

1^η Επαναληπτική εργασία: Μηχανικές ταλαντώσεις

1^ο Θέμα: α-Σ, β-Λ, γ-Λ, δ-Σ, ε-Λ

2^ο Θέμα:

Αρχικά: $x_1 = A \eta \mu(\omega t)$, $x_2 = A \theta \omega(\omega t) = A \eta \mu(\omega t + \frac{\pi}{2})$, $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$

πλάτος σύνθετης ταλάντωσης: $A' = \sqrt{A^2 + 2AA\cos\frac{\pi}{2}} \Rightarrow A' = A\sqrt{2}$

Ενέργεια: $E = \frac{1}{2} D A'^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 (A\sqrt{2})^2 = m \omega^2 A^2$

Τελικά: $x_1 = A \eta \mu(\omega t)$, $x_2 = A \eta \mu(\omega t + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}) = A \eta \mu(\omega t + \frac{2\pi}{3})$, $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{3}$

πλάτος σύνθετης ταλάντωσης: $A'' = \sqrt{A^2 + A^2 + 2AA\cos\frac{2\pi}{3}} \Rightarrow A'' = A$

Ενέργεια: $E' = \frac{1}{2} D A''^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = 0,5 m \omega^2 A^2$

Ποσοστό γειωμένης:

$$\eta\% = \frac{E' - E}{E} \cdot 100\% = \frac{0,5 m \omega^2 A^2 - m \omega^2 A^2}{m \omega^2 A^2} \cdot 100\% = -50\% \Rightarrow \eta\% = -50\%$$

Αρα βωβτη η βχέση (δ).

3^ο Θέμα:

Αρχικά: $f_{\text{διακ}} = \frac{N_0}{t} = \frac{20}{10} = 2 \text{ Hz} \Rightarrow f_1 - f_2 = 2 \text{ Hz}$

$f_{\text{αλ}} = \frac{N_{\text{αλ}}}{t} = \frac{250}{10} = 25 \text{ Hz} \Rightarrow \frac{f_1 + f_2}{2} = 25 \text{ Hz} \Rightarrow f_1 + f_2 = 50 \text{ Hz}$

Μετά: $f'_{\text{διακ}} = f_1 - f'_2 = f_1 - (f_2 - 2) = f_1 - f_2 + 2 = 2 + 2 = 4 \text{ Hz} \Rightarrow f'_{\text{διακ}} = 4 \text{ Hz}$

$f'_{\text{αλ}} = \frac{f_1 + f'_2}{2} = \frac{f_1 + f_2 - 2}{2} = \frac{f_1 + f_2}{2} - 1 \Rightarrow f'_{\text{αλ}} = \frac{50}{2} - 1 \Rightarrow f'_{\text{αλ}} = 24 \text{ Hz}$

α) Το πλάτος γηδενίζεται γε περίοδο αωη δυν διακροσθήκαιη,
 να'θ ε $\Delta t = T'_\delta = \frac{1}{f'_\delta} = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ s}$ α-Λ

β) Η ταχύτητα των ταλαντώη γηδενίεται, να'θ ε βωβη περίοδο
 $\Delta t = \frac{T_{\text{αλ}}}{2} = \frac{1}{f_{\text{αλ}} \cdot 2} = \frac{1}{24 \cdot 2} = \frac{1}{48} \text{ s} \Rightarrow \Delta t \approx 2083 \text{ ms}$ β-Λ

γ) Σε 10ς βχουε $N_\delta = f'_\delta \cdot t = 4 \text{ Hz} \cdot 10 \text{ s} = 40$ διακροσθήκαιη, ωρα
 40 γηδενίβωυ δυν πλάτους γ-Σ

δ) Σε 10ς βχουε $N_{\text{αλ}} = f_{\text{αλ}} \cdot t = 24 \cdot 10 = 240$ ταλαντώει, ωρα
 480 γηδενίβωυ τη ταχύτητα δ-Λ

4^η Θέση:

A) Θέση ισορροπίας $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow K \Delta l = mg$ (1)

$E_{\text{ελα}} = E_{\text{προσφ. ερδ. ενρ}} \Rightarrow \frac{1}{2} D \Delta^2 = W F \Rightarrow$

$\frac{1}{2} D \Delta^2 = F \Delta l \xrightarrow{D=K} \frac{1}{2} K \Delta^2 = F \Delta l$

(1) $\Rightarrow \frac{1}{2} K \Delta^2 = F \frac{mg}{K} \Rightarrow K^2 \Delta^2 = 2 F mg$

$\Rightarrow K = \sqrt{\frac{2 F mg}{\Delta}} \Rightarrow K = \sqrt{\frac{2 \cdot 800 \cdot 10}{0,4}} \Rightarrow K = 100 \frac{N}{m}$

$\therefore \text{και } \Delta l = 0,1 \text{ m}$

B) $A = A_0 e^{-\gamma t}$ γ $A_0 = 0,4 \text{ m}$

$A = A_0 e^{-\gamma t} \rightarrow \frac{A_0}{4} = A_0 e^{-1 \cdot 10 T} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^{-2} = e^{-10 T} \Rightarrow \ln 2 = 1 \cdot 10 T \Rightarrow \ln 2 = 1 \cdot 5 \cdot T$ (2)

$A = A_0 e^{-\gamma t} \xrightarrow{t=15 T} A_5 = A_0 e^{-15 \gamma T} = A_0 (e^{-5 \gamma T})^3$

(2) $\rightarrow A_5 = A_0 (e^{-\ln 2})^3 = A_0 2^{-3} = \frac{A_0}{8} = \frac{0,4}{8} = 0,05 \text{ m}$

$\Rightarrow A_{15} = 0,05 \text{ m}$

Γ.1) $F_{\text{αν}} = -b v = -0,5 v$ (SI) $\Rightarrow F_{\text{αν, max}} = -0,5 v_{\text{max}}$ (3)

$v_{\text{max}} = \omega A = 20 \cdot 0,05 \Rightarrow v_{\text{max}} = 1 \text{ m/s}$

(3) $\xrightarrow{\text{μέτρο}} F_{\text{αν, max}} = 0,5 \text{ N}$

Γ.2) Όταν το ελατήριο έχει την

μήκος 16 cm και η μάζα 60 g

εξαναρριμαγμένη κατά 10 cm

$y = +A = +0,05 \text{ m}$, όπου $v = 0$

και $F_{\text{αν}} = -0,2 v = 0$

$\Sigma F = m a \Rightarrow \underbrace{F_{\text{ελα}} + F_{\text{αν}}}_{\text{αλγεβρικά τιμές}} - D y = -m \omega^2 y$

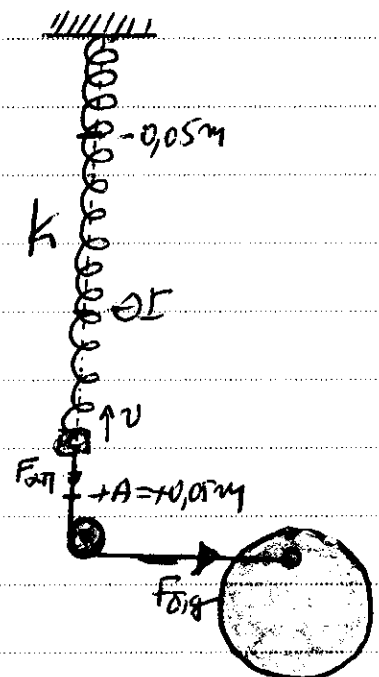
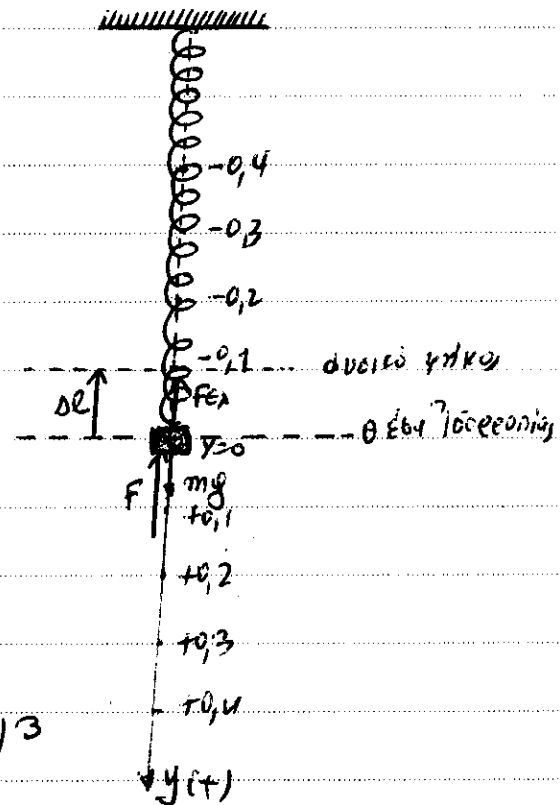
$\xrightarrow{\substack{F_{\text{αν}}=0 \\ y=+A \\ D=K}} F_{\text{ελα}} + 0 - K A = -m \omega^2 A \Rightarrow$

$\Rightarrow F_{\text{ελα}} = K A - m \omega^2 A$

$\Rightarrow F_{\text{ελα}} = 100 \cdot (+0,05) - 1 \cdot 400 \cdot 0,05 \Rightarrow F_{\text{ελα}} = -15 \text{ N}$

Άρα το μέτρο της είναι $F_{\text{ελα}} = 15 \text{ N}$

Γ.3) $\frac{dk}{dt} = \Sigma F \cdot v = m a \cdot v = m (-\omega^2 y) \cdot v = -m \omega^2 y v$



Είναι $m = 1 \text{ kg}$, $\omega = 20 \text{ rad/s}$, $y = 0,056 \text{ m}(20t) \text{ (SI)}$ και

$v = 1,6 \text{ m/s}(20t) \text{ (SI)}$, $\partial p q \xrightarrow{\text{SE}}$

$$\frac{dK}{dt} = -1 \cdot 20^2 \cdot 0,05 \text{ m}(20t) \cdot 1,6 \text{ m/s}(20t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dK}{dt} = -20 \text{ m/s}(20t) 1,6 \text{ m/s}(20t) \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -10 [2 \cdot \text{m/s}(20t) 1,6 \text{ m/s}(20t)]$$

$$\Rightarrow \frac{dK}{dt} = -10 \text{ m/s}(40t) \xrightarrow{t = \frac{0}{240 \text{ s}}} \frac{dK}{dt} = -10 \text{ m/s}(40 \frac{0}{240}) \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -5 \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

5^ο Θέμα

α) Για το σύστημα $(M_\Delta + M)$ η σταθερά

ελαστικότητας είναι $D = (M_\Delta + M)\omega^2$. $D = 2K$

$$\Rightarrow 2K = (M_\Delta + M)\omega^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{2K}{M_\Delta + M}$$

Για το παιδί η σταθερά ελαστικότητας

$$\text{είναι } D_1 = M\omega^2 \Rightarrow D_1 = M \frac{2K}{M_\Delta + M} \text{ ή}$$

$$D_1 = 2K \frac{M}{M_\Delta + M} \text{ . Για για 2 ομοιόμορφα}$$

και για τον ταλαντωτή - παιδί έχουμε

$$\Sigma F_y = -D_1 y \Rightarrow N - Mg = -D_1 y \Rightarrow N = Mg - D_1 y$$

$$N_{\max} = Mg - D_1(-A) \Rightarrow N_{\max} = Mg + D_1 A \quad (1)$$

$$N_{\min} = Mg - D_1(+A) \Rightarrow N_{\min} = Mg - D_1 A \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow N_{\max} + N_{\min} = 2Mg \Rightarrow M = \frac{N_{\max} + N_{\min}}{2g} = \frac{900 + 300}{2 \cdot 10}$$

