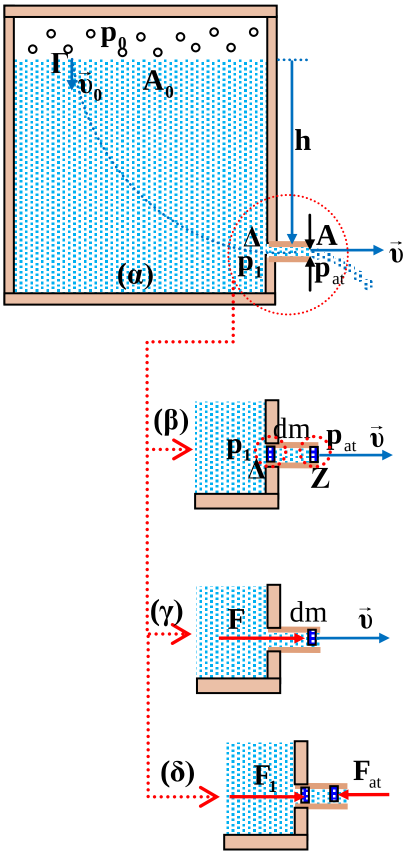
Η δύναμη στην εκροή του ρευστού … και μια συνηθισμένη λανθασμένη προσέγγιση.



Το κλειστό δοχείο του σχήματος περιέχει υγρό με πυκνότητα ρ με αποκλεισμένο αέρα στο πάνω μέρος του πίεσης p_0. Σε ένα σημείο του δοχείου στο πλευρικό τοίχωμα σε βάθος h δημιουργούμε ένα πολύ μικρό άνοιγμα με εμβαδόν A [πολύ μικρότερο από το εμβαδόν της ελεύθερης επιφάνεια του υγρού και του δοχείου]

Αναζητούμε το ρυθμό μεταβολής της ορμής $\frac{dP}{dt}$ του υγρού στην εκροή.

Ο ανωτέρω ρυθμός μεταβολής $\frac{dP}{dt}$ σύμφωνα με τον 2^{ο} νόμο Newton ισούται με τη δύναμη που δέχεται κάθε στοιχειώδης μάζα υγρού κατά την στιγμή της εκροής.

Αρχικά ας υπολογίσουμε την ταχύτητα εκροής εφαρμόζοντας την εξίσωση Bernoulli για το σημείο Γ και το σημείο εξόδου της ρευματικής γραμμής του σχήματος (α) …

$p_{at}+\frac{1}{2}\rho\upsilon^2=p_0+\frac{1}{2}\rho\upsilon_0^2+\rho gh$ (1). Επειδή η διατομή εκροής A είναι πολύ πιο μικρή από το εμβαδόν της ελεύθερης επιφάνειας $A<<A_0$ από τον νόμο της συνέχειας $A\upsilon=A_0\upsilon_0$ θα έχουμε $\upsilon_0<<\upsilon$ και μας επιτρέπει με ικανοποιητική προσέγγιση την παράλειψη του όρου $\frac{1}{2}\rho\upsilon_0^2$ στην εξίσωση (1), που γράφεται $p_{at}+\frac{1}{2}\rho\upsilon^2=p_0+\rho gh$ και από την οποία παίρνουμε $\upsilon=\sqrt{\frac{2(p_0-p_{at})}{\rho}+2gh}$ (2).

Μια στοιχειώδης μάζα $dm=\rho dV$ κατά την απειροστή διάρκεια εξόδου dt από την διατομή A (σχήμα β) αυξάνει την ορμή της κατά $dP=P_{\substack{\text{αμέσως μετά}\\\text{την έξοδο}}}-P_{\substack{\text{αμέσως πριν}\\\text{την έξοδο}}}$ ή

$$dP=dm\upsilon_{εξόδου}-dm\underbrace{\upsilon_{\substack{αρχή\\εξόδου}}}_{\approx 0}\xrightarrow{\upsilon_{εξόδου}=\upsilon} dP=dm\upsilon \text{ ή } \frac{dP}{dt}=\frac{dm}{dt}\upsilon \text{ ή } \frac{dP}{dt}=\frac{\rho dV}{dt}\upsilon\xrightarrow{\frac{dV}{dt}=\Pi} \text{ ή}$$

$$\mathbf{\frac{dP}{dt}=\rho\Pi\upsilon}\xrightarrow{\Pi=A\upsilon}\frac{dP}{dt}=\rho A\upsilon.\upsilon \text{ ή } \mathbf{\frac{dP}{dt}=\rho A\upsilon^2} \text{ (3).}$$

