Η σύνθετη ταλάντωση σε πραγματικά μοντέλα

Παρατηρήσεις:

1. Για την κατανόηση προέλευσης των εξισώσεων της σύνθετης ταλάντωσης απαιτούνται οι γνώσεις για :

- την ανεξαρτησία των κινήσεων,
- τη μελέτη της απλής αρμονικής ταλάντωσης μέσω του στρεφομένου διανύσματος, και
- το θεώρημα των προβολών από τον διανυσματικό λογισμό και το ευρύ τριγωνομετρικό τυπολόγιο με τους τριγωνομετρικούς μετασχηματισμούς[1].

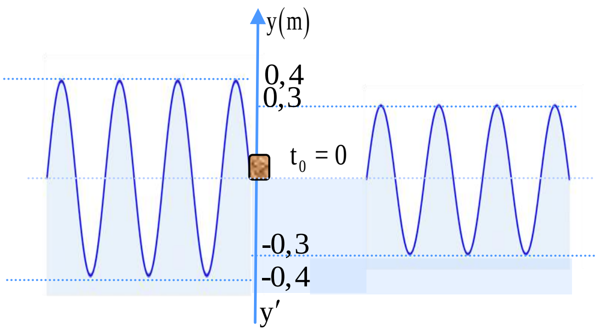
Στο σχολικό βιβλίο γράφεται η εξίσωση του πλάτους και μια πολύπλοκη σχέση της αρχικής φάσης της ταλάντωσης χωρίς απόδειξη και χωρίς καμία εξήγηση πως και γιατί από την σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων της ίδιας συχνότητας ,ίδιας διεύθυνσης και ίδιου κέντρου παίρνουμε σύνθετη ταλάντωση που είναι και αυτή α.α.τ με την ίδια συχνότητα …και όποιος κατάλαβε …κατάλαβε …δηλαδή κανένας … απλά οδηγούμε τα παιδιά στην παπαγαλία των σχέσεων[2] αυτών.

2. Σε όλα τα βιβλία υπάρχουν πολλές και καλές ασκήσεις με σύνθεση απλών αρμονικών ταλαντώσεων της ίδιας συχνότητας, ίδιας διεύθυνσης και ίδιου κέντρου χωρίς όμως να αναφέρονται κάποια παραδείγματα τέτοιας σύνθεσης σε κάποια πραγματικά μοντέλα! Δηλαδή μαθαίνουμε τύπους παπαγαλία …κάνουμε και κάποια σύνθετη επεξεργασία εξισώσεων …και που αυτά ισχύουν και πως εφαρμόζονται στον πραγματικό κόσμο …τίποτε.

Παραδείγματα σύνθετων ταλαντώσεων σε πραγματικά μοντέλα.

Η εργασία αυτή έχει σαν στόχο να δώσει κάποια πραγματικά παραδείγματα σύνθεσης ταλαντώσεων …**αν και δεν είναι τόσο εύκολο** όταν συνθέτουμε α.α.τ με την ίδια συχνότητα, ίδια διεύθυνση και ίδιο κέντρο. Το πιο χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η ταλάντωση που κάνει ένα σώμα που επιπλέει στο νερό εξαιτίας της συμβολής δύο κυμάτων (..και εδώ δε χρειάζονται ...όταν οι μαθητές είναι στις ταλαντώσεις …εξισώσεις της κυματικής…) .

1ο παράδειγμα



Ένας μικρός φελλός ηρεμεί στην ελεύθερη επιφάνεια του νερού μιας ήρεμης λίμνης . Σε δύο σημεία της λίμνης δημιουργούνται δύο διαταραχές (κύματα) που διαδίδονται στην επιφάνεια του νερού και αναγκάζουν όλα τα στοιχειώδη τμήματα της επιφάνειάς του, αλλά και το φελλό, σε κατακόρυφες ταλαντώσεις με την ίδια συχνότητα $f = 5\text{Hz}$. Το ένα κύμα φθάνει στον φελλό την χρονική στιγμή $t_1 = 0$ και τον θέτει σε ταλάντωση με πλάτος

[1] …εδώ αρχίζει η γκρίνια ότι αυτά είναι εκτός ύλης … αλλά άλλο δεν υπάρχει στο σχολικό βιβλίο και άλλο «απαγορεύεται» να το γνωρίζουν οι μαθητές και να το χρησιμοποιούν …

[2] …εδώ δεν μπορεί να γκρινιάζουμε για το [1]αλλά να ανεχόμαστε την παπαγαλία των σχέσεων πλάτους και αρχικής φάσης…

$A_1 = 0,4\text{m}$ και φορά προς τα πάνω. Το άλλο κύμα φθάνει στον φελλό την χρονική στιγμή $t_2 = 0,3\text{s}$ και αν ήταν μόνο του θα έθετε σε ταλάντωση το φελλό με πλάτος $A_2 = 0,3\text{m}$ και φορά προς τα πάνω.

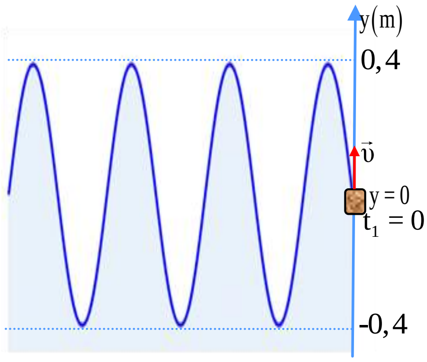
α. Υποθέστε ότι διαδίδεται κάθε φορά το ένα μόνο από τα δύο κύματα. Να γραφούν οι δύο χρονικές εξισώσεις απομάκρυνσης της ταλάντωσης του φελλού που οφείλονται στις διεγέρσεις από κάθε κύμα ξεχωριστά.