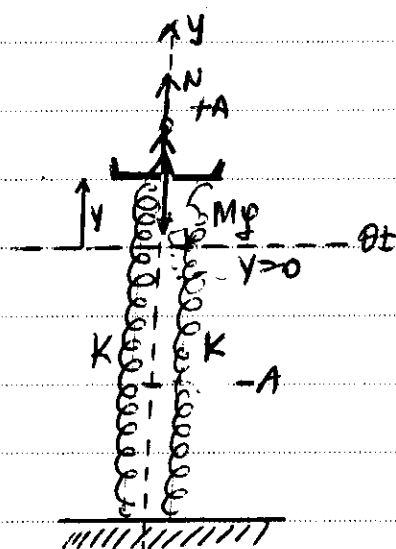
$$\Rightarrow M = 60 \text{ kg}$$

$$\text{β)} \Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow \frac{0}{5} = \frac{T}{2} \Rightarrow T = \frac{20}{5} \text{ s} ; \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{20/5} \text{ ή } \omega = 5 \text{ rad/s}$$

$$D = 2K = (M_\Delta + M)\omega^2 \Rightarrow K = \frac{(M_\Delta + M)\omega^2}{2} \Rightarrow K = \frac{(20 + 60)5^2}{2} \Rightarrow K = 1000 \text{ N/m}$$

$$\gamma) D_1 = M\omega^2 = 60 \cdot 5^2 = 1500 \text{ N/m} , (1) - (2) \Rightarrow N_{\max} - N_{\min} = 2DA$$

$$\Rightarrow A = \frac{N_{\max} - N_{\min}}{2D_1} \Rightarrow A = \frac{900 - 300}{2 \cdot 1500} \Rightarrow A = \frac{600}{3000} \Rightarrow A = 0,2 \text{ m}$$



δ) Θέση ισορροπίας ευεστότητας δίσκου - παιδιού

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow (M_D + M)g = 2k\Delta l_1 \Rightarrow \Delta l_1 = \frac{(M_D + M)g}{2k} = 0,4 \text{ m}$$

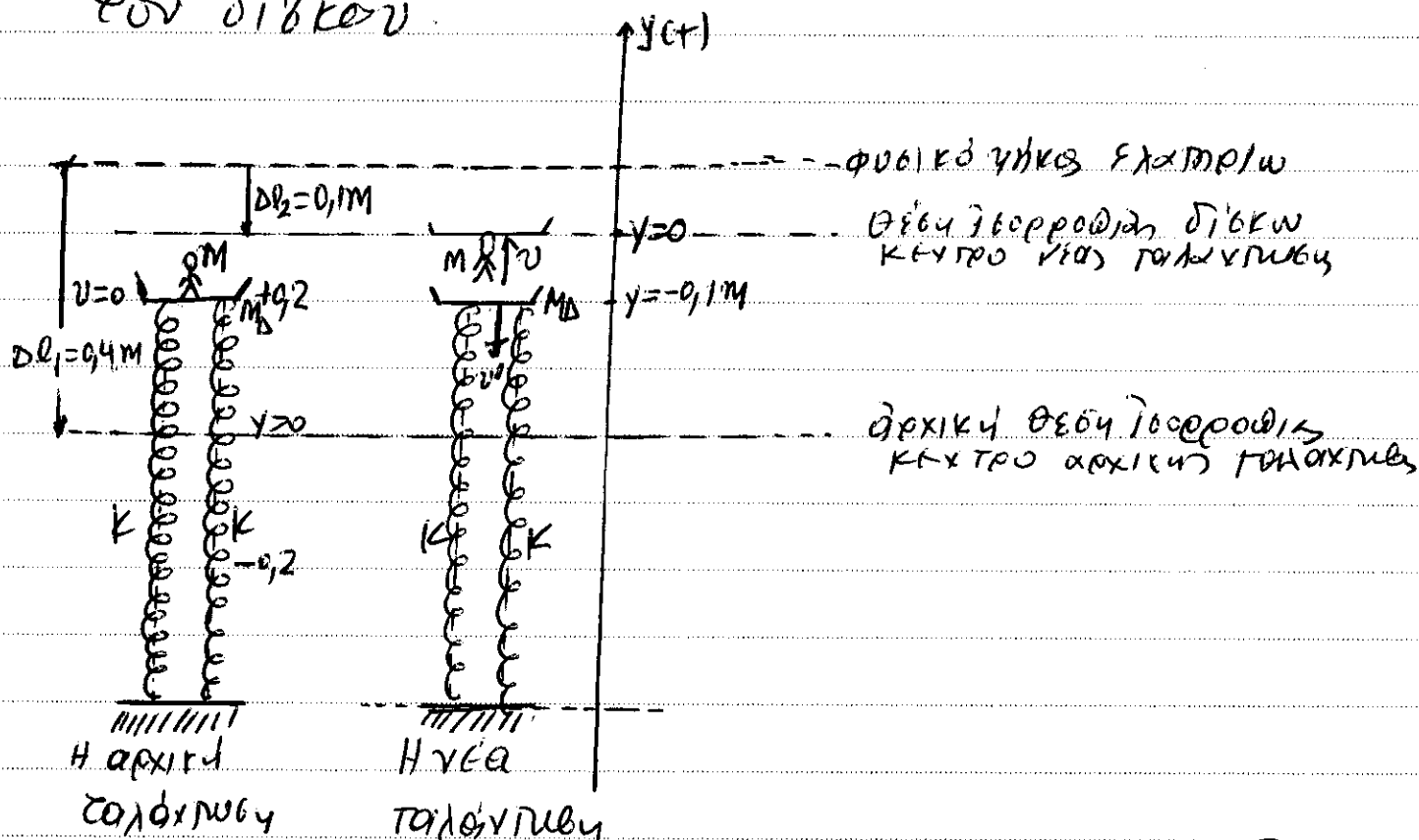
πάλι αφού το φυσικό γήκος των ελατηρίων

θέση ισορροπίας δίσκου

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow M_D g = 2k\Delta l_2 \Rightarrow \Delta l_2 = \frac{M_D g}{2k} = 0,1 \text{ m}$$

πάλι αφού το φυσικό γήκος των ελατηρίων.

Από όλα είναι κορε το γέω μέγιστο ταχύτητας του δίσκου.



$$\vec{P}_{\text{ολ}} = 0 \text{ παύση} \Rightarrow 0 = mv - M_D v' \Rightarrow v' = \frac{M v}{M_D} = \frac{60 \frac{2\sqrt{2}}{3}}{20} \Rightarrow v' = 2\sqrt{2} \text{ m/s}$$

Μόλις ο δίσκος αρχίσει τη νέα ταλάντωση έχει

$y = -0,1 \text{ m}$ και $v' = -2\sqrt{2} \text{ m/s}$. Τώρα η σταθερά ταλάντωσης του δίσκου είναι $D = 2k = 2000 \text{ N/m}$.

$$\text{Διατήρηση ενέργειας} \quad \frac{1}{2} D y^2 + \frac{1}{2} M_D v'^2 = \frac{1}{2} D A'^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A' = \sqrt{y^2 + \frac{M_D v'^2}{D}} \Rightarrow A' = \sqrt{0,1^2 + \frac{20 \cdot (2\sqrt{2})^2}{2000}} \Rightarrow A' = 0,3 \text{ m}$$

2η Επαναληπτική Εργασία: Μηχανικές Ταλαντώσεις

1η Θέμα: α-1, β-1, γ-ε, δ-1

Ειδικά για το (δ): Την ίδια στιγμή t ολόκληρη την συσκευή
για την κίνηση έχουμε $x = x_1 + x_2$ $\frac{D = m\omega^2}{\gamma \rho_0} - Dx = -Dx_1 - Dx_2$
 $\Rightarrow F = F_1 + F_2$

2η Θέμα: α-1, β-1, γ-ε, δ-1, ε-1, στ-ε, ζ-ε

Ειδικά για το (ζ)

$$\left. \begin{array}{lll} t=0 & NT & 2NT \\ A_0 & A_1 & A_2 = \frac{A_0}{2} \\ E_0 = \frac{1}{2}DA_0^2 & E_1 = \frac{1}{2}DA_1^2 & E_2 \end{array} \right\} \frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} \Rightarrow A_1^2 = A_0 A_2 = A_0 \frac{A_0}{2} = \frac{A_0^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_1 = \frac{A_0}{\sqrt{2}}, E_1 = \frac{1}{2}D \frac{A_0^2}{2} = \frac{E_0}{2} = 0,5E_0$$

$$\pi\% = \frac{E_1 - E_2}{E_0} 100\% = \frac{0,5E_0 - E_0}{E_0} 100\% = \frac{-0,5E_0}{E_0} 100\% = -50\%$$

δρα γ-6ω6ν'

3η Θέμα:

$$D = k = m\omega_0^2 \Rightarrow 160\pi^2 = 0,1\omega_0^2$$

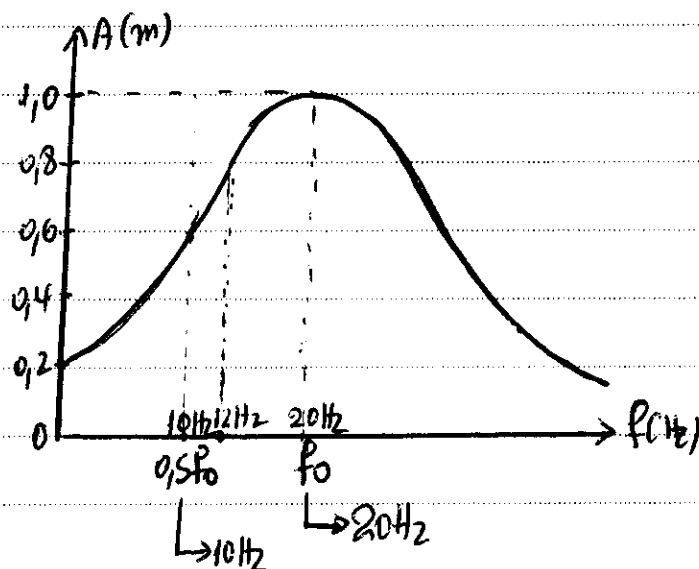
$$\Rightarrow \omega_0 = 40\pi \text{ rad/s} \Rightarrow 2\pi f_0 = 40\pi$$

$$\Rightarrow f_0 = 20 \text{ Hz}$$

$N = 120$ ταλαντώσεις σε $t = 10 \text{ s} \dots$

Συνεπώς είναι

$$f = \frac{N}{t} = \frac{120}{10} \Rightarrow f = 12 \text{ Hz}$$



Από το διάγραμμα παρατηρείται ότι για $f = 12 \text{ Hz}$ το πλάτος είναι γύρω στα $0,6 \text{ m}$ και 1 m αφού $A < 1,0 \text{ m}$
Όρα 6ω6ν' η σχέση δ.

