηματική επεξεργασία.

2ο Σχόλιο: Αν η σφήνα πάνω στο φορτηγό είχε τη μορφή του σχήματος η στατική τριβή έχει μια και μοναδική φορά αυτή του σχήματος ...γιατί μόνο με αυτή την φορά βγαίνει συνισταμένη δύναμη και συνεπώς επιτάχυνση στον άξονα $x'x$.

Σχήμα : (4)



Για αδρανειακό ακίνητο παρατηρητή το σώμα στο άξονα $x'x$ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση και στον άξονα $y'y$ ισορροπεί ...και ο παρατηρητής αυτός γράφει:

$\Sigma \vec{F}_x = M\vec{a} \Rightarrow T\sigma\upsilon\nu\phi - N\eta\mu\phi = Ma$ (11) και $\Sigma \vec{F}_y = 0 \Rightarrow T\eta\mu\phi + N\sigma\upsilon\nu\phi = Mg$ (12). Από (11)

και (12) έχουμε $\left\{ \begin{array}{l} N\eta\mu\phi = T\sigma\upsilon\nu\phi - Ma \\ N\sigma\upsilon\nu\phi = Mg - T\eta\mu\phi \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\eta\mu\phi}{\sigma\upsilon\nu\phi} = \frac{T\sigma\upsilon\nu\phi - Ma}{Mg - T\eta\mu\phi} \Rightarrow$

$$Mg\eta\mu\varphi - T\eta\mu^2\varphi = T\sigma\upsilon\nu^2\varphi - Ma\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow T\eta\mu^2\varphi + T\sigma\upsilon\nu^2\varphi = Ma\sigma\upsilon\nu\varphi + Mg\eta\mu\varphi \Rightarrow$$

$$\mathbf{T = Mg\eta\mu\varphi + Ma\sigma\upsilon\nu\varphi \quad (13)}$$

Επίσης από (11) και (12) έχουμε $\left\{ \begin{array}{l} T\sigma\upsilon\nu\varphi = Ma + N\eta\mu\varphi \\ T\eta\mu\varphi = Mg - N\sigma\upsilon\nu\varphi \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\sigma\upsilon\nu\varphi}{\eta\mu\varphi} = \frac{Ma + N\eta\mu\varphi}{Mg - N\sigma\upsilon\nu\varphi} \Rightarrow$

$$Mg\sigma\upsilon\nu\varphi - N\sigma\upsilon\nu^2\varphi = Ma\eta\mu\varphi + N\eta\mu^2\varphi \Rightarrow \mathbf{N = Mg\sigma\upsilon\nu\varphi - Ma\eta\mu\varphi \quad (14)}$$

Επειδή η τριβή είναι στατική ισχύει $T \leq \mu N \xrightarrow{(13,14)}$

$$Mg\eta\mu\varphi + Ma\sigma\upsilon\nu\varphi \leq \mu(Mg\sigma\upsilon\nu\varphi - Ma\eta\mu\varphi) \Rightarrow a\sigma\upsilon\nu\varphi + \mu a\eta\mu\varphi \leq \mu g\sigma\upsilon\nu\varphi - g\eta\mu\varphi \Rightarrow$$

$$a(\sigma\upsilon\nu\varphi + \mu\eta\mu\varphi) \leq g(\mu\sigma\upsilon\nu\varphi - \eta\mu\varphi) \Rightarrow a \leq g \frac{\mu\sigma\upsilon\nu\varphi - \eta\mu\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi + \mu\eta\mu\varphi} \Rightarrow \mathbf{a \leq g \frac{\mu - \epsilon\varphi\varphi}{1 + \mu \cdot \epsilon\varphi\varphi} \quad (15)}$$

