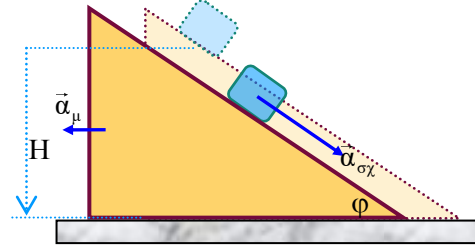


Η σχετική κίνηση πάνω σε ελεύθερο για μετακίνηση κεκλιμένο επίπεδο

Μια λεία βάση (σφήνα) μάζας $M = 9,82\text{Kg}$ και γωνίας κλίσης $\varphi = 36,87^\circ$ είναι ακίνητη πάνω σε λείο επίπεδο αλλά ελεύθερη για μετακίνηση. Πάνω στην βάση και σε ύψος $H = 46,44\text{cm}$ αφήνουμε ένα σώμα μάζας $m = 0,50\text{Kg}$ που δεν παρουσιάζει τριβές με την βάση. Καθώς το σώμα κατέρχεται και η βάση μετακινείται, να υπολογισθούν:



- α.** η δύναμη $\vec{F}$ που ασκεί η βάση στο σώμα,
 - β.** η επιτάχυνση $\vec{a}_\mu$ (ως ακίνητο παρατηρητή) με την οποία μετακινείται η βάση,
 - γ.** η σχετική επιτάχυνση $\vec{a}_{sx}$ (ως προς την βάση) καθόδου του σώματος,
 - δ.** ο χρόνος καθόδου του σώματος στο οριζόντιο δάπεδο.
- Μόλις το σώμα φθάνει στο τέλος της βάσης, να υπολογισθούν,
- ε.** η ταχύτητα της βάσης $\vec{v}_\mu$ (ως προς ακίνητο παρατηρητή),
 - στ.** η σχετική ταχύτητα του σώματος $\vec{v}_{sx}$ (ως προς την βάση) ,
 - ζ.** η απόλυτη ταχύτητα του σώματος ως προς ακίνητο παρατηρητή.

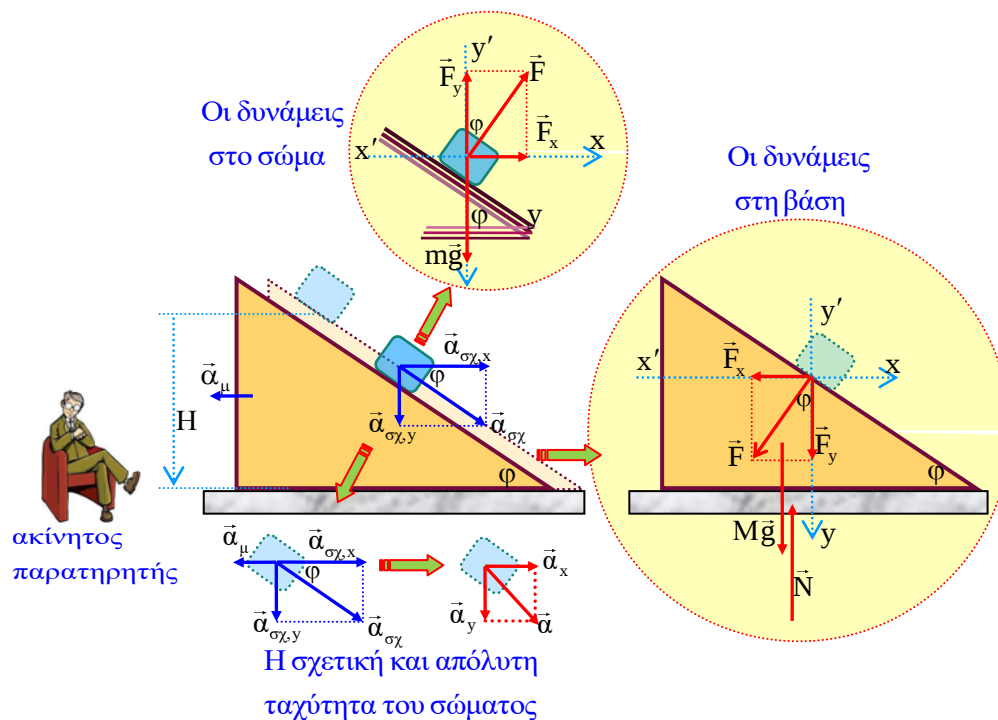
Δίνονται $g = 10\text{m/s}^2$, $\eta\mu\varphi = 0,6$, $\sigma\upsilon\eta\varphi = 0,8$, $\epsilon\varphi\varphi = 0,75$.

Η απάντηση

α. Στο σχήμα φαίνονται οι ασκούμενες δυνάμεις τόσο στο σώμα, όσο και στην βάση (σφήνα). Επίσης έχουν σχεδιασθεί η σχετική επιτάχυνση $\vec{a}_{\sigma\chi}$ καθόδου του σώματος ως προς την βάση (που έχει αναλυθεί σε δύο συνιστώσες $\vec{a}_{\sigma\chi,x}$ και $\vec{a}_{\sigma\chi,y}$ σε οριζόντιο και κατακόρυφο άξονα) αλλά και επιτάχυνση $\vec{a}_\mu$ της βάσης.