4^ο θέμα :1^η ζαλάντωση :

Σταθερά ελαστικότητας

$$D = k_1 + k_2$$

$$\text{πλάτος } A_1 = A$$

$$\text{Ενέργεια } E_1 = \frac{1}{2} D A_1^2$$

$$\Rightarrow E_1 = \frac{1}{2} (k_1 + k_2) A^2 \quad (1)$$

$$\text{Περίοδος } T_1 : D = k_1 + k_2 = m_1 \omega_1^2 \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m_1}}, T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{k_1 + k_2}}$$

$$\underline{m_1 = m} \rightarrow T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}} \quad (2)$$

2^η ζαλάντωση : Σταθερά ελαστικότητας $D = k_1 + k_2$ (ίδια)πλάτος ταλάντωσης $A_2 = A$ (ίδιο... γιατί) ερχόμαστε πάλι στην ίδια κατάσταση αυτή είναι χωρίς να έχουμε στην δεξιά $x_1 = +A_1 = +A$)

$$\text{Ενέργεια } E_2 = \frac{1}{2} D A_2^2 = \frac{1}{2} (k_1 + k_2) A^2 \quad (3)$$

$$\text{Περίοδος } T_2 : T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k_1 + k_2}} \xrightarrow{m_1 = m, m_2 = 3m} T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{4m}{k_1 + k_2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_2 = 4\pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}} \quad (4)$$

α) Από (1), (3) παρατηρούμε ότι $E_1 = E_2$

Άρα α - λήθος

β) Από (2), (4) παρατηρούμε ότι $T_2 = 2T_1$

Άρα β - σωστή.

5^ο θέμα

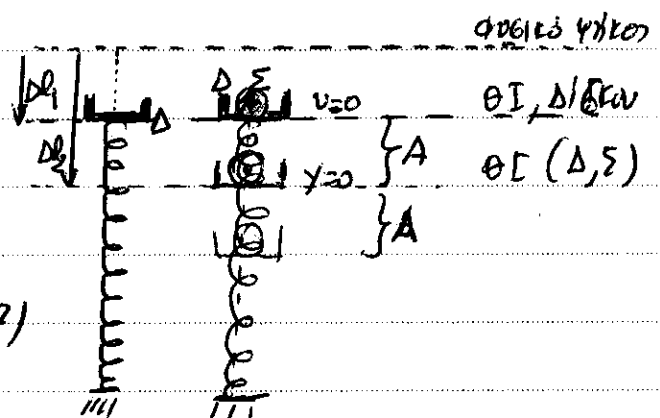
Θέμα 1ο ομορροδίας δίδκου

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow M_D g = k \Delta l_1 \Rightarrow \Delta l_1 = \frac{M_D g}{k} \quad (1)$$

Θέμα 2ο ομορροδίας δίδκου - βωτάριος

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow (M_D + M_E) g = k \Delta l_2 \Rightarrow \Delta l_2 = \frac{(M_D + M_E) g}{k} \quad (2)$$

Μόλις αφηγούνται το βωτάριος πάνω



στο δίδκο αετός έχει ταχύτητα v και αερίζεται από τη θέση βοορροδία του συντηγίου δίδκου-δωλα αιώστασης $\Delta\phi_2 - \Delta\phi_1 = \frac{(M_D + M_E)g}{K} - \frac{M_D g}{K} = \frac{M_E g}{K}$ που προφανώς είναι περί το ηδδτος $\frac{K}{K}$ της ταλάντωσης...

$A = \frac{M_E g}{K}$... που εξαρτάται μόνο από τη θέση του σώματος Σ αν απήσπεσε στο δίδκο. Άρα βωστή η πρόταξη (β).

β-Θέμα

Αρχικά η διαφορά φάσης που δύο ταλαντώσεις είναι

$$\Delta\phi_1 = \omega \Delta t_1 = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}. \text{ Το ηδδτος της συνθετης ταλάντωσης,}$$

$$\text{είναι } A' = \sqrt{A^2 + A^2 + 2AA\cos\frac{\pi}{2}} = A\sqrt{2} \text{ και η συχνότητα } \tilde{E} = \frac{1}{2}DA'^2$$

$$\text{και } D = m\omega^2$$

$$\text{Τελικά } \tilde{E}' = \frac{\tilde{E}}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}DA''^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}DA'^2 \Rightarrow A'' = \frac{A'}{\sqrt{2}} = \frac{A\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = A$$

$$A'' = \sqrt{A^2 + A^2 + 2AA\cos\Delta\phi_2} \Rightarrow A^2 = 2A^2 + 2A^2\cos\Delta\phi_2 \Rightarrow \cos\Delta\phi_2 = -\frac{1}{2}$$

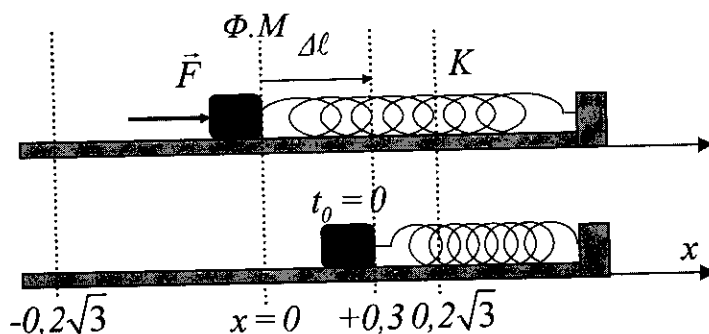
$$\Rightarrow \Delta\phi_2 = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \omega \Delta t_2 = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} \Delta t_2 = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{T}{3}$$

Άρα βωστή η πρόταξη (γ)

790ε'γ'α

$$\Delta.1. E_{\text{ταλ}} = W_F = F\Delta\ell \Rightarrow E_{\text{ταλ}} = 20N \cdot 0,3m \Rightarrow E_{\text{ταλ}} = 6J$$

$$E_{\text{ταλ}} = \frac{1}{2}DA_1^2 \Rightarrow A_1 = \sqrt{\frac{2E_1}{D}} \Rightarrow A_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 6}{100}} \Rightarrow A_1 = 0,2\sqrt{3}m$$



Δ.2. Οι εξισώσεις εύκολα βρίσκονται ...

$$x = 0,2\sqrt{3}\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ και } v = 2\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu\left(10t + \frac{\pi}{3}\right)$$

Δ.3. Μόλις ο ταλαντωτής διέρχεται από την θέση $x = 0,3m$ κινούμενος προς το κέντρο η ταχύτητά του υπολογίζεται $v = -\sqrt{3}m/s$. Ο ρυθμός μεταβολής της

δυναμικής ενέργειας στη θέση αυτή είναι: $\frac{dU}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{2}Dx^2\right)}{dt} \Rightarrow \frac{dU}{dt} = \frac{1}{2}2Dx \frac{dx}{dt}$

$$\Rightarrow \frac{dU}{dt} = Dxv \Rightarrow \frac{dU}{dt} = 100 \cdot 0,3(-\sqrt{3}) \Rightarrow \frac{dU}{dt} = -30\sqrt{3} \frac{J}{s}$$

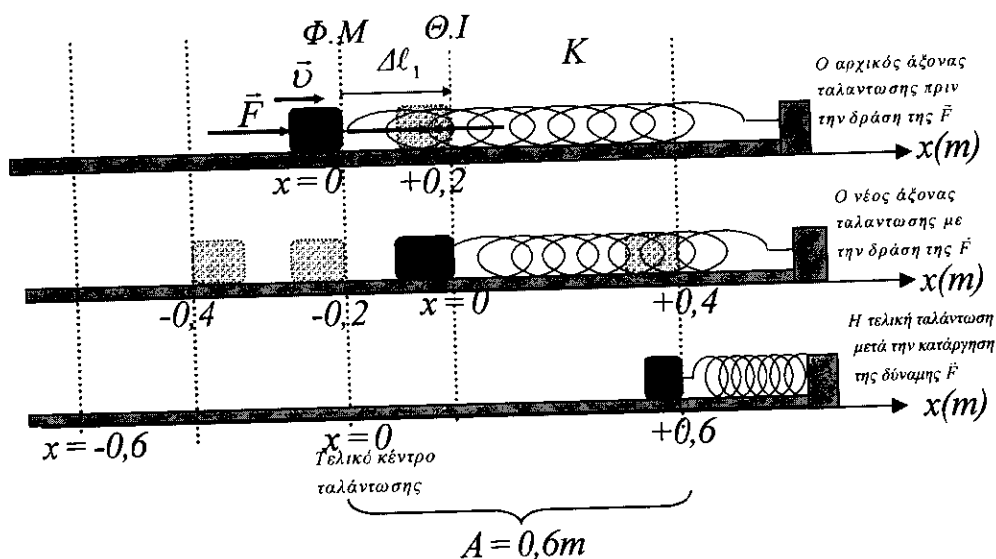
Δ.4. Μόλις το σώμα διέρχεται από την θέση ισορροπίας του που ταυτίζεται με το φυσικό μήκος έχει ενέργεια $E_1 = 6J$ μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης $v = 2\sqrt{3} \frac{m}{s}$

και εκεί του ασκείται η ηλεκτρική δύναμη $F = 20N$. Μετά την άσκηση της ηλεκτρικής δύναμης και αν αυτή δρούσε συνεχώς το σώμα θα έκανε απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος A_2 , σταθερά επαναφοράς $D = K = 100N/m$, $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$

$\Rightarrow \omega = 10rad/s$ (βλέπε ανάρτηση) και κέντρο ταλάντωσης στη θέση όπου το ελατήριο έχει παραμόρφωση $\Delta\ell_1$ και ισχύει $\Sigma Fx = 0 \Rightarrow F = K\Delta\ell_1 \Rightarrow 20 = 100\Delta\ell_1 \Rightarrow \Delta\ell_1 = 0,2m$. Για την ταλάντωση αυτή ορίζουμε νέο άξονα ταλάντωσης με $x = 0$ στην θέση $\Delta\ell_1 = 0,2m$. Μόλις αρχίζει η ταλάντωση αυτή η θέση του ταλαντωτή ήταν στην θέση του φυσικού μήκους που για το νέο σύστημα είναι $x = -0,2m$ και είχε ταχύτητα $v = +2\sqrt{3} \frac{m}{s}$. Το νέο πλάτος A_2 θα είναι

$$\frac{1}{2}Dx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}DA_2^2 \Rightarrow A_2 = \sqrt{x^2 + \frac{mv^2}{D}} \dots A_2 = 0,4m \text{ και η εξίσωση απομάκρυνσης ...είναι } x = 0,4\eta\mu\left(10t - \frac{\pi}{6}\right) (S.I)$$

Η δύναμη $\vec{F}$ καταργείται την $t = \frac{62\pi}{30}s$ (Θεωρήθηκε νέα αρχή χρόνων)...που ο



$$\text{ταλαντωτής ήταν στη θέση } x = 0,4\eta\mu\left(10\frac{62\pi}{30}s - \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow$$

$$x = 0,4\eta\mu\left(20\pi + \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \dots x = 0,4m \text{ δηλαδή στη ακραία θετική όπου}$$

προφανώς η ταχύτητα είναι μηδέν.

Τώρα έχουμε την ζητούμενη τελική ταλάντωση η οποία όμως γίνεται γύρω από το αρχικό κέντρο ταλάντωσης που είναι το φυσικό μήκος του ελατηρίου. Επειδή μόλις αρχίζει η ταλάντωση αυτή, ο ταλαντωτής δεν έχει ταχύτητα η απόστασή του από τη θέση ισορροπίας της νέας ταλάντωσης θα είναι το πλάτος A της ταλάντωσης. Από το σχήμα φαίνεται ότι $A = 0,6m$.

Το έργο της $\vec{F}$ για όλη την διάρκεια της δράσης της ισούται με την πρόσθετη ενέργεια που έχει η τελική ταλάντωση (μόλις καταργήθηκε η $\vec{F}$) έναντι αυτής που είχε η υπάρχουσα ταλάντωση μόλις έδρασε η $\vec{F}$.

$$W_F = \frac{1}{2}DA^2 - \frac{1}{2}DA_1^2 \Rightarrow W_F = \frac{1}{2}100 \cdot 0,6^2 - \frac{1}{2}100(0,2\sqrt{3})^2 \Rightarrow W_F = 12J$$

...και διαφορετικά ...