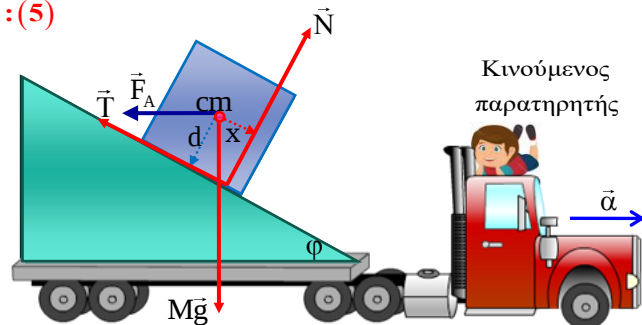
Η ανωτέρω σχέση είναι το μέτρο της επιτάχυνσης του αυτοκινήτου και προφανώς $a > 0$, οπότε πρέπει και $\mu - \epsilon\varphi\varphi > 0$ ή $\epsilon\varphi\varphi < \mu$ ή $\epsilon\varphi\varphi < 0,5$ ή $\varphi < 26,56^\circ$ που για τα δεδομένα της άσκησης δεν ισχύει.

Συμπέρασμα: αν $\mu = 0,5$ και $\varphi < 26,56^\circ$ το σώμα δεν ολισθαίνει ως προς την σφήνα όταν

η επιτάχυνση έχει μέτρο $\mathbf{a \leq g \frac{\mu - \epsilon\varphi\varphi}{1 + \mu \cdot \epsilon\varphi\varphi}}$

3ο Σχόλιο: Αν το σώμα δεν έχει αμελητέες διαστάσεις – όπως είναι και η πραγματικότητα – εκτός της ολίσθησης πάνω στη σφήνα υπάρχει και η δυνατότητα της ανατροπής και ενδεχομένως αυτή να προηγείται της ολίσθησης. Έστω ότι το σώμα είναι ένας ομογενής κύβος ακμής L .

Σχήμα : (5)



Εδώ συμφέρει η μελέτη μέσω κινούμενου παρατηρητή που «βλέπει» ισορροπία. Στην πρώτη περίπτωση που το σώμα τείνει να ολισθήσει προς τα κάτω βρήκαμε $T = Mg\eta\mu\varphi - Ma\sigma\upsilon\nu\varphi$ και $N = Mg\sigma\upsilon\nu\varphi + Ma\eta\mu\varphi$. Για να μην ανατρέπεται πρέπει $\Sigma\tau_{cm} = 0 \dots$ και για να είναι αυτό εφικτό πρέπει η δύναμη στήριξης $\vec{N}$ να είναι μετατοπισμένη ως προς το $cm \dots$

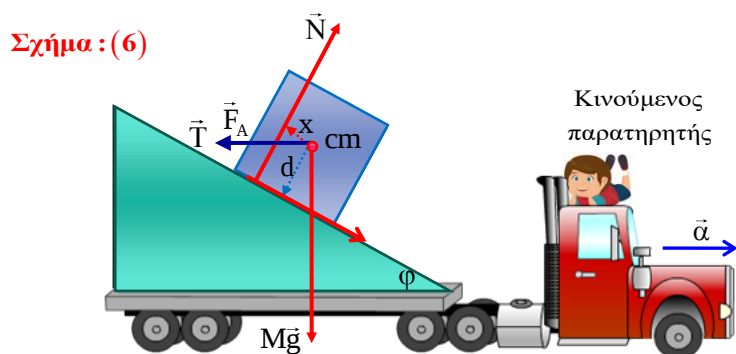
$$\Sigma\tau_{cm} = 0 \Rightarrow \tau_T + \tau_N + \tau_{Mg} + \tau_{F_A} = 0 \Rightarrow Td - Nx + 0 + 0 = 0 \Rightarrow T \frac{L}{2} = Nx \Rightarrow$$

$$(Mg\eta\mu\varphi - Ma\sigma\upsilon\nu\varphi) \frac{L}{2} = (Mg\sigma\upsilon\nu\varphi + Ma\eta\mu\varphi)x \Rightarrow x = \frac{L}{2} \frac{g\eta\mu\varphi - a\sigma\upsilon\nu\varphi}{g\sigma\upsilon\nu\varphi + a\eta\mu\varphi} \text{ και για να μην}$$