β. Να βρείτε το πλάτος της σύνθετης ταλάντωσης όταν ο φελλός ταλαντώνεται εξαιτίας της διέγερσης και από τα δύο κύματα .

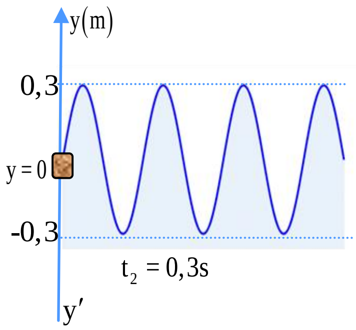
γ. Να γράψετε την χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του φελλού για όλες τις χρονικές φάσεις για $t \geq 0$.

δ. Να γίνουν σε κοινό διάγραμμα οι γραφικές παραστάσεις της απομάκρυνσης του φελλού σε συνάρτηση με το χρόνο τόσο για τις επιμέρους ταλαντώσεις όσο και για την σύνθετη ταλάντωση.

Απάντηση:



α. Μόλις φθάνει το 1º κύμα στον φελλό την χρονική στιγμή $t_1 = 0$ τον αναγκάζει σε ταλάντωση σε κατακόρυφο άξονα $y'y$ από την θέση ηρεμίας του y=0 με θετική ταχύτητα ταλάντωσης[3] . Η εξίσωση ταλάντωσης του φελλού αν υπήρχε μόνο αυτή η ταλάντωση θα ήταν $y_1(t) = A_1 \eta\mu[\omega(t - t_1) + \varphi_0] \xrightarrow{S.I}$ $y_1(t) = 0,4\eta\mu[10\pi(t - 0) + \varphi_{01}]$ και επειδή την $t = 0$ έχουμε y=0 και υ>0 εύκολα εξάγεται $\varphi_{01}=0$, οπότε η 1η ανεξάρτητη εξίσωση ταλάντωσης του φελλού είναι $\mathbf{y_1(t) = 0,4\eta\mu(10\pi t)}$ (S.I) $\forall \mathbf{t \geq 0}$ (1) Αν τώρα **υπήρχε μόνο το 2º κύμα** … μόλις αυτό φθάνει στο φελλό την χρονική στιγμή $t_2 = 0,3\text{s}$ τον αναγκάζει σε ταλάντωση σε κατακόρυφο άξονα $y'y$ από την θέση ηρεμίας του y=0 (εδώ είναι σαν να μην υπάρχει το 1º κύμα) με θετική ταχύτητα ταλάντωσης. Η εξίσωση ταλάντωσης του φελλού αν υπήρχε μόνο αυτή η ταλάντωση θα ήταν $y_2(t) = A_2 \eta\mu[\omega(t - t_2) + \varphi_{02}] \xrightarrow{S.I}$



$y_2(t) = 0,4\eta\mu[10\pi(t - 0,3) + \varphi_{02}]$ και επειδή την $t = 0,3\text{s}$ έχουμε y=0 και υ>0 εύκολα εξάγεται $\varphi_{02}=0$, οπότε η 2η ανεξάρτητη εξίσωση ταλάντωσης του φελλού είναι $\mathbf{y_2(t) = 0,3\eta\mu(10\pi t - 3\pi)}$ (S.I) $\forall \mathbf{t \geq 0,3s}$ (2) .

Σχόλιο: Η αρχική μορφή που πρέπει να γράφουμε τις εξισώσεις ταλάντωσης (ειδικά στη σύνθεση που οι επιμέρους εξισώσεις είναι δύο ή περισσότερες) είναι $\mathbf{y(t) = A\eta\mu[\omega(t - t_0) + \varphi_0]}$ $\forall \mathbf{t \geq t_0}$ γιατί για το κοινό χρονόμετρο μελέτης, η χρονική στιγμή έναρξη της κάθε ταλάντωσης μπορεί να είναι διαφορετική. Επίσης μαζί με τη

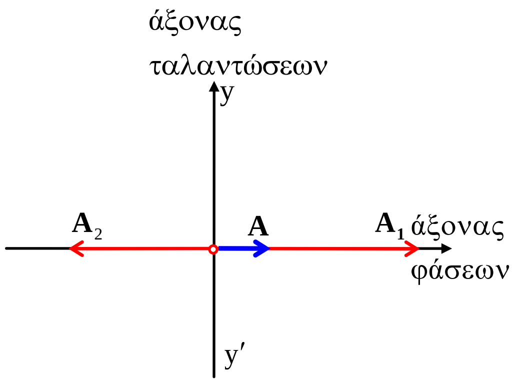
[3] …αυτά είναι απλές γνώσεις διάδοσης των κυμάτων …αλλά περιγράφονται και στην εκφώνηση της άσκησης…

χρονική εξίσωση να γράφεται ο χρονικός περιορισμός ισχύος αυτής της εξίσωσης.

β. Η σύνθετη ταλάντωση έχει νόημα για $t \geq 0{,}3s$ με επιμέρους ταλαντώσεις τις (1) και (2) που έχουν πλάτη $A_1 = 0{,}4m$ και $A_2 = 0{,}3m$ διαφορά φάσης $\Delta\varphi = 3\pi\,rad$. Το πλάτος της ταλάντωσης είναι

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\Delta\varphi} \xrightarrow{\sigma\upsilon\nu\Delta\varphi=-1} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2} \text{ ή } A = \sqrt{(A_1 - A_2)^2} \text{ ή}$$