Η $\vec{F}$ είναι συντηρητική δύναμη και το έργο της είναι μηδέν σε κλειστή διαδρομή ...το μόνο τμήμα που δεν ανήκει σε κλειστή διαδρομή είναι το τμήμα από

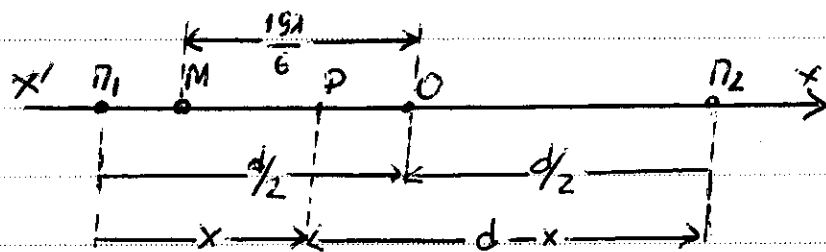
$x = -0,2m$ έως $x = +0,4m$ (μήκος $0,6m$) όταν αυτό το διέγραψε αμέσως πριν την κατάργησή της.

$$\text{άρα } W_F = F \Delta x \Rightarrow W_F = 20N \cdot 0,6m \Rightarrow W_F = 12J$$

3^ο Θέμα:

$$a) \pi_1 M = \frac{d}{2} - \frac{19\lambda}{6}, \pi_2 M = \frac{d}{2} + \frac{19\lambda}{6}$$

$$\pi_1 M - \pi_2 M = -2\frac{19\lambda}{6} = -\frac{19\lambda}{3}$$



$$A_M = \left| 2A \sin \pi \frac{-19\lambda/3}{\lambda} \right| = \left| 2A \sin \frac{19\pi}{3} \right| = \left| 2A \sin (\pi + \pi/3) \right| = A \Rightarrow A_M = A$$

β) Έστω ένα σημείο P των ελαστικών. Γίνεται 3νί'σχυρος...

$$\pi_1 P - \pi_2 P = k\lambda \Rightarrow x - (d-x) = k\lambda \Rightarrow 2x - d = k\lambda \Rightarrow 2x = d + k\lambda \Rightarrow x = \frac{d}{2} + k\frac{\lambda}{2}$$

$$\pi_1 M < x < \pi_1 O \Rightarrow \frac{d}{2} - \frac{19\lambda}{6} < x < \frac{d}{2} \Rightarrow \frac{d}{2} - \frac{19\lambda}{6} < \frac{d}{2} + k\frac{\lambda}{2} < \frac{d}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{19\lambda}{6} < k\frac{\lambda}{2} < 0 \Rightarrow -\frac{19}{6} < k/2 < 0 \Rightarrow -9.33 < k < 0 \text{ και εφ'αυτῇ καινούριη}$$

$$\Rightarrow k = -6, -5, -4, -3, -2, -1 \text{ ὅπου υπάρχουν ἔξ. (6) υπερβολές}$$

3νί'σχυρος.

δ) Αν τώρα το P είναι γυμνό ὁδοῦσενος $\pi_1 P - \pi_2 P = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$

$$\Rightarrow x - (d-x) = k\lambda + \frac{\lambda}{2} \Rightarrow 2x - d = k\lambda + \frac{\lambda}{2} \Rightarrow x = \frac{d}{2} + k\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}$$

$$\frac{d}{2} - \frac{19\lambda}{6} < x < \frac{d}{2} \Rightarrow \frac{d}{2} - \frac{19\lambda}{6} < \frac{d}{2} + \frac{k\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} < \frac{d}{2} \Rightarrow -\frac{19\lambda}{6} < k\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} < 0$$

$$\Rightarrow -\frac{41\lambda}{12} < k\frac{\lambda}{2} < -\frac{\lambda}{4} \Rightarrow -\frac{41}{6} < k < -\frac{1}{2} \Rightarrow -6.83 < k < -0.5$$

ὅρα $k = -6, -5, -4, -3, -2, -1$... υπάρχουν και ἔξ. (6)
υπερβολές, ὁδοῦσενος

... ἀναγράφονται! (γιατί;)

4^ο Θέμα:

A) $x_{k0,\lambda} = k\frac{\lambda}{2} = kx_1 \Rightarrow \lambda = 2x_1$ Έστω η σχέση A.2

B) $x_M = 3.5x_1 = 3.5\frac{\lambda}{2} = 5\frac{\lambda}{4} = (2 \cdot 2 + 1)\frac{\lambda}{4}$... Είναι ο 3^{ος} δεσμός
και προφανώς είναι συνεχώς ἀκίνητος

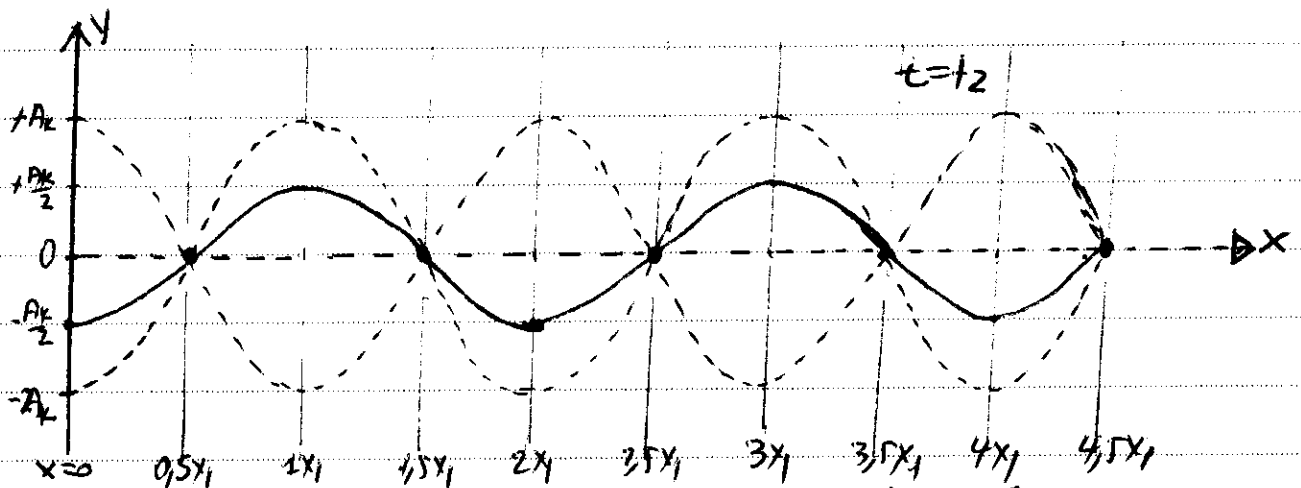
Έστω η πρόταση B.3

Γ) Τη στιγμή t_1 η κοιλία $O(x=0)$ που έχει ἔξ. ἔκταση z_0 γίνεται
όχι $y_0(t) = A_k \sin(\omega t)$ είναι ότι η θέση $y_0 = +A_k$, ...
 $+A_k = A \sin(\omega t_1) \Rightarrow \sin(\omega t_1) = 1 \Rightarrow \frac{2\pi}{T} t_1 = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow t_1 = kT + \frac{T}{4} \mid k=0,1,2,3,\dots$

Τη χρονική στιγμή $t_2 = t_1 + \frac{T}{3}$ η κοιλία $O(x=0)$ είναι σε
 αριστερό κρώβυ $y_0 = A \sin\left(\frac{2\pi}{T} t_2\right) \Rightarrow y_0 = A \sin\left[\frac{2\pi}{T} \left(t_1 + \frac{T}{4} + \frac{T}{3}\right)\right] \Rightarrow$
 $\Rightarrow y_0 = A \sin\left(2\pi t_1 + \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) = A \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = A \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{A}{2}$

Η θέση $x = 4,5\lambda = 4,5 \cdot \frac{\lambda}{2} = 9 \cdot \frac{\lambda}{4} = (2 \cdot 4 + 1) \frac{\lambda}{4}$ είναι θέση εξόχου
 μετά 4 πλήρη του 5 δεδω.

Στο σχήμα φαίνονται οι περιβάλλοντες του θύραϊου
 θέσεων της χορδής και το στιγμιότυπο των διαδίδου-
 κύματος στα την περιοχή $0 \leq x \leq 4,5\lambda$ τη χρονική
 στιγμή $t_2 = t_1 + \frac{T}{3}$



5ο Θέμα:

Δύο Η είναι στην 1^η υπερβολή

Επίσης γράφει $r_1 - r_2 = k\lambda \xrightarrow{k=1} r_1 - r_2 = 1\lambda \cdot (1) \quad (1)$

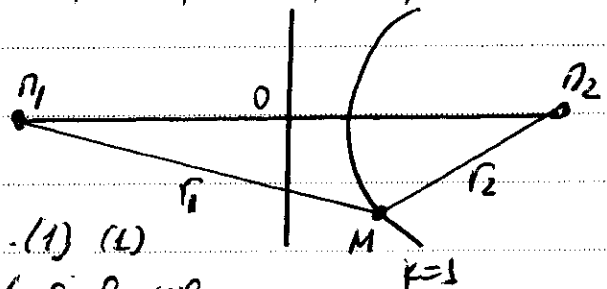
Μετά την αύξηση της συχνότητας σε $f' = f + \frac{f}{3} = \frac{4f}{3}$

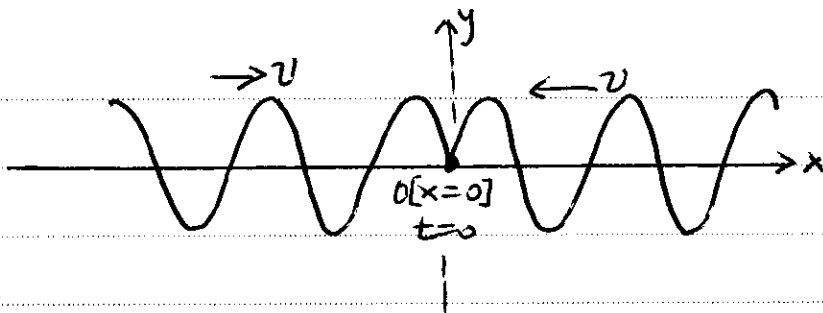
το νέο κύμα γίνεται $\lambda' = \frac{v}{f'} = \frac{v}{\frac{4f}{3}} = \frac{3}{4} \lambda \quad (2)$

Το δεύτερο ταλάντωμα των Η είναι $A_M = \left| 2A \cos \pi \frac{r_1 - r_2}{\lambda'} \right| \cdot \frac{1,3}{2}$

$$\Rightarrow A_M = \left| 2A \cos \pi \frac{\lambda}{\frac{3}{4}\lambda} \right| = \left| 2A \cos \frac{4\pi}{3} \right| = \left| 2A \cos \left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) \right| = \left| 2A \left(-\frac{1}{2}\right) \right| = A$$

$\Rightarrow A_M = A$. Άρα το πλάτος του Μ θα μειωθεί από 2A
 σε A δηλαδή θα μειωθεί κατά $\Delta A_M = A$ Σωστή η (β)



6^η Θέση

a) $y_0(t) = 4 \cdot 10^{-2} \sin(20\pi t)$ SI

$$\omega = 20\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow f = 10 \text{ Hz} \Rightarrow T = 0,1 \text{ s}$$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{2 \text{ m}}{10 \text{ Hz}} \Rightarrow \lambda = 0,2 \text{ m}$$

$$y_1(x,t) = 4 \cdot 10^{-2} \sin(20\pi t - \frac{20\pi x}{0,2}) \Rightarrow y_1(x,t) = 4 \cdot 10^{-2} \sin(20\pi t - 10\pi x) \text{ (SI)}$$

$$y_2(x,t) = 4 \cdot 10^{-2} \sin(20\pi t + 20\pi x) \text{ (SI)}$$

$$y_{\text{στ}}(x,t) = 2A \sin(\frac{20\pi x}{\lambda}) \sin(\omega t) = y_{\text{στ}}(x,t) = 0,08 \sin(10\pi x) \sin(20\pi t) \text{ SI}$$

β)

Το κύμα θα να διαχίσει

την απόσταση 0,4 μέτρων

$$\text{χρόνος } \Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{0,4 \text{ m}}{2 \text{ m/s}} = 0,2 \text{ s}$$

Το Δ αρχίζει την ταλάντωση εξαιτίας του $y_2(x,t)$ την $t = -0,2 \text{ s}$ και εξαιτίας της του $y_1(x,t)$ την $t = 0,2 \text{ s}$.