Το σώμα ως προς ακίνητο παρατηρητή εκτελεί αφενός μεν την σχετική κίνηση που κατέρχεται σε επαφή με την βάση, αλλά ταυτόχρονα μετέχει και της κίνησης της βάσης (μετοχική κίνηση). Η απόλυτη επιτάχυνση $\vec{a}$ του σώματος ως προς τον ακίνητο παρατηρητή είναι, $\vec{a} = \vec{a}_{\sigma\chi} + \vec{a}_\mu$ ή $[\vec{a}_x = \vec{a}_{\sigma\chi,x} + \vec{a}_\mu$ και $\vec{a}_y = \vec{a}_{\sigma\chi,y} + 0]$ και αλγεβρικά

$$[\alpha_x = \alpha_{\sigma\chi,x} - \alpha_\mu \text{ και } \alpha_y = \alpha_{\sigma\chi,y}].$$



Με βάση τις ανωτέρω επιταχύνσεις και τις ασκούμενες δυνάμεις γράφουμε για ακίνητο παρατηρητή στον νόμο Newton τόσο για το σώμα όσο και για την βάση.

Σώμα: $\Sigma F_x = m a_x \Rightarrow F \eta \mu \phi = m (\alpha_{\sigma\chi,x} - \alpha_\mu)$ (1)

$\Sigma F_y = m a_y \Rightarrow mg - F \sigma \nu \eta \phi = m \alpha_{\sigma\chi,y}$ (2)

Βάση: $\Sigma F_x = M a_\mu \Rightarrow F \eta \mu \phi = M \alpha_\mu$ (3)

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = Mg + F \sigma \nu \eta \phi$ (4)

(1) $\Rightarrow \alpha_{\sigma\chi,x} - \alpha_\mu = \frac{F \eta \mu \phi}{m} \xrightarrow{(3)} \alpha_{\sigma\chi,x} - \frac{F \eta \mu \phi}{M} = \frac{F \eta \mu \phi}{m} \Rightarrow \alpha_{\sigma\chi,x} = \frac{F \eta \mu \phi}{m} + \frac{F \eta \mu \phi}{M}$ (3')

(2) $\Rightarrow \alpha_{\sigma\chi,y} = \frac{mg - F \sigma \nu \eta \phi}{m}$ (4')

Από το σχήμα των σχετικών επιταχύνσεων έχουμε $\alpha_{\sigma\chi,y} = \alpha_{\sigma\chi,x} \epsilon \phi \phi \xrightarrow{(3'+4')} \rightarrow$

$$\frac{mg - F\sigma\eta\phi}{m} = \left[\frac{F\eta\mu\phi}{m} + \frac{F\eta\mu\phi}{M} \right] \varepsilon\phi\phi \Rightarrow \frac{mg - F\sigma\eta\phi}{m\varepsilon\phi\phi} = \frac{F\eta\mu\phi}{m} + \frac{F\eta\mu\phi}{M} \Rightarrow F = \frac{mMg\sigma\eta\phi}{M + m\eta\mu^2\phi}$$

$$\xrightarrow{(S.I)} F = 3,928N$$

β. Η επιτάχυνση της βάσης $\vec{a}_\mu$ υπολογίζεται από την σχέση (3) $\alpha_\mu = \frac{F\eta\mu\phi}{M} \xrightarrow{(S.I)} \alpha_\mu = 0,24m/s^2$.

γ. Από την σχέση (2) υπολογίζουμε την συνιστώσα $\vec{a}_{\sigma\chi,y}$ της $\vec{a}_{\sigma\chi}$

$$(2) \Rightarrow \alpha_{\sigma\chi,y} = \frac{mg - F\sigma\eta\phi}{m} \xrightarrow{(S.I)} \alpha_{\sigma\chi,y} = 3,7152m/s^2. \text{ Από το σχήμα των σχετικών επιταχύνσεων έχουμε } \alpha_{\sigma\chi,y} = \alpha_{\sigma\chi}\eta\mu\phi \Rightarrow \alpha_{\sigma\chi} = \frac{\alpha_{\sigma\chi,y}}{\eta\mu\phi} \xrightarrow{(S.I)} \alpha_{\sigma\chi} = 6,192m/s^2.$$

Σχόλιο: Η συνιστώσα $\alpha_{\sigma\chi,x}$ είναι $\alpha_{\sigma\chi,x} = \alpha_{\sigma\chi}\sigma\eta\phi \xrightarrow{(S.I)} \alpha_{\sigma\chi,x} = 4,9536\frac{m}{s^2}$.