$A = |A_1 - A_2|$ ή $\mathbf{A = 0{,}1m}$

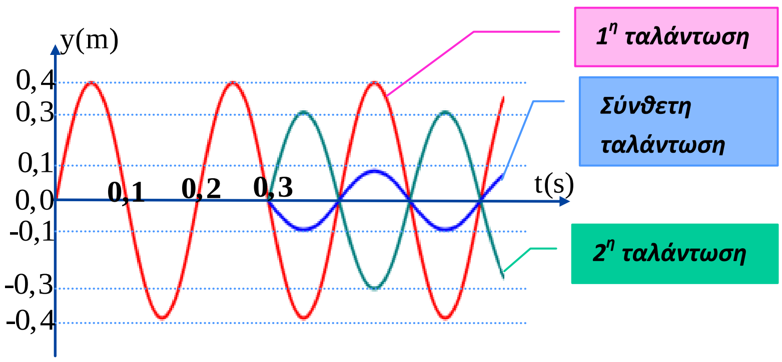


….και με την λογική περιγραφής των ταλαντώσεων μέσω στρεφομένων διανυσμάτων που περιγράφουν τόσο τις επιμέρους ταλαντώσεις όσο και την σύνθετη ….βλέπουμε ότι $A = A_1 - A_2$ ή $A = 0{,}1$ …και ότι σύνθετη ταλάντωση έχει την ίδια φάση με την 1^η ταλάντωσης (1) για $t \geq 0{,}3s$ …άρα θα έχει χρονική εξίσωση απομάκρυνσης $\mathbf{y(t) = 0{,}1\eta\mu(10\pi t)}$ (S.I) $\forall \mathbf{t \geq 0{,}3s}$ (3)

γ. Η εξίσωση της σύνθετης ταλάντωσης βρέθηκε προηγουμένως μέσω της λογικής των στρεφομένων διανυσμάτων …αλλά εδώ βρίσκεται σχετικά εύκολα και με την λογική της ανεξαρτησίας των κινήσεων $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$ ή $y(t) = 0{,}4\eta\mu(10\pi t) + 0{,}3\eta\mu(10\pi t - 3\pi)$ ή

$y(t) = 0{,}4\eta\mu(10\pi t) - 0{,}3\eta\mu(10\pi t)$ ή $\mathbf{y(t) = 0{,}1\eta\mu(10\pi t)}$ (S.I) $\forall \mathbf{t \geq 0{,}3s}$.[4]

δ.



Στο σχήμα φαίνεται η απομάκρυνση του φελλού στις διάφορες χρονικές στιγμές.

Στο χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq 0{,}3s$ ο φελλός ταλαντώνεται εξαιτίας μόνο της $1^{\eta\varsigma}$ ταλάντωσης $y_1(t) = 0{,}4\eta\mu(10\pi t)$, ενώ για $t \geq 0{,}3s$ ο φελλός ταλαντώνεται εξαιτίας και των δύο επιμέρους ταλαντώσεων της $1^{\eta\varsigma}$ $y_1(t) = 0{,}4\eta\mu(10\pi t)$ και $2^{\eta\varsigma}$ $y_2(t) = 0{,}3\eta\mu(10\pi t - 3\pi)$ που συντιθέμενες δίνουν την ενιαία σύνθετη ταλάντωση $\mathbf{y(t) = 0{,}1\eta\mu(10\pi t)}$.

2ο παράδειγμα

Ένας μικρός φελλός ηρεμεί στην ελεύθερη επιφάνεια του νερού μιας ήρεμης λίμνης . Σε δύο σημεία της λίμνης δημιουργούνται δύο διαταραχές (κύματα) διαδίδονται στην επιφάνεια του νερού και αναγκάζουν όλα τα στοιχειώδη τμήματα της επιφάνειάς του, αλλά και το φελλό, σε κατακόρυφες ταλαντώσεις με την ίδια συχνότητα $f = 5Hz$. Το ένα κύμα φθάνει στον φελλό την χρονική στιγμή $t_1 = 0$ και τον θέτει σε ταλάντωση με πλάτος $A_1 = 0{,}4m$ και φορά προς

[4] *Σημειώνουμε πάντα τον χρονικό περιορισμό ισχύος αυτής της εξίσωσης.*

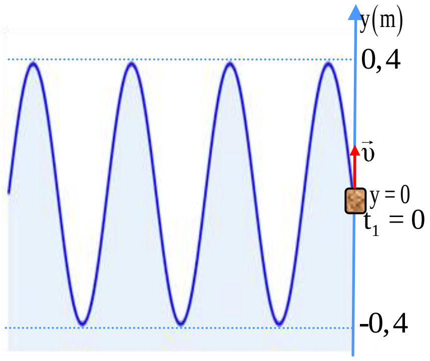
τα πάνω. Το άλλο κύμα φθάνει στον φελλό την χρονική στιγμή $t_2 = 0,25s$ και αν ήταν μόνο του θα έθετε σε ταλάντωση το φελλό με πλάτος $A_2 = 0,3m$ και φορά προς τα πάνω.

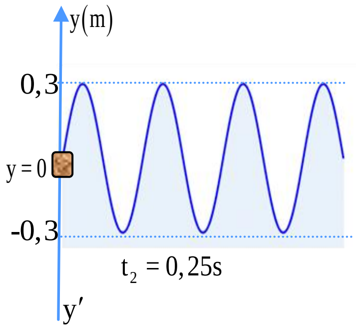
α. Υποθέστε ότι διαδίδεται κάθε φορά το ένα μόνο από τα δύο κύματα. Να γραφούν οι δύο χρονικές εξισώσεις απομάκρυνσης της ταλάντωσης του φελλού που οφείλονται στις διεγέρσεις από κάθε κύμα ξεχωριστά.

β. Να γράψετε την χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του φελλού για όλες τις χρονικές φάσεις για $t \geq 0$.

δ. Να βρείτε την απομάκρυνση και την ταχύτητα ταλάντωσης του φελλού τη χρονική στιγμή $t = \frac{5}{12}s$. Δίνεται $\sqrt{3} = 1,7$.