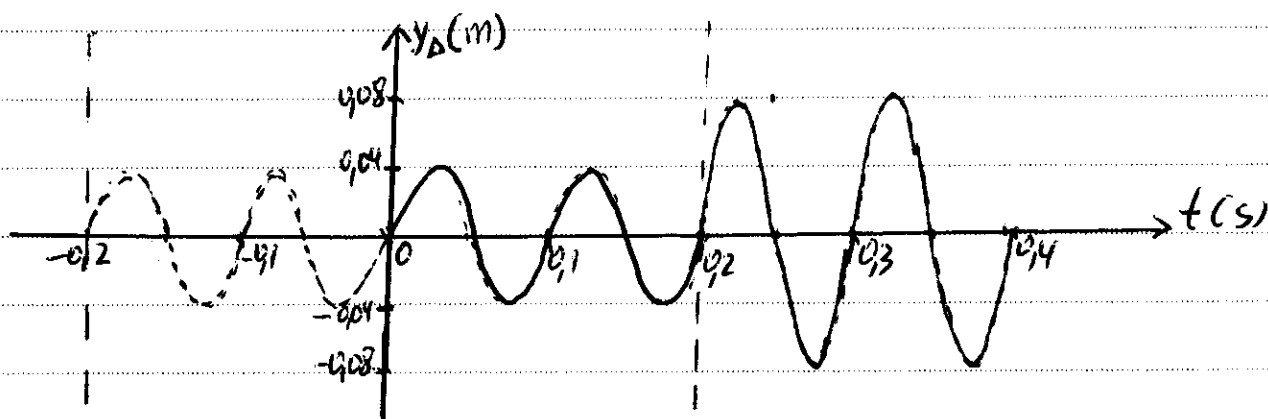
Έτσι η εξίσωση ταλάντωσης του Δ για $0 \leq t \leq 0,4 \text{ s}$ είναι

— Για $0 \leq t < 0,2 \text{ s}$ $y_{\Delta}(t) = 0,04 \sin(20\pi t + 10\pi \cdot 0,4)$ ή

$$y_{\Delta}(t) = 0,04 \sin(20\pi t + 4\pi) \text{ (SI)} \quad -0,2 \leq t < 0,2 \text{ s}$$

— Για $0,2 \leq t \leq 0,4 \text{ s}$ $y_{\Delta}(t) = 0,08 \sin(10\pi \cdot 0,4) \sin(20\pi t)$ ή

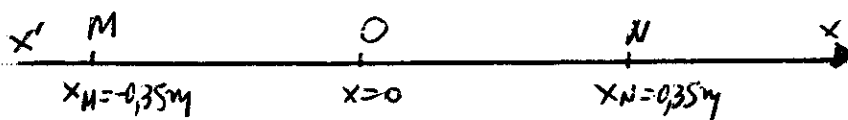
$$y_{\Delta}(t) = 0,08 \sin(20\pi t) \text{ για } t \geq 0,2 \text{ s}$$



Στην περιοχή αυτή το Δ ταλαντώνεται μόνο εξαιτίας του $y_2(x,t)$

Έδω το Δ ταλαντώνεται εξαιτίας του σταθιού κύματος $y_{\sigma 1}(x,t)$

δ)



$$A_M = \left| 2A \cos \frac{2\pi x_M}{\lambda} \right| = \left| 2A \cos \frac{2\pi}{0,2} (-0,35) \right| = \left| 2A \cos \frac{7\pi}{2} \right| = 0$$

$$A_N = \left| 2A \cos \frac{2\pi x_N}{\lambda} \right| = \left| 2A \cos \frac{2\pi}{0,2} (+0,35) \right| = \left| 2A \cos \frac{7\pi}{2} \right| = 0$$

Άρα $A_M = A_N = 0$, M, N δεσφοί.

δ) Θέτουμε κοιλιών $x = k \frac{\lambda}{2} = k \frac{0,2}{2} = 0,1k$ / $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$x_M \leq x \leq x_N \Rightarrow -0,35 \leq 0,1k \leq +0,35 \Rightarrow -3,5 \leq k \leq +3,5$$

$$\Rightarrow k = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$$

Άρα υπάρχουν εντά (7) κοιλίες

... και διαφορετικές ...

Επειδή M, N δεσφοί μεταξέ τους υπάρχει αμέγαρο πληθος

$$\text{αριθμ. κταν } (MN) = 0,7m = N \frac{\lambda}{2} \Rightarrow 0,7 = N \frac{0,2}{2} \Rightarrow N = 7 \text{ ατραυτοι,}$$

... 7 κοιλίες

ε) Τώρα αφού και πάλι στα M, N έχουμε δεσφους μεταξέ αυτων υπάρχει αμέγαρο πληθος αριθμ. κταν.

Ηδη τώρα οι κοιλίες είναι πέντε (5) τόσο είναι και το πληθος των αριθμ. κταν. $N' = 5$.

$$\text{Έτσι, } (MN) = 0,7 = 5 \frac{\lambda'}{2} \Rightarrow \lambda' = \frac{1,4}{5} m \text{ και η νέος συχνότητα } f' \text{ είναι } f' = \frac{v}{\lambda'} \Rightarrow f' = \frac{2m/s}{1,4/5 m} \Rightarrow f' = \frac{10}{1,4} Hz$$

Η εξίσωση $y_{GT}(x, t)$ του στάσιμου κύματος είναι

$$y_{GT}(x, t) = 2A \cos \left(\frac{2\pi x}{\lambda'} \right) \sin(2\pi f' t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{GT}(x, t) = 0,08 \cos \left(\frac{2\pi x}{1,4/5} \right) \sin \left(2\pi \frac{10}{1,4} t \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{GT}(x, t) = 0,08 \cos \left(\frac{10\pi x}{1,4} \right) \sin \left(\frac{20\pi t}{1,4} \right) \text{ m}$$

$$\text{m } y_{GT}(x, t) = 0,08 \cos \left(\frac{50\pi x}{7} \right) \sin \left(\frac{100\pi t}{7} \right) \text{ (SI)}$$

4^η Επαναληπτική Εργασία - κύματα.

1^η Θέμα

$$A = 0,2 \text{ m} \quad \omega = 20\pi = 10\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}, T = 0,2 \text{ s}$$

$$a) y_M(t) = A \eta k [\omega(t - t_M)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_M(t) = 0,2 \eta k [10\pi(t - 0,85)] \Rightarrow y_M(t) = 0,2 \eta k (10\pi t - 8,5\pi) \text{ (SI)}$$

$$\Delta\varphi_{MN} = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} = 2\pi \frac{13\pi/12}{\lambda} = \frac{13\pi}{6}$$

$$y_N(t) = 0,2 \eta k [\varphi_M - \Delta\varphi_{MN}] = 0,2 \eta k (10\pi t - 8,5\pi - \frac{13\pi}{6}) \text{ ή}$$

$$y_N(t) = 0,2 \eta k (10\pi t - \frac{64\pi}{6}) \text{ SI}$$

... και διαφοροετικά ...

$$\text{Το Ν αρχίζει να ταλαντώνεται την } t_N = t_M - \frac{13}{12} T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_N = 0,85 - \frac{13}{12} 0,2 = \frac{10,2}{12} - \frac{2,6}{12} = \frac{13,8}{12} \text{ s} = \frac{64}{6} \text{ s}$$

$$y_N(t) = 0,2 \eta k [\omega(t - t_N)] = 0,2 \eta k [10\pi(t - \frac{64}{6})]$$

$$\Rightarrow y_N(t) = 0,2 \eta k (10\pi t - \frac{64\pi}{6}) \text{ (SI)}$$

$$b) y_M(t) = 0,2 \eta k(\varphi_M) \Rightarrow 0,2 = 0,2 \eta k \varphi_M \Rightarrow \varphi_M = 2\pi n + \frac{\pi}{2}$$

$$y_N(t) = 0,2 \eta k(\varphi_N) = 0,2 \eta k(\varphi_M - \frac{13\pi}{6}) = 0,2 \eta k(2\pi n + \frac{\pi}{2} - \frac{13\pi}{6})$$

$$= 0,2 \eta k(2\pi n + \frac{\pi}{2} - \frac{12\pi}{6} - \frac{\pi}{6}) = 0,2 \eta k(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}) = 0,2 \eta k \frac{\pi}{3} = 0,2 \frac{\sqrt{3}}{2}$$

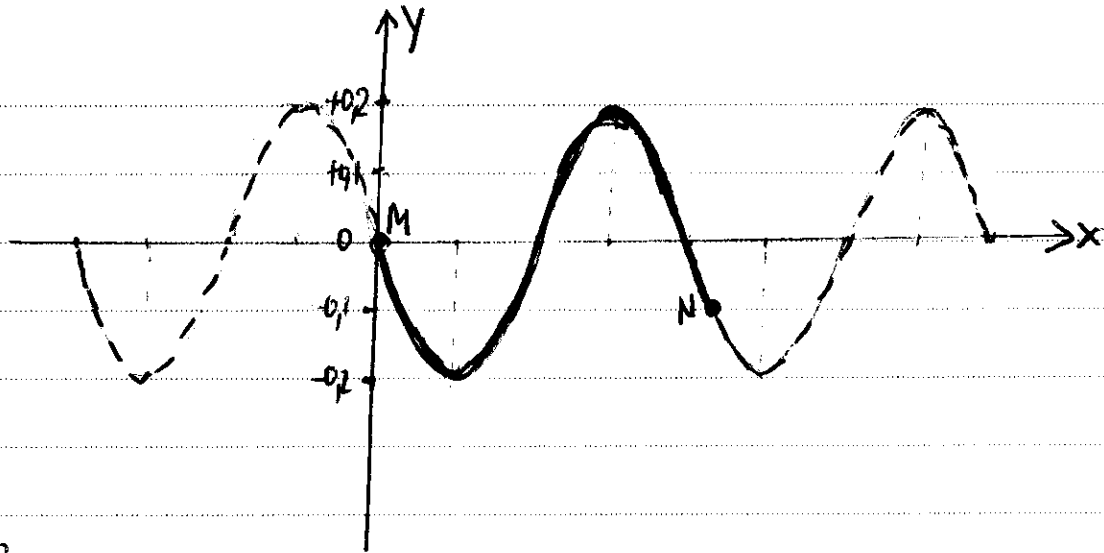
$$\Rightarrow y_N = 0,1\sqrt{3} \text{ m}$$

$$\delta) \text{ Την } t = \frac{125}{20} \text{ s}, y_M = 0,2 \eta k(10\pi \frac{125}{20} - 8,5\pi) = 0,2 \eta k(62\pi + \frac{\pi}{2} - 8\pi - \frac{\pi}{2}) = 0$$

$$v_M = v_{\max} \sin(10\pi \frac{125}{20} - 8,5\pi) = \dots = +v_{\max}$$

$$y_N = 0,2 \eta k(10\pi \frac{125}{20} - \frac{64\pi}{6}) = 0,2 \eta k(62\pi + \frac{\pi}{2} - 10\pi - \frac{4\pi}{3})$$

$$\Rightarrow y_N = 0,2 \sin(-\frac{2\pi}{3}) = -0,1 \text{ m}$$



Θέμα 2ο

Προσοχή! Οι πηγές δεν είναι σύγχρονες

$$y_1 = A \sin(\omega t - \frac{2\pi r_1}{\lambda})$$

$$y_2 = A \sin(\omega t - \frac{2\pi r_2}{\lambda} + \pi)$$

$$\Delta\varphi = (\omega t - \frac{2\pi r_2}{\lambda} + \pi) - (\omega t - \frac{2\pi r_1}{\lambda}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta\varphi = 2\pi \frac{r_1 - r_2}{\lambda} + \pi \quad (1)$$