υπάρχει ανατροπή $x = \frac{L}{2} \frac{g\eta\mu\varphi - a\sigma\upsilon\nu\varphi}{g\sigma\upsilon\nu\varphi + a\eta\mu\varphi} \leq \frac{L}{2} \Rightarrow g\eta\mu\varphi - a\sigma\upsilon\nu\varphi \leq g\sigma\upsilon\nu\varphi + a\eta\mu\varphi \Rightarrow$

$$g\eta\mu\varphi - a\sigma\upsilon\nu\varphi \leq g\sigma\upsilon\nu\varphi + a\eta\mu\varphi \Rightarrow a \geq g \frac{\eta\mu\varphi - \sigma\upsilon\nu\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi + \eta\mu\varphi} \Rightarrow \mathbf{a \geq g \frac{\epsilon\varphi\varphi - 1}{1 + \epsilon\varphi\varphi} \quad (16)}$$

Στην δεύτερη περίπτωση που το σώμα τείνει να ολισθήσει προς τα κάτω βρήκαμε
 $T = M\alpha\sigma\upsilon\nu\phi - M\gamma\eta\mu\phi$ και $N = M\alpha\eta\mu\phi + M\gamma\sigma\upsilon\nu\phi$



Για να μην ανατρέπεται πρέπει $\Sigma\tau_{cm} = 0 \dots$ και για να είναι αυτό εφικτό πρέπει η δύναμη στήριξης $\vec{N}$ να είναι μετατοπισμένη ως προς το $cm \dots$

$$\Sigma\tau_{cm} = 0 \Rightarrow \tau_T + \tau_N + \tau_{Mg} + \tau_{F_A} = 0 \Rightarrow Td - Nx + 0 + 0 = 0 \Rightarrow T \frac{L}{2} = Nx \Rightarrow$$

$$(M\alpha\sigma\upsilon\nu\phi - M\gamma\eta\mu\phi) \frac{L}{2} = (M\alpha\eta\mu\phi + M\gamma\sigma\upsilon\nu\phi) x \Rightarrow x = \frac{L}{2} \frac{\alpha\sigma\upsilon\nu\phi - \gamma\eta\mu\phi}{\alpha\eta\mu\phi + \gamma\sigma\upsilon\nu\phi} \text{ και για να μην}$$

$$\text{υπάρχει ανατροπή πρέπει } x = \frac{L}{2} \frac{\alpha\sigma\upsilon\nu\phi - \gamma\eta\mu\phi}{\alpha\eta\mu\phi + \gamma\sigma\upsilon\nu\phi} \leq \frac{L}{2} \Rightarrow \alpha\sigma\upsilon\nu\phi - \gamma\eta\mu\phi \leq \alpha\eta\mu\phi + \gamma\sigma\upsilon\nu\phi \Rightarrow$$

$$\alpha\sigma\upsilon\nu\phi - \alpha\eta\mu\phi \leq \gamma\sigma\upsilon\nu\phi + \gamma\eta\mu\phi \Rightarrow \alpha \leq g \frac{\sigma\upsilon\nu\phi + \eta\mu\phi}{\sigma\upsilon\nu\phi - \eta\mu\phi} \Rightarrow \alpha \leq g \frac{1 + \epsilon\phi}{1 - \epsilon\phi} \quad (17)$$

Από (16) και (17) για να μην ανατρέπεται πρέπει $g \frac{\epsilon\phi - 1}{1 + \epsilon\phi} \leq \alpha \leq g \frac{1 + \epsilon\phi}{1 - \epsilon\phi}$ και με

αντικατάσταση βρίσκουμε $-2,45 \frac{m}{s^2} \leq \alpha \leq 39,2 \frac{m}{s^2}$ και επειδή πρόκειται για επιταχυνόμενη

κίνηση $0 < \alpha \leq 39,2 \frac{m}{s^2}$.

Συνδυάζοντας τα αποτελέσματα της ολίσθησης και ανατροπής έχουμε :