Απάντηση:



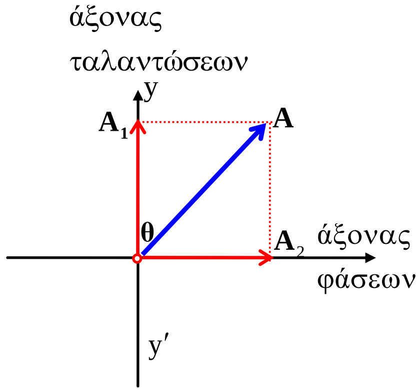


α. …και εδώ εργαζόμαστε όπως ακριβώς στην 1η εφαρμογή… Μόλις φθάνει το 1ο κύμα στον φελλό την χρονική στιγμή $t_1 = 0$ τον αναγκάζει σε ταλάντωση σε κατακόρυφο άξονα $y'y$ από την θέση ηρεμίας του y=0 με θετική ταχύτητα ταλάντωσης. Η εξίσωση ταλάντωσης του φελλού αν υπήρχε μόνο αυτή η ταλάντωση θα ήταν $y_1(t) = A_1ημ[ω(t - t_1) + φ_0] \xrightarrow{S.I} y_1(t) = 0,4ημ[10π(t - 0) + φ_{01}]$ και επειδή την $t = 0$ έχουμε y=0 και υ>0 εύκολα εξάγεται $φ_{01}$=0, οπότε η 1η ανεξάρτητη εξίσωση ταλάντωσης του φελλού είναι $\mathbf{y_1(t) = 0,4ημ(10πt)}$ (S.I) $\forall \mathbf{t \geq 0}$ (1). Αν τώρα **υπήρχε μόνο το 2ο κύμα** … μόλις αυτό φθάνει στο φελλό την χρονική στιγμή $t_2 = 0,25s$ το αναγκάζει σε ταλάντωση σε κατακόρυφο άξονα $y'y$ από την θέση ηρεμίας του y=0 (εδώ είναι σαν να μην υπάρχει το 1ο κύμα) με θετική ταχύτητα ταλάντωσης. Η εξίσωση ταλάντωσης του φελλού αν υπήρχε μόνο αυτή η ταλάντωση θα ήταν $y_2(t) = A_2ημ[ω(t - t_2) + φ_{02}] \xrightarrow{S.I} y_2(t) = 0,4ημ[10π(t - 0,25) + φ_0]$ και επειδή την $t = 0,25s$ έχουμε y=0 και υ>0 εύκολα εξάγεται $φ_{02}$=0, οπότε η 2η ανεξάρτητη εξίσωση ταλάντωσης του φελλού είναι $\mathbf{y_2(t) = 0,3ημ(10πt - 2,5π)}$ (S.I) $\forall \mathbf{t \geq 0,25s}$ (2).

β. Η σύνθετη ταλάντωση έχει νόημα για $t \geq 0,25s$ με επιμέρους ταλαντώσεις τις (1) και (2) που έχουν πλάτη $A_1 = 0,4m$ και $A_2 = 0,3m$ και διαφορά φάσης $Δφ = 2,5\,rad$. Το πλάτος της ταλάντωσης είναι $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2συνΔφ} \xrightarrow{συνΔφ=0} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ ή $\mathbf{A = 0,5m}$.
Αν τώρα θέλουμε την χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης της σύνθετης ταλάντωσης …η μαθηματική επεξεργασία μέσω της ανεξαρτησίας των κινήσεων δυσκολεύει και θέλει πολύ καλή γνώση της τριγωνομετρίας … $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$ ή $y(t) = 0,4ημ(10πt) + 0,3ημ(10πt - 2,5π)$ ή

$y(t)=0,4ημ(10πt)-0,3συν(10πt)$ [5] … $\mathbf{y(t)=0,5ημ(10πt-θ)}$ $\forall \mathbf{t \ge 0,25s}$ με $\mathbf{εφθ=\frac{3}{4}}$ …

ο μετασχηματισμός όμως αυτός έχει κάποια μαθηματική δυσκολία και μάλλον πρέπει να αποφεύγεται.



Εδώ συμφέρει η λογική περιγραφής των ταλαντώσεων μέσω στρεφομένων διανυσμάτων που περιγράφουν τόσο τις επιμέρους ταλαντώσεις όσο και την σύνθετη …. βλέπουμε ότι $A=\sqrt{A_1^2+A_2^2}$ ή $\mathbf{A=0,5m}$ … και η σύνθετη ταλάντωση έχει φάση που καθυστερεί της 1ης ταλάντωσης κατά θ που από το σχήμα φαίνεται $εφθ=\frac{A_2}{A_1}$ ή $εφθ=\frac{3}{4}$, $ημθ=\frac{3}{5}$ και $συνθ=\frac{4}{5}$ …άρα θα έχει χρονική εξίσωση απομάκρυνσης $\mathbf{y(t)=0,5ημ(10πt-θ)}$ (S.I) $\forall \mathbf{t\ge 0,25s}$ (3)

γ. Η χρονική στιγμή $t=\frac{5}{12}s>0,25s$ είναι σε χρονική περιοχή που ο φελλός εκτελεί την σύνθετη ταλάντωση …και με αντικατάσταση στην εξίσωση απομάκρυνσης της σύνθετης ταλάντωσης βρίσκουμε $y=0,5ημ\left(10π\frac{5}{12}-θ\right)$ ή $y=0,5ημ\left(4π+\frac{π}{6}-θ\right)$ ή $y=0,5ημ\left(\frac{π}{6}-θ\right)$