Το Μ είναι σημείο στάσιμης ταλάντωσης με μέγιστο πλάτος $A_M = 2A$ και διαφορά φάσης $\Delta\varphi$.

$$A_M = \sqrt{A^2 + A^2 + 2AA \cos \Delta\varphi} = \sqrt{2A^2(1 + \cos \Delta\varphi)} = \sqrt{2A^2 \cdot 2\cos^2 \frac{\Delta\varphi}{2}} = 2A \left| \cos \frac{\Delta\varphi}{2} \right|$$

Για να έχουμε μέγιστο πλάτος ταλάντωσης, $A_M = 2A$

$$\text{πρέπει } \left| \cos \frac{\Delta\varphi}{2} \right| = 1 \text{ ή } \cos \frac{\Delta\varphi}{2} = \pm 1 \Rightarrow \frac{\Delta\varphi}{2} = k\pi \Rightarrow \Delta\varphi = 2k\pi \quad (2)$$

$$\Rightarrow 2\pi \frac{r_1 - r_2}{\lambda} + \pi = 2k\pi \Rightarrow r_1 - r_2 = (2k-1) \frac{\lambda}{2} \text{ ή } 2k-1 = \frac{2(r_1 - r_2)}{\lambda}$$

↳ συνθήκη θέσης
πρώτης (1, 3, 5, ...)

$$\text{ή } 2k-1 = \frac{2(4,5\lambda - r_2)}{\lambda}$$

$$\text{Για } r_2 = 2\lambda \Rightarrow 2k-1 = \frac{2(4,5\lambda - 2\lambda)}{\lambda} = \frac{2 \cdot 2,5\lambda}{\lambda} = 5 \text{ δεύτερη}$$

Για

$$\text{Για } r_2 = 2,5\lambda \Rightarrow 2k-1 = \frac{2(4,5\lambda - 2,5\lambda)}{\lambda} = 4 \text{ όσες}$$

$$\text{Για } r_2 = 3\lambda \Rightarrow 2k-1 = \frac{2(4,5\lambda - 3\lambda)}{\lambda} = 3 \text{ δεύτερη}$$

$$\text{Για } r_2 = 3,5\lambda \Rightarrow 2k-1 = \frac{2(4,5\lambda - 3,5\lambda)}{\lambda} = 2 \text{ όσες}$$

Άρα σωστά
οι α, δ

3ο Θέμα:

α) $y(t) = A \sin(\omega t)$

$$y_1(t) = A \sin(\omega t - \frac{2\pi r_1}{\lambda}) \quad \Delta\varphi = (\omega t - \frac{2\pi r_1}{\lambda}) - (\omega t - \frac{2\pi r_2}{\lambda})$$

$$y_2(t) = A \sin(\omega t - \frac{2\pi r_2}{\lambda}) \quad \Rightarrow \Delta\varphi = 2\pi \frac{r_1 - r_2}{\lambda}$$

$$\Delta\varphi = \frac{5\pi}{6} = 2\pi \frac{r_1 - r_2}{\lambda} \Rightarrow r_1 - r_2 = \frac{5\lambda}{12}$$

α-1

β) $\Delta t = \frac{r_1}{v} - \frac{r_2}{v} = \frac{r_1 - r_2}{v} = \frac{5\lambda/12}{\lambda f} = \frac{5T}{12} \Rightarrow \Delta t = \frac{5T}{12}$ β-Σ

γ) $A_M = |2A \cos \pi \frac{r_1 - r_2}{\lambda}| = |2A \cos \pi \frac{5\lambda/12}{\lambda}| = |2A \cos \frac{5\pi}{12}| \neq A$ γ-1

δ) $y_M = A \sin \phi_M = A \sin(\frac{5\pi}{6}) = +\frac{A}{2}$

$$v_M = v_{\max} \cos \phi_M = v_{\max} \cos \frac{5\pi}{6} < 0$$

$$S_M = A + \frac{A}{2} = 1,5A$$
 δ-Σ



ε) $v_M = \omega A \cos \phi_M = \omega A \cos \frac{5\pi}{6} = \omega A (-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{2\pi}{T} A (-\frac{\sqrt{3}}{2})$

$$\Rightarrow v_M = -\frac{\pi A \sqrt{3}}{T}$$
 ε-Σ

4ο Θέμα

α) Το Μ βρίσκεται στα ταλαντώνεται

στην $t = -0,2$ s και το υψος

φθάνει στο $0(x=0)$ την

$t_0 = 0$, οπότε

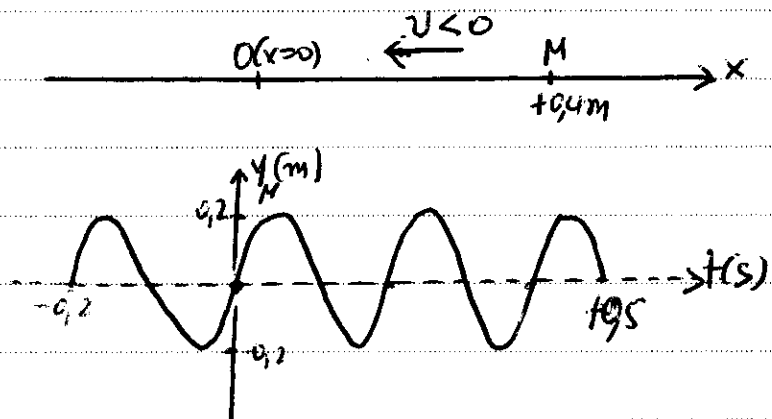
$$|v| = \frac{|\Delta x|}{\Delta t} = \frac{|0M|}{\Delta t} = \frac{0,4m}{0,2s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |v| = 2m/s \Rightarrow v = -2m/s$$

β) Από το $y_M(t) = 3,5T = 0,7 \Rightarrow T = 0,2$ s, $f = \frac{1}{T} = 5$ Hz, $\omega = 10\pi$ rad/s

$$v = \lambda f \Rightarrow 2 = \lambda \cdot 5 \Rightarrow \lambda = 0,4m$$

$$y(x,t) = A \sin(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda}) \Rightarrow y(x,t) = 0,2 \sin(10\pi t + 5\pi x)$$
 β-Σ

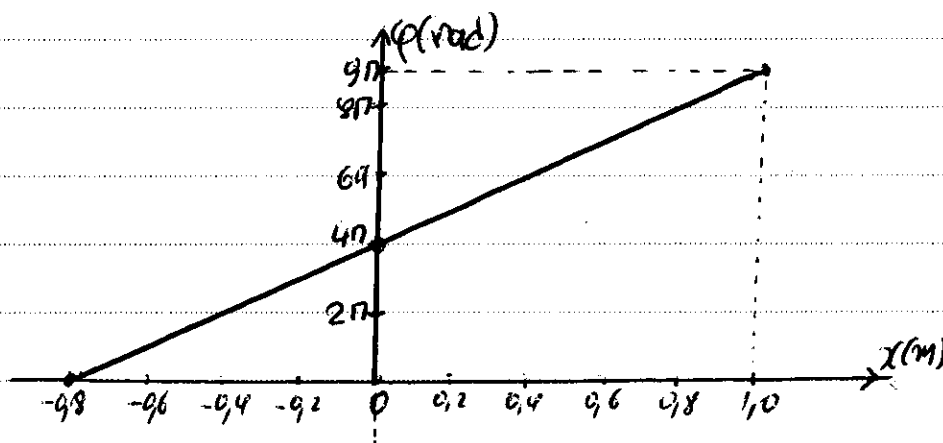


$$\delta) \varphi(x, t) = 10\pi t + 5\pi x \xrightarrow{t=0,4s} \varphi(x) = 4\pi + 5\pi x$$

Το κύμα την $t=0,4s$ έχει φάση 0 στην θέση x που $\varphi(x)=0$

$$\Rightarrow 4\pi + 5\pi x = 0 \Rightarrow x = -0,8m$$

$$\dots \text{για } x=1m \dots (\text{την } t=0,4s) \quad \varphi = 4\pi + 5\pi = 9\pi.$$



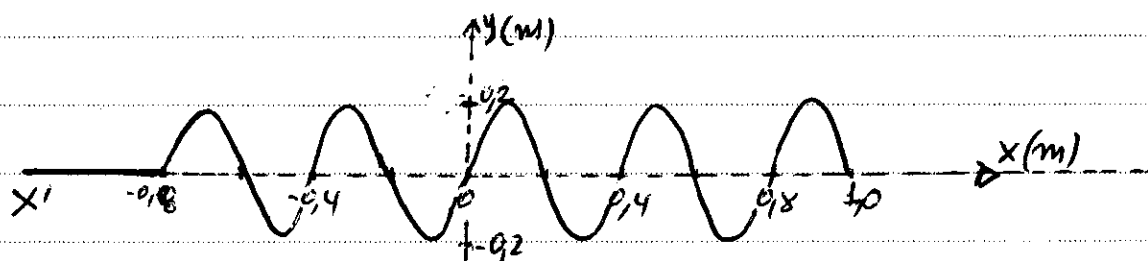
δ) Εξίσωση του επιμήκους κύματος την $t=0,4s$

$$y(x) = 0,2 \sin(4\pi + 5\pi x)$$

• Ζητείται το επιμήκος κύμα για $[-0,8m, 1,0m]$ $\Delta x = 1,8m$

$$\frac{\Delta x}{\lambda} = \frac{1,8}{0,4} = \frac{18}{4} = 4,5 \Rightarrow |\Delta x| = 4,5\lambda$$

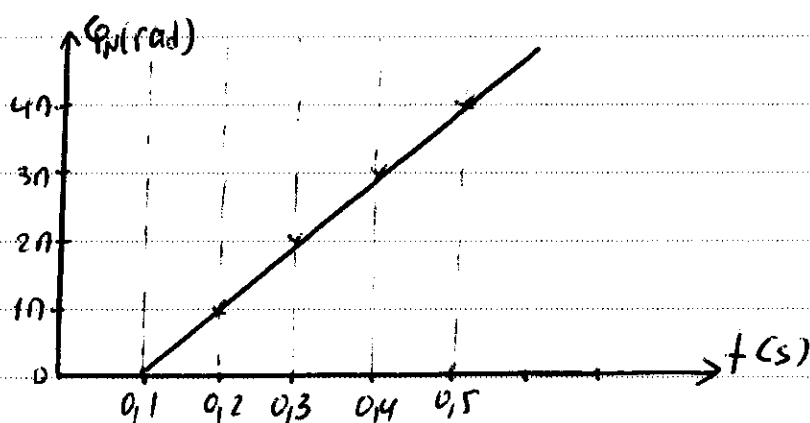
$$\dots \text{για την θέση } x = -0,8m \quad y=0 \wedge \frac{\partial y}{\partial x} > 0$$



$$\epsilon) y_N(t) = 0,2 \sin(10\pi t + 5\pi(-0,2)) \Rightarrow y_N(t) = 0,2 \sin(10\pi t - \pi), \varphi_N(t) = 10\pi t - \pi$$