Εξαιτίας αυτής της μεταβολής της ορμής η ποσότητα που εκρέεται δέχεται δύναμη (σχήμα γ) $\mathbf{F=\frac{dP}{dt}=\rho A\upsilon^2}\xrightarrow{(2)}F=\rho A\left(\frac{2(p_0-p_{at})}{\rho}+2gh\right)$ ή $F=2A\left[(p_0-p_{at})+\rho gh\right]$

Βασίλειος Τσούνης www.btsounis.gr mail@btsounis.gr

$\xrightarrow{\Delta p = p_0 - p_{at}}$ $\mathbf{F = 2A(\Delta p + \rho g h)}$ και αν $p_0 = p_{at}$ ή $\Delta p = 0$ έχουμε $\mathbf{F = 2A\rho g h}$. Προφανώς το υπόλοιπο ρευστό σύμφωνα με τον τρίτο νόμο Newton δέχεται την αντίθετη αυτής.

Μια συνηθισμένη ... αλλά λανθασμένη προσέγγιση!

Μια άλλη λανθασμένη προσέγγιση που δίνεται για το ανωτέρω θέμα είναι …

Για την εξερχόμενη στοιχειώδη μάζα (σχήματα β και δ) έχουμε $\frac{dP}{dt} = \Sigma F$ ή $dP = \Sigma F dt$

$\xrightarrow[\text{σχήμα (δ)}]{\Sigma F = F_1 - F_{at}}$ $dP = (F_1 - F_{at})dt$ $\xrightarrow{\text{σχήμα (β)}}$ $dP = (p_1 A - p_{at} A)dt$ ή $dP = (p_1 - p_{at})Adt$ (4).

Εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli για την ρευματική γραμμής από το Δ μέχρι το Ζ του σχήματος (β) … $p_1 + \frac{1}{2}\rho \upsilon_0^2 = p_{at} + \frac{1}{2}\rho \upsilon^2$ $\xrightarrow{\upsilon_0 \cong 0}$ $p_1 = p_{at} + \frac{1}{2}\rho \upsilon^2$ ή $p_1 - p_{at} = \frac{1}{2}\rho \upsilon^2$

και αντικαθιστώντας στην σχέση (4) παίρνουμε … $dP = \frac{1}{2}\rho \upsilon^2 Adt$ ή $\mathbf{\frac{dP}{dt} = \frac{1}{2}\rho A \upsilon^2}$ **που είναι το ήμισυ της τιμής που βρήκαμε προηγουμένως ….σχέση (3) !!**

Γιατί αυτή η διαφορά;

Η δύναμη που χρησιμοποιείται $\Sigma F = F_1 - F_{at}$ ή $\Sigma F = (p_1 - p_{at})A$ δεν είναι η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στη στοιχειώδη εξερχόμενη μάζα κατά την διάρκεια της εξόδου, αλλά η διαφορά δύο δυνάμεων που ασκούνται σε εξερχόμενο τμήμα σε δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές και θέσεις του εξερχόμενου τμήματος (όσο και αν αυτές απέχουν απειροελάχιστα). Η μια δύναμη $F_1 = p_1 A$ είναι αυτή που ασκείται και ωθεί προς την έξοδο την μάζα dm κατά την έναρξη εξόδου … και η άλλη $F_{at} = p_{at} A$ αυτή που αντιτίθεται στην έξοδο της μάζας dm κατά το τέλος της εξόδου.

Επίσης εδώ δεν έχουμε μόνο μια μάζα dm που από $\upsilon_0 \cong 0$ αποκτά ταχύτητα υ, αλλά και μείωση της μάζας του ρευστού ... και είναι κάτι ανάλογο με την προωθητική δύναμη στον πύραυλο με την καύση και εκροή αερίων.... Περισσότερα στην παράγραφο 2.6.11 του βιβλίου μου « Μηχανική των Ρευστών».

Βασίλειος Τσούνης www.btsounis.gr mail@btsounis.gr