ή $y=0,5\left(ημ\frac{π}{6}συνθ-συν\frac{π}{6}ημθ\right)$ [6] ή $y=0,5\left(\frac{1}{2}\frac{4}{5}-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{3}{5}\right)$ ή $y=0,5\left(\frac{4}{10}-\frac{5,1}{10}\right)$ ή

$\mathbf{y=-0,055m}$. Η παραπάνω όμως διαδικασία απαιτεί γνώση τριγωνομετρικής εξίσωσης …και σε αυτές τις περιπτώσεις συμφέρει η μελέτη μέσω της ανεξαρτησίας των κινήσεων …να βρούμε την χρονική στιγμή $t=\frac{5}{12}s>0,25s$ αν εκτελούσε ξεχωριστά την κάθε ταλάντωση ποια απομάκρυνση και ποια ταχύτητα θα είχε…

<u>1η ταλάντωση:</u>

$y_1(t)=0,4ημ(10πt)$ ή $y_1=0,4ημ\left(10π\frac{5}{12}\right)$ ή $y_1=0,4ημ\left(\frac{π}{6}\right)$ ή $y_1=0,2m$

$υ_1(t)=4πσυν(10πt)$ ή $υ_1=4πσυν\left(10π\frac{5}{12}\right)$ ή $υ_1=4πσυν\left(\frac{π}{6}\right)$ ή $υ_1=2π\sqrt{3}m/s$ ή

$υ_1=3,4πm/s$.

<u>2η ταλάντωση:</u>

$\mathbf{y_2(t)=0,3ημ(10πt-2,5π)}$ ή $y_2(t)=-0,3συν(10πt)$ ή $y_2=-0,3συν\left(10π\frac{5}{12}\right)$ ή

$y_2=-0,3συν\left(\frac{π}{6}\right)$ ή $y_2=-0,3\frac{\sqrt{3}}{2}$ ή $y_2=-2,55m$

$\mathbf{υ_2(t)=3πσυν(10πt-2,5π)}$ ή $υ_2(t)=3πημ(10πt)$ ή $υ_2=3πημ\left(10π\frac{5}{12}\right)$ ή $υ_2=3πημ\left(\frac{π}{6}\right)$

[5] $\mathbf{αημφ-βσυνφ=\sqrt{α^2+β^2}ημ(φ-θ)}$ **με** $\mathbf{εφθ=β/α}$

[6] $\mathbf{ημ(α-β)=ημασυνβ-συναημβ}$

$\upsilon_2 = 1,5\pi m/s$. Τώρα που εκτελεί την σύνθετη ταλάντωσης θα έχει απομάκρυνση $y = y_1 + y_2$ ή $y = 0,2m - 0,255m$ ή $\mathbf{y = -0,055m}$ … και ταχύτητα … $\upsilon = \upsilon_1 + \upsilon_2$ ή $\upsilon = 3,4\pi + 1,5\pi$ ή $\mathbf{\upsilon = 4,9\pi m/s}$

3ο παράδειγμα

Ένα σώμα μάζας m=1Kg είναι δεμένο στο πάνω μέρος κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς K=100N/m. Την στιγμή t=0 το φέρουμε στη θέση που το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος και το αφήνουμε ελεύθερο χωρίς αρχική ταχύτητα να εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση. Θεωρώντας τα θετικά προς τα πάνω,

α. Να γραφεί η χρονική εξίσωση $y_1(t)$ απομάκρυνσης για την ταλάντωση αυτή.

Όταν ο ταλαντωτής διέρχεται για πρώτη φορά από την θέση ισορροπίας του δρα στιγμιαία και για αμελητέα μετατόπιση μια κατακόρυφη δύναμη $\vec{F}$ που αυξάνει τη ταχύτητα του σώματος κατά 2m/s.

β. Για το ίδιο σύστημα αναφοράς και την ίδια αρχή χρόνων, να γραφεί η χρονική εξίσωση της ταλάντωσης αμέσως μετά την δράση της δύναμης $\vec{F}$.

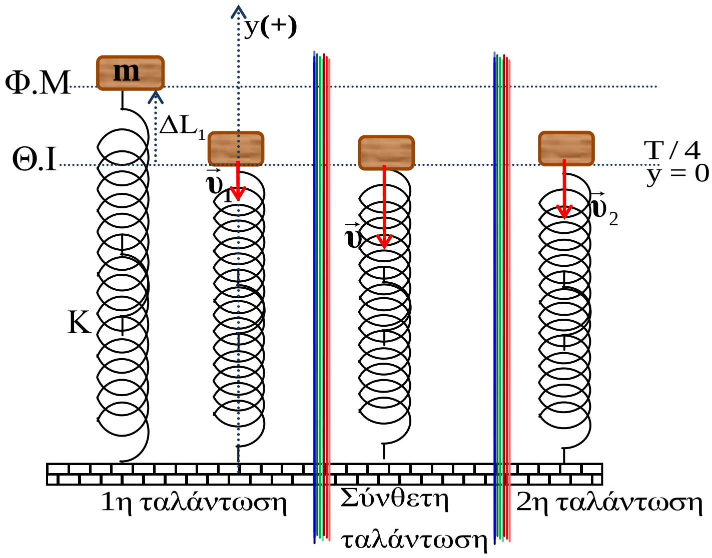
Θεωρώντας την ανωτέρω τελική ταλάντωση ως σύνθετη ταλάντωση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων της αρχικής και μιας άλλης δεύτερης που πρέπει να συντεθεί με αυτή και να δώσει την τελική ταλάντωση.

γ. Να γραφεί η χρονική εξίσωση $y_2(t)$ της απομάκρυνσης για την δεύτερη ταλάντωση αυτή.