Το Ν αρχίζει να ταλαντώνεται

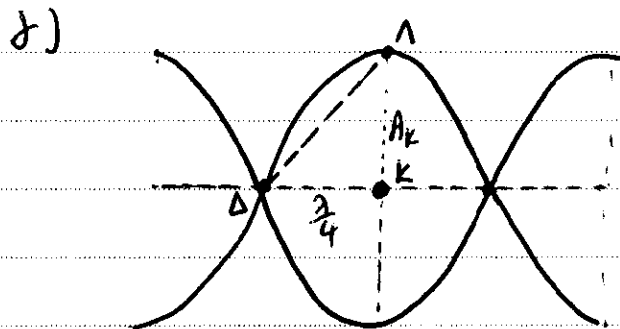
$$\text{όταν } 10\pi t - \pi = 0 \Rightarrow t = 0,1s$$



520812

a) $y = 0,03 \sin(200t)$, $\omega = 200 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow 2\pi f = 200 \Rightarrow f = 10 \text{ Hz}$, $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{1,6 \text{ m/s}}{10 \text{ Hz}} \Rightarrow \lambda = 0,16 \text{ m}$

b) $y_g(x,t) = 2A \cos(\frac{2\pi x}{\lambda}) \sin(\omega t) \Rightarrow y_g(x,t) = 0,036 \cos(12,5\pi x) \sin(200t)$ (S.I.)



Ελάχιστη απόσταση (ΔK)

$$\Delta x_{\min} = (\Delta K) = \frac{\lambda}{4} = \frac{0,16}{4} = 0,04 \text{ m}$$

Μέγιστη απόσταση ($\Delta \Lambda$)

$$\Delta x_{\max} = (\Delta \Lambda) = \sqrt{\Delta K^2 + K \Lambda^2}$$

$$\Rightarrow \Delta x_{\max} = \sqrt{0,04^2 + 0,03^2} = \Delta x_{\max} = 0,05 \text{ m}$$

δ)

$$y_M(t) = 0,036 \cos(12,5\pi x_M) \sin(200t)$$

για $A_M = |0,036 \cos(12,5\pi x_M)| = 0,02 \text{ m}$

$$\frac{\pi}{4} < x_M < \frac{3\pi}{4} \Rightarrow 0,4 < x_M < 0,12$$

$$\Rightarrow 0,4 \cdot 12,5 < 12,5\pi x_M < 0,12 \cdot 12,5\pi$$

$$\Rightarrow 0,5\pi < 12,5\pi x_M < 1,5\pi$$

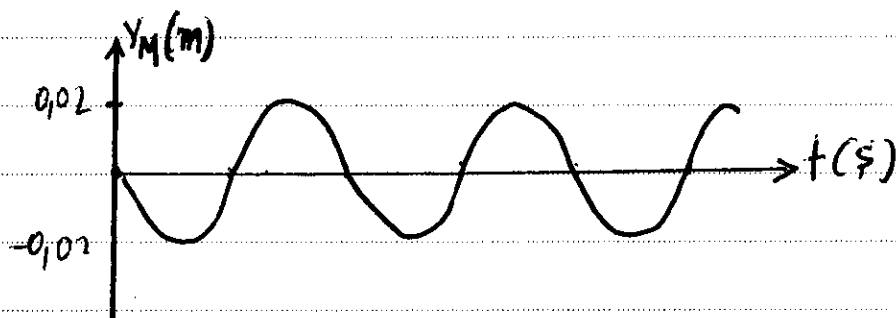
Στην περιοχή αυτή $\sin(200t) < 0 \dots$

$$0,036 \cos(12,5\pi x_M) = -0,02, \text{ οπότε}$$

$$y_M(t) = -0,02 \sin(200t) \text{ (S.I.)}$$

ε) $y_M = -0,02 \sin(200 \cdot \frac{1}{200}) \Rightarrow y_M = -0,02 \sin \frac{\pi}{2} \Rightarrow y_M = -0,01 \text{ m}$

$$a_M = -\omega^2 y_M = -(200)^2 (-0,01) = +40000 \cdot 0,01 = 4000 \text{ m/s}^2$$



6T) Θέρσεις δεσφών $x_δ = (2k+1) \frac{\lambda}{4}$ $\xrightarrow[\substack{x_\delta = L \\ k=4}]{\text{Τελειοτάτος δεσφός}} L = 9 \cdot \frac{\lambda}{4}$

$$\Rightarrow L = 9 \cdot \frac{0,16}{4} \Rightarrow L = 0,36 \text{ m}$$

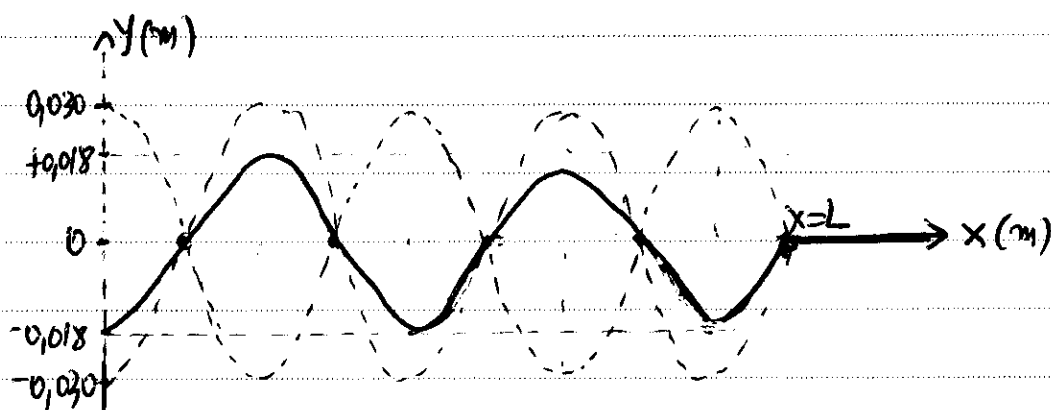
3) $y_0(t) = 0,03 \pi + (20\pi t)$

$$v_0(t) = v_{\max} \cos(20\pi t) \xrightarrow{t=t_1} 0,8 v_{\max} = v_{\max} \cos(20\pi t_1) \Rightarrow \cos(20\pi t_1) = 0,8$$

$$\dots \pi + (20\pi t_1) = \pm \sqrt{1 - 0,8^2} (20\pi t_1) \Rightarrow \pi + (20\pi t_1) = \pm 0,6$$

$$\alpha \rho \alpha y_0(t=t_1) = 0,03 \cdot [\pm 0,6] = \pm 0,018 \text{ m} \quad \text{και στην στιγμή}$$

$$y < 0 \dots \Rightarrow y_0 = -0,018 \text{ m}$$



6ο Θέμα

α) $r_2 = r_1 + 1 \text{ m}$ $\Rightarrow r_2 - r_1 = 1 \text{ m}$

$$\text{και } r_1 - r_2 = -1 \text{ m}$$

$$t_1 = \frac{r_1}{v} = 0,2 \text{ s}$$

$$t_2 = \frac{r_2}{v}$$

$$y_{\text{πηγής}} = 0,10 \pi \cos(10\pi t), \quad \omega = 10\pi \text{ rad/s} \Rightarrow f = 5 \text{ Hz}, \quad T = \frac{1}{f} = 0,2 \text{ s}$$

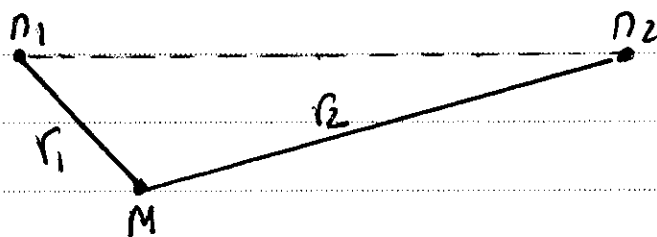
$$\Delta t = 2T \Rightarrow t_2 - t_1 = 0,4 \Rightarrow \frac{r_2 - r_1}{v} = 0,4 \Rightarrow \frac{L}{v} = 0,4 \Rightarrow v = \frac{L}{0,4} \Rightarrow v = 2,5 \text{ m/s}$$

$$v = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{v}{f} \Rightarrow \lambda = \frac{2,5 \text{ m/s}}{5 \text{ Hz}} \Rightarrow \lambda = 0,5 \text{ m}$$

β) $r_1 = v t_1 = 2,5 \text{ m/s} \cdot 0,2 \text{ s} \Rightarrow r_1 = 0,5 \text{ m}$ και $r_2 = 1,5 \text{ m}$

Ενταξη συβόλου δταν φθάνει το κύμα από την Π_2

$$t_2 = \frac{r_2}{v} = \frac{1,5 \text{ m}}{2,5 \text{ m/s}} \Rightarrow t_2 = 0,6 \text{ s}$$



$$y_M(t) = 2A\omega \left(n \frac{r_1 - r_2}{\lambda} \right) \sin \left(\omega t - n \frac{r_1 + r_2}{\lambda} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_M(t) = 0,2 \sin \left(n \frac{0,5 - 1,5}{0,5} \right) \sin \left(10\pi t - n \frac{0,5 + 1,5}{0,5} \right)$$

$$\Rightarrow y_M(t) = 0,2 \sin \left[n \frac{-1}{0,5} \right] \sin(10\pi t - 4n) \Rightarrow y_M(t) = 0,2 \sin(10\pi t - 4n)$$

$$\text{On trouve } t = \left(0,6 + \frac{5}{12} \right) s \Rightarrow y_M = 0,2 \sin \left[10\pi \left(0,6 + \frac{5}{12} \right) - 4n \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_M = 0,2 \sin \left[6\pi + \frac{50\pi}{12} - 4n \right] = 0,2 \sin \left(2\pi + 4\pi + \frac{2\pi}{12} \right) = 0,1\pi$$