δ. Το σχετικό μήκος L που διανύει το σώμα για να φθάσει στην βάση είναι $\eta\mu\phi = \frac{H}{L} \Rightarrow$

$$L = \frac{H}{\eta\mu\phi} \xrightarrow{(S.I)} L = \frac{0,4644m}{0,60} \Rightarrow L = 0,774m$$

Ο χρόνος καθόδου υπολογίζεται από την σχέση $L = \frac{1}{2}\alpha_{\sigma\chi}t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2L}{\alpha_{\sigma\chi}}} \xrightarrow{(S.I)}$

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,774m}{6,192m/s^2}} \Rightarrow t = 0,5s.$$

Σχόλιο : Ο χρόνος καθόδου υπολογίζεται από την σχέση $H = \frac{1}{2}\alpha_{\sigma\chi,y}t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2H}{\alpha_{\sigma\chi,y}}}$.

ε. Η ταχύτητα της βάσης $\vec{v}_\mu$ (ως προς ακίνητο παρατηρητή) μόλις το σώμα κατέβει στην βάση είναι $v_\mu = \alpha_\mu t \xrightarrow{(S.I)} v_\mu = 0,24\frac{m}{s^2}0,5s \Rightarrow v_\mu = 0,12\frac{m}{s}$

στ. Η σχετική ταχύτητα του σώματος $\vec{v}_{\sigma\chi}$ (ως προς την βάση) μόλις το σώμα κατέβει είναι $v_{\sigma\chi} = \alpha_{\sigma\chi}t \xrightarrow{(S.I)} v_{\sigma\chi} = 6,192\frac{m}{s^2}0,5s \Rightarrow v_{\sigma\chi} = 3,096\frac{m}{s}$.

Σχόλιο: Οι αντίστοιχες συνιστώσες της σχετικής ταχύτητας του σώματος $\vec{v}_{\sigma\chi}$ (ως προς την βάση) είναι $v_{\sigma\chi,x} = \alpha_{\sigma\chi,x}t \xrightarrow{(S.I)} v_{\sigma\chi,x} = 4,9536\frac{m}{s^2}0,5s \Rightarrow v_{\sigma\chi,x} = 2,4768\frac{m}{s}$.

$$v_{\sigma\chi,y} = \alpha_{\sigma\chi,y}t \xrightarrow{(S.I)} v_{\sigma\chi,y} = 3,7152\frac{m}{s^2}0,5s \Rightarrow v_{\sigma\chi,y} = 1,8576\frac{m}{s}.$$

Προφανώς $v_{\sigma\chi} = \sqrt{v_{\sigma\chi,x}^2 + v_{\sigma\chi,y}^2} \xrightarrow{(S.I)} v_{\sigma\chi} = 3,096\frac{m}{s}$.

ζ. Η απόλυτη ταχύτητα ως προς ακίνητο παρατηρητή $\vec{v} = \vec{v}_{σχ} + \vec{v}_{\mu}$ με τις $\vec{v}_{σχ}$ και $\vec{v}_{\mu}$ να σχηματίζουν γωνία $\theta = 180^\circ - \varphi$, οπότε

$$v = \sqrt{v_{σχ}^2 + v_{\mu}^2 + 2v_{σχ}v_{\mu}\cos(180^\circ - \varphi)} \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{v_{σχ}^2 + v_{\mu}^2 - 2v_{σχ}v_{\mu}\sin\varphi} \xrightarrow{(S.I)} \Rightarrow$$

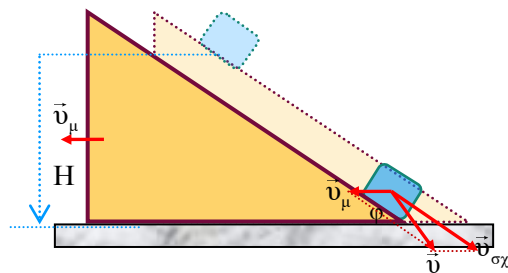
$$v = \sqrt{3,096^2 + 0,12^2 - 2 \cdot 3,096 \cdot 0,12 \cdot 0,8} \Rightarrow$$

$$v = 3,000 \text{ m/s}.$$

Η απόλυτη ταχύτητα του σώματος υπολογίζεται και από την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας για το σύστημα:

$$E_{\mu(\text{αρχική})} = E_{\mu(\text{τελική})} \Rightarrow U_{\text{βάσης}} + mgH = U_{\text{βάσης}} + \frac{1}{2}Mv_{\mu}^2 + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow 2mgH = Mv_{\mu}^2 + mv^2$$

$$\xrightarrow{(S.I)} 2 \cdot 0,5 \cdot 10 \cdot 0,4644 = 9,82 \cdot 0,12^2 + 0,5 \cdot v^2 \Rightarrow v = 3,000 \text{ m/s}$$



Σχόλιο: Στην ανωτέρω κίνηση το σύστημα είναι μονωμένο στον οριζόντιο άξονα, οπότε έχουμε διατήρηση της ορμής $\vec{P}_{\text{αρχική}} = \vec{P}_{\text{τελική}} \Rightarrow 0 = \underbrace{-Mv_{\mu} + mv_x}_{\text{απόλυτες ταχύτητες}} \Rightarrow 0 = -Mv_{\mu} + m(v_{\text{σχ},\chi} - v_{\mu})$

$$\Rightarrow v_{\mu} = \frac{mv_{\text{σχ},\chi}}{m + M} \text{ σχέση που με βάση τις προηγούμενες τιμές επιβεβαιώνεται!}$$