δ. Να γίνουν σε κοινό διάγραμμα οι γραφικές παραστάσεις της απομάκρυνσης του φελλού σε συνάρτηση με το χρόνο τόσο για τις επιμέρους ταλαντώσεις όσο και για την σύνθετη ταλάντωση.

Απάντηση :

α. Το κέντρο της ταλάντωσης είναι κάτω από το φυσικό μήκος κατά $\Delta L_1 = \frac{mg}{K}$ ή $\Delta L_1 = 0,1m$ και όλες οι ταλαντώσεις έχουν κυκλική συχνότητα $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$ ή $\omega = 10 rad/s$ και περίοδο $T = \frac{2\pi}{10}s$. Για την αρχική 1η ταλάντωση που αρχίζει την $t_0 = 0$ από την θέση $y_1 = +0,1m$ με μηδενική ταχύτητα έχει εξίσωση απομάκρυνσης $\mathbf{y_1(t) = 0,1\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)}$ (S.I) $\forall t \geq 0s$.



β. Μόλις ο ταλαντωτής είναι στη θέση ισορροπίας $y = 0$ την χρονική στιγμή $t' = \frac{T}{4} = \frac{2\pi}{40}s$ έχει ταχύτητα $\upsilon_1 = \upsilon_{1,max} = \omega A_1$ ή $\upsilon_1 = 1m/s$. Εκεί η ταχύτητα του ταλαντωτή σε μηδαμινό χρόνο και απομάκρυνση[7] αποκτά ταχύτητα $\upsilon=(1+2)m/s=3m/s$ που αποτελεί την μέγιστη ταχύτητα της τελικής σύνθετης ταλάντωσης που θα έχει πλάτος Α που υπολογίζεται από την σχέση $\upsilon=\upsilon_{max}=\omega A$ ή $\mathbf{A=0,3m}$. Η εξίσωση της σύνθετης ταλάντωσης είναι

$$y(t)=A\eta\mu\left(\omega\left(t-\frac{T}{4}\right)+\varphi_0\right)\xrightarrow{S.I}y(t)=0,3\eta\mu\left(10\left(t-\frac{2\pi}{40}\right)+\varphi_0\right) \text{ ή}$$

$y(t)=0,3\eta\mu\left(10t-\dfrac{\pi}{2}+\varphi_0\right)$ και επειδή την $t=t'=\dfrac{2\pi}{40}s$ έχουμε y=0 και υ<0 εύκολα εξάγεται

$\varphi_0=\pi$, οπότε η τελική (σύνθετη) εξίσωση ταλάντωσης είναι $y(t)=0,3\eta\mu\left(10t-\dfrac{\pi}{2}+\pi\right)$ ή

$$\mathbf{y(t)=0,3\eta\mu\left(10t+\frac{\pi}{2}\right)} \text{ (S.I) } \forall \mathbf{t\geq\frac{2\pi}{40}s} \text{ (2)}.$$

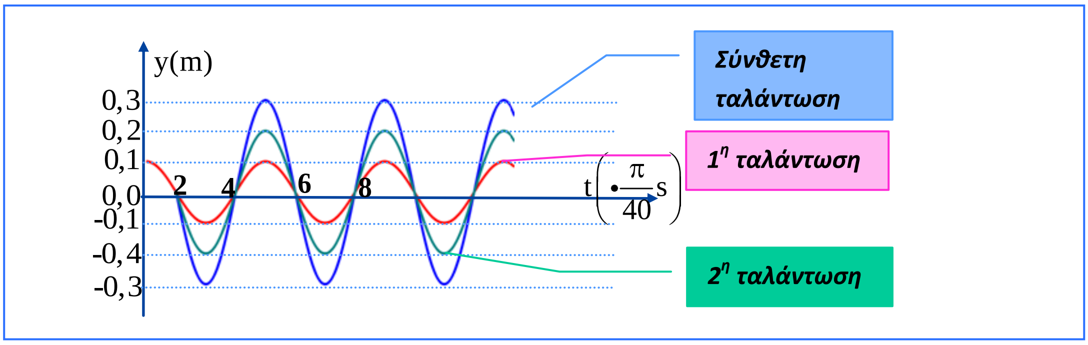
γ. Αν τώρα **δεν υπήρχε η 1η ταλάντωση** … το σώμα προφανώς θα ηρεμούσε στην θέση ισορροπίας του. **Εκεί αν ασκούνταν ακαριαία η δύναμη** την χρονική στιγμή $t'=\dfrac{T}{4}=\dfrac{2\pi}{40}s$ θα αποκτούσε ταχύτητα $\upsilon_2=2m/s$ που αποτελεί την μέγιστη ταχύτητα της ανεξάρτητης αυτής 2ης ταλάντωσης που θα έχει πλάτος A_2 που υπολογίζεται από την σχέση $\upsilon_2=\upsilon_{2,max}=\omega A_2$ ή $\mathbf{A_2=0,2m}$. Η εξίσωση της σύνθετης ταλάντωσης είναι

$$y(t)=A_2\eta\mu\left(\omega\left(t-\frac{T}{4}\right)+\varphi_{02}\right)\xrightarrow{S.I}y(t)=0,2\eta\mu\left(10\left(t-\frac{2\pi}{40}\right))+\varphi_{02}\right) \text{ ή}$$

$y(t)=0,2\eta\mu\left(10t-\dfrac{\pi}{2}+\varphi_{02}\right)$ και επειδή την $t=t'=\dfrac{2\pi}{40}s$ έχουμε y=0 και υ_2<0 εύκολα εξάγεται

$\varphi_{02}=\pi$, οπότε η 2η ανεξάρτητη εξίσωση ταλάντωσης είναι $y_2(t)=0,2\eta\mu\left(10t-\dfrac{\pi}{2}+\pi\right)$ ή

$\mathbf{y_2(t)=0,2\eta\mu\left(10t+\dfrac{\pi}{2}\right)}$ (S.I) $\forall\mathbf{t\geq\dfrac{2\pi}{40}s}$ (2) . Προσέξτε …εδώ : $y(t)=y_1(t)+y_2(t)$



Στο σχήμα φαίνονται η σύνθετη αλλά και οι δύο επιμέρους ταλαντώσεις …με την 2η και την σύνθετη –τελική να ισχύει για $\forall\mathbf{t\geq\dfrac{2\pi}{40}s}$.

7

---

[7] Φανταστείτε ότι το σώμα είναι ηλεκτρικά φορτισμένο και μόλις διέρχεται από την θέση ισορροπίας εφαρμόζεται ισχυρό ομογενές κατακόρυφο ηλεκτρικό πεδίο . Αν το ηλεκτρικό πεδίο π.χ ασκούσε δύναμη $F=2\cdot10^4N$ η αύξηση της ταχύτητας κατά 2m/s γίνεται σε χρόνο $\Delta t=0,1ms$ και για μετατόπιση $\Delta y=0,4mm$ …ποσότητες που θεωρούνται μηδαμινές.

4ο παράδειγμα

Ένα σώμα μάζας m=1Kg είναι δεμένο στο πάνω μέρος κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς K=100N/m. Την στιγμή $t_0 = 0$ δίνουμε στο σώμα κατακόρυφη ταχύτητα $\upsilon_1 = 5m/s$ και το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Θεωρώντας τα θετικά προς τα πάνω,

α. Να γραφεί η χρονική εξίσωση $y_1(t)$ απομάκρυνσης για την ταλάντωση αυτή.

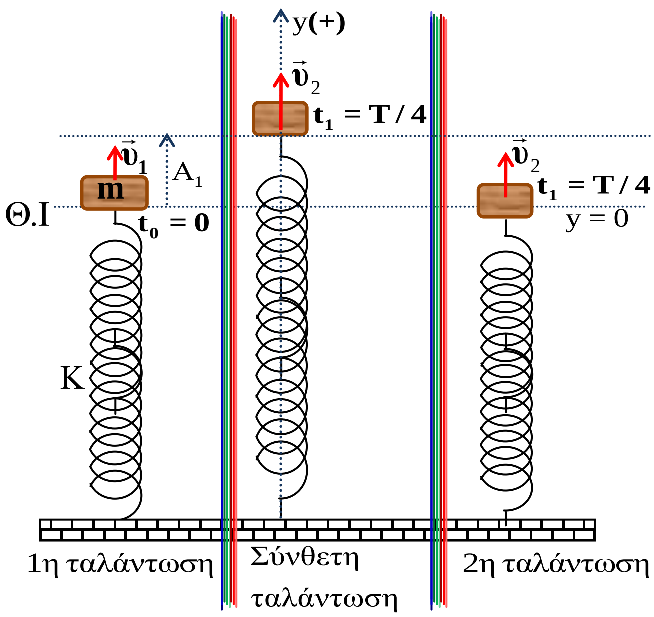
Όταν ο ταλαντωτής βρίσκεται για πρώτη φορά σε απομάκρυνση $y = +0,5m$ δρα στιγμιαία και για αμελητέα μετατόπιση μια κατακόρυφη δύναμη $\vec{F}$ που δίνει πρόσθετη ταχύτητα στο σώμα κατά $\upsilon_2 = 5\sqrt{3}m/s$.

β. Για το ίδιο σύστημα αναφοράς και την ίδια αρχή χρόνων, να γραφεί η χρονική εξίσωση της ταλάντωσης αμέσως μετά την δράση της δύναμης $\vec{F}$.

Θεωρώντας την ανωτέρω τελική ταλάντωση ως σύνθετη ταλάντωση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων της αρχικής και μιας άλλης δεύτερης που πρέπει να συντεθεί με αυτή και να δώσει την τελική ταλάντωση.

γ. Να γραφεί η χρονική εξίσωση $y_2(t)$ της απομάκρυνσης για την δεύτερη ταλάντωση αυτή.

Απάντηση :



α. Όλες οι ταλαντώσεις έχουν κυκλική συχνότητα $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$ ή $\omega = 10rad/s$ και περίοδο $T = \frac{2\pi}{10}s$

Για την αρχική 1η ταλάντωση που αρχίζει την $t_0 = 0$ από την θέση $y = 0$ με θετική ταχύτητα που έχει την μέγιστη τιμή και από την οποία βρίσκουμε το πλάτος της ταλάντωσης αυτής $\upsilon_1 = \omega A_1$ ή $5 = 10A_1$ ή $A_1 = 0,5m$. Η εξίσωση απομάκρυνσης της ταλάντωσης αυτής είναι $\mathbf{y_1(t) = 0,5\eta\mu(10t)}$ $\forall \mathbf{t} \geq 0\mathbf{s}$.

β. Μόλις ο ταλαντωτής είναι στη θέση ισορροπίας $y = 0,5m$ την χρονική στιγμή $t_1 = \frac{T}{4} = \frac{2\pi}{40}s$ έχει ταχύτητα $\upsilon_1' = 0$. Εκεί η ταχύτητα του ταλαντωτή σε μηδαμινό χρόνο και απομάκρυνση αποκτά ταχύτητα $\upsilon = \upsilon_1 + \upsilon_2$ $\xrightarrow{\upsilon_1 = 0}$ $\upsilon = \upsilon_2 = 5\sqrt{3}m/s$. Η νέα ταλάντωση (σύνθετη- τελική) θα έχει πλάτος που προκύπτει από την διατήρηση της ενέργειας για την ταλάντωση αυτή $\frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}Dy^2 = \frac{1}{2}DA^2$

$\xrightarrow{D=K}$ $A = \sqrt{y^2 + \frac{m\upsilon^2}{K}}$ $\xrightarrow{S.I}$ $\mathbf{A = 1,0\,m}$. Η εξίσωση της σύνθετης ταλάντωσης είναι

$y(t) = A\eta\mu\left(\omega\left(t - t_1\right) + \varphi_0\right)$ $\xrightarrow{S.I}$ $y(t) = 1,0\eta\mu\left(10\left(t - \frac{2\pi}{40}\right) + \varphi_0\right)$ και επειδή την $t = t_1 = \frac{2\pi}{40}s$

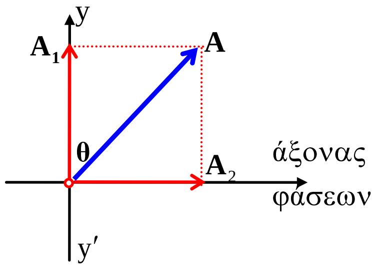
έχουμε y=0,5m και υ>0 εύκολα εξάγεται $\varphi_0=\pi/6$, οπότε η τελική (σύνθετη) εξίσωση ταλάντωσης είναι $y(t)=1,0\eta\mu\left(10\left(t-\frac{2\pi}{40}\right)+\frac{\pi}{6}\right)$ ή $\mathbf{y(t)=1,0\eta\mu\left(10t-\frac{\pi}{3}\right)}$ (S.I) $\forall \mathbf{t}\geq\frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{40}}\mathbf{s}$.

γ. Αν τώρα **δεν υπήρχε η 1η ταλάντωση** … το σώμα προφανώς θα ηρεμούσε στην θέση ισορροπίας του. **Εκεί αν ασκούνταν ακαριαία η δύναμη** την χρονική στιγμή $t_1=\frac{T}{4}=\frac{2\pi}{40}s$ θα αποκτούσε ταχύτητα $\upsilon_2=5\sqrt{3}m/s$ που αποτελεί **την μέγιστη ταχύτητα** της ανεξάρτητης αυτής 2ης ταλάντωσης που θα έχει πλάτος A_2 που υπολογίζεται από την σχέση $\upsilon_2=\upsilon_{2,max}=\omega A_2$ ή $\mathbf{A_2=0,5\sqrt{3}\,m}$. Η εξίσωση της 2ης ταλάντωσης είναι

$$y_2(t)=A_2\eta\mu\left(\omega\left(t-t_1\right)+\varphi_{02}\right)\xrightarrow{S.I}y_2(t)=0,5\sqrt{3}\eta\mu\left(10\left(t-\frac{2\pi}{40}\right)+\varphi_{02}\right) \text{ ή}$$

$y_2(t)=0,5\sqrt{3}\eta\mu\left(10t-\frac{\pi}{2}+\varphi_{02}\right)$ και επειδή την $t=t_1=\frac{2\pi}{40}s$ έχουμε y=0 και $\upsilon_2>0$ εύκολα εξάγεται $\varphi_{02}=0$, οπότε η 2η ανεξάρτητη εξίσωση ταλάντωσης είναι η $\mathbf{y_2(t)=0,5\sqrt{3}\eta\mu\left(10t-\frac{\pi}{2}\right)}$ (S.I) $\forall\mathbf{t}\geq\frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{40}}\mathbf{s}$ (2).

- Προσέξτε …ότι $\forall t\geq\frac{2\pi}{40}s$ ισχύει $y=y_1+y_2$ και $\upsilon=\upsilon_1+\upsilon_2$…
- Οι δύο επιμέρους ταλαντώσεις με πλάτη $\mathbf{A_1=0,5\,m}$ και $\mathbf{A_2=0,5\sqrt{3}\,m}$ έχουν διαφορά $\Delta\varphi=\frac{\pi}{2}rad$ …Επιβεβαιώστε την εξίσωση του πλάτους $A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\Delta\varphi}$
- **Προσπαθήστε μέσω των στρεφομένων διανυσμάτων να εξάγετε την εξίσωση της σύνθετης ταλάντωσης.**



$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2}$ ή $A=\sqrt{0,5^2+0,5\left(\sqrt{3}\right)^2}$ ή $A=1,0m$

Η σύνθετη ταλάντωση έχει καθυστέρηση φάσης έναντι της 1ης ταλάντωσης κατά θ με $\varepsilon\varphi\theta=\frac{A_2}{A_1}$ ή

$\varepsilon\varphi\theta=\frac{0,5\sqrt{3}}{0,5}$ ή $\varepsilon\varphi\theta=\sqrt{3}$ ή $\theta=\frac{\pi}{3}rad$ …οπότε $\mathbf{y(t)=A\eta\mu(\varphi\acute{\alpha}\sigma\eta\varsigma)}$ ή $\mathbf{y(t)=1,0\eta\mu\left(10t-\frac{\pi}{3}\right)}$ (S.I) $\forall\mathbf{t}\geq\frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{40}}\mathbf{s}$

Σχόλιο: Η τελική ταλάντωση μπορεί να θεωρηθεί ως η σύνθετη ταλάντωση δύο α.α.τ ανεξάρτητων ταλαντώσεων ….

- της 1ης ταλάντωσης που αρχίζει την $t_0=0$ από την θέση $y=0$ με θετική ταχύτητα και πλάτος $A_1=0,5m$.
- της 2ης ταλάντωσης που αρχίζει την $t_1=\frac{2\pi}{40}s$ από την θέση $y=0$ με θετική ταχύτητα και πλάτος $A_2=0,5\sqrt{3}m$.

Σχόλιο: **Άλλο χαρακτηριστικό παράδειγμα σύνθετης ταλάντωσης είναι τα ηχητικά διακροτήματα.**