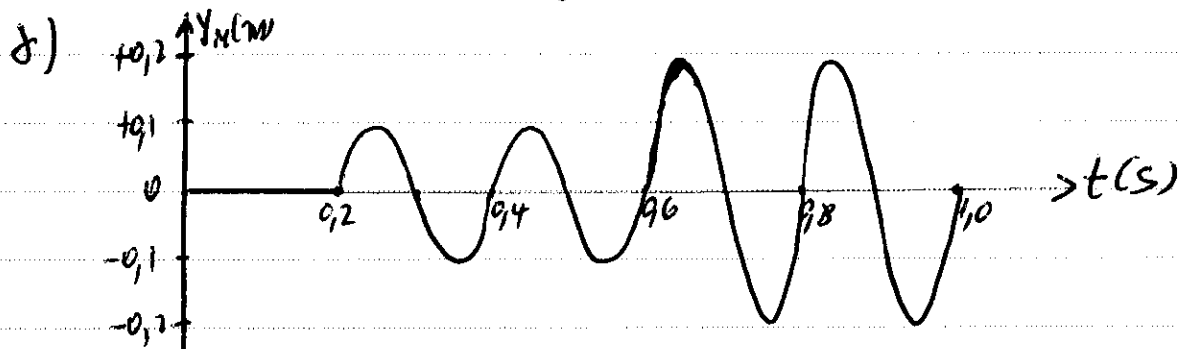
$$\Rightarrow y_M = 0,1\pi$$

$$D = m\omega^2 = 0,05 \text{ kg} (10\pi \text{ rad/s})^2 = 50 \text{ N/m}$$

$$E = \frac{1}{2} D \Delta x^2 = \frac{1}{2} 50 \cdot 0,2^2 = \frac{1}{2} 50 \cdot 0,04 = 1 \text{ Joule}$$

$$U = \frac{1}{2} D y_M^2 = \frac{1}{2} 50 \cdot 0,1^2 = \frac{1}{2} 50 \cdot 0,01 = 0,25 \text{ Joule}$$

$$K = E - U \Rightarrow K = 0,75 \text{ Joule}$$

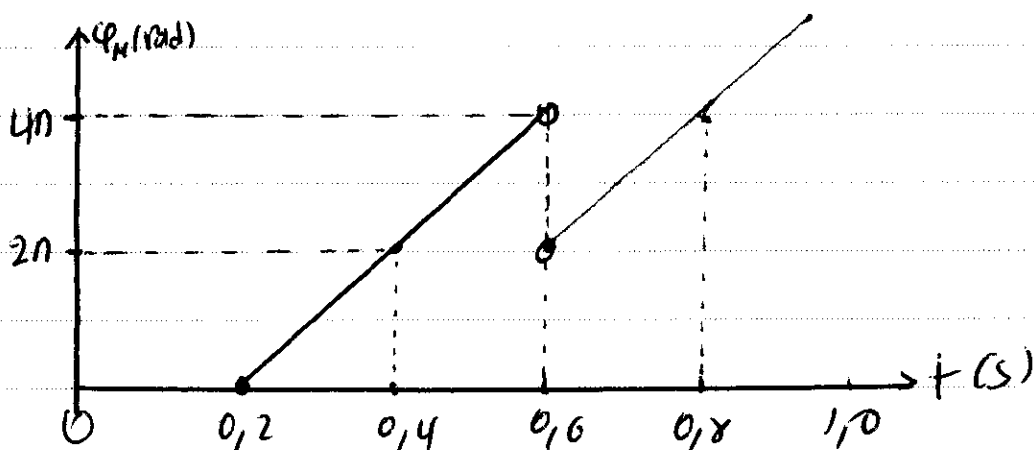


$$0 \leq t < 0,2 \text{ s } y_M = 0, \varphi_M = 0$$

$$0,2 \leq t < 0,6 \text{ s } y_M(t) = 0,10 \sin \left(10\pi t - \frac{20\pi}{\lambda} \right) = 0,10 \sin \left(10\pi t - 2\pi \frac{0,5}{0,5} \right) \Rightarrow$$

$$y_M(t) = 0,10 \sin(10\pi t - 2\pi) \quad (SI)$$

$$t \geq 0,6 \text{ s } y_M(t) = 0,20 \sin(10\pi t - 4\pi)$$



$$\delta) A_M = \left| 2A \cos n \frac{r_1 - r_2}{\lambda} \right| = A \Rightarrow \left| 2 \cos n \frac{r_1 - r_2}{\lambda} \right| = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \left(n \frac{r_1 - r_2}{\lambda} \right) = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \cos \left(n \frac{r_1 - r_2}{v/f} \right) = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \cos \left(n \frac{r_1 - r_2}{v} f \right) = \pm \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow n \frac{|r_1 - r_2|}{v} f = k n \pm \frac{n}{3} \Rightarrow n \frac{|r_1 - r_2|}{v} f = (3k \pm 1) \frac{n}{3} \Rightarrow f = \frac{3k \pm 1}{3} \cdot \frac{v}{|r_1 - r_2|}$$

$$\xrightarrow{k=0} f_{m/y} = \frac{2,5}{3} \text{ Hz}$$

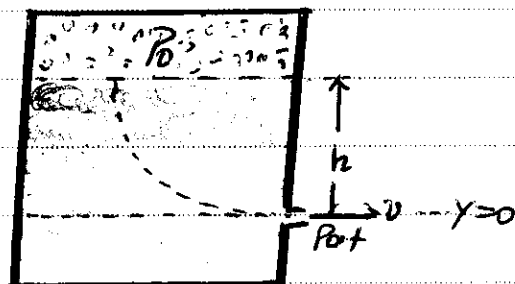
5η επαναληπτική εργασία: Μηχανική των ρευστών

1η Θέμα

α) Πίεση σε βάθος h

$P = P_0 + \rho g h$ - Προφανώς μεγαλύτερη πίεση
αδυνατεί το ρευστό να την αντισταθεί

Δυνατότητα ... Το νερό ... όπου $\rho_{\text{νερό}} > \rho_{\text{αέρα}}$
Αρα βωστή η α. 2



$$\beta) P_0 + \frac{1}{2} \rho v^2 = P_0 + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v_0^2 \xrightarrow[\frac{1}{2} \rho v_0^2 \approx 0]{v_0 \ll v} \frac{1}{2} v^2 = P_0 - P_0 + \rho g h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2(P_0 - P_0) + \rho g h}{\rho}} \quad \text{Με μεγαλύτερα ταχύτητα εξέρχεται το ρευστό με την υψώτερη πυκνότητα, δηλαδή το λάδι}$$

Αρα βωστή η β. 1

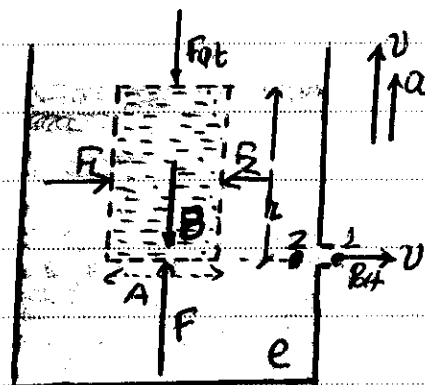
2η Θέμα

α) Υπολογισμός πίεσης των νεφών σε ελεύθερη

θεωρούμε την προσφροκισμένη στήλη του νερού διατομής A και ύψους h .

Οι άδικοι ενεργείες σε αερίτη δύναμεις είναι: το βάρος της B , η δύναμη F

στο βάθος της, η δύναμη $F_0 + B$ στην πάνω βάση και οι πλευρικές F_1 και F_2 .



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_1 = F_2, \quad \sum F_y = m a \Rightarrow F - F_0 - B = m a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = F_0 + m g + m a \Rightarrow F = F_0 + m(g + a) \Rightarrow F = F_0 + \rho A h(g + a)$$

Η πίεση που δέχεται σε βάθος h είναι $P = \frac{F}{A} \Rightarrow$

$$\Rightarrow P = \frac{F_0}{A} + \rho h(g + a) \Rightarrow P = P_0 + \rho h(g + a)$$

... και άρα νερό είναι η $P = \rho h(g + a)$ αέρας η

P_0 αδυνατεί και στην αντίθετη και αντίθετη με την αρχή Pascal μεταφέρεται σε κάθε σημείο του ρευστού...

$$P_{\text{νερό}} = 10^3 \cdot 10 \cdot (10 + 2,5) \Rightarrow P = 12,5 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2$$

η) $\rho = 0,125 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ η) $\rho = 0,125 \text{ atm}$

β) υπολογισμός ταχύτητας, ύψους.

Εφαρμόζουμε Bernoulli μεταξύ 1 και 2.

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v^2 = P_2 + 0 + 0 \Rightarrow P_0 + \frac{1}{2} \rho v^2 = P_0 + \rho h(a + g) \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{2(a + g)h} \Rightarrow v = \sqrt{2 \cdot (2,5 + 10) \cdot 1} \Rightarrow v = 5 \text{ m/s}$$

3^ο Θέμα

α) Παροχή εισροής νερού

$$\Pi = 24 \frac{\text{L}}{\text{min}} = 24 \frac{10^{-3} \text{ m}^3}{60 \text{ s}} \Rightarrow \Pi = 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$$

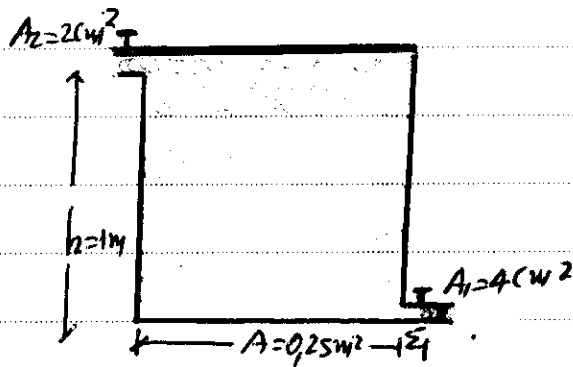
$$\Pi_1 = A_1 v_1 \Rightarrow v_1 = \frac{\Pi_1}{A_1} = \frac{4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}}{4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} \Rightarrow v_1 = 1 \text{ m/s}$$

Όσος όγκος νερού εισέρχεται στη

γυαλίδα που πρόναι τόσος όγκος

βγαίνει από τη γυαλίδα, $P_2 = P_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow P_2 = A_2 v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{P_2}{A_2} \Rightarrow v_2 = \frac{4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}}{2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} \Rightarrow v_2 = 2 \text{ m/s}$$



β) $\frac{dm_{\text{Bev}}}{dt} = \frac{d(\rho v)}{dt} = \rho \frac{dv}{dt} = \rho \cdot \Pi = 0,7 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{dm_{\text{Bev}}}{dt} = 0,28 \text{ kg/s}$$

γ) $\Pi = \frac{V}{t} = \frac{Ah}{t} \Rightarrow t = \frac{Ah}{\Pi} = \frac{0,25 \text{ m}^2 \cdot 1 \text{ m}}{4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}} \Rightarrow t = 625 \text{ s}$

δ) Bernoulli 1-A

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_A + \rho g \frac{h}{2}$$

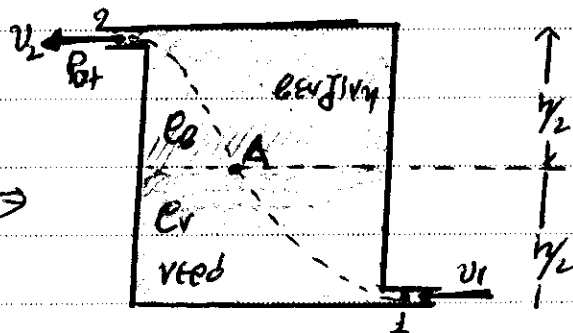
$$\text{Bernoulli A-2: } P_A = P_0 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g \frac{h}{2} \Rightarrow$$

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g \frac{h}{2} + \rho g \frac{h}{2} + P_0$$

$$\Rightarrow P_1 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 - \frac{1}{2} \rho v_1^2 + (\rho_r + \rho_g) g \frac{h}{2} + P_0$$

$$\Rightarrow P_1 = \frac{1}{2} \cdot 0,7 \cdot 10^3 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 10^3 \cdot 1 + 1,7 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} + 10^5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_1 = 0,9 \cdot 10^3 + 8,5 \cdot 10^3 + 100 \cdot 10^3 = 109,4 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2 \Rightarrow P_1 = 1,094 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 \Rightarrow P_1 = 1,094 \text{ atm}$$



4^η Θέση

a) Από το $v_1 = \sqrt{2gh} \Rightarrow h = \frac{v_1^2}{2g}$
 $\Rightarrow h = \frac{5^2}{2 \cdot 10} \Rightarrow h = 1,25 \text{ m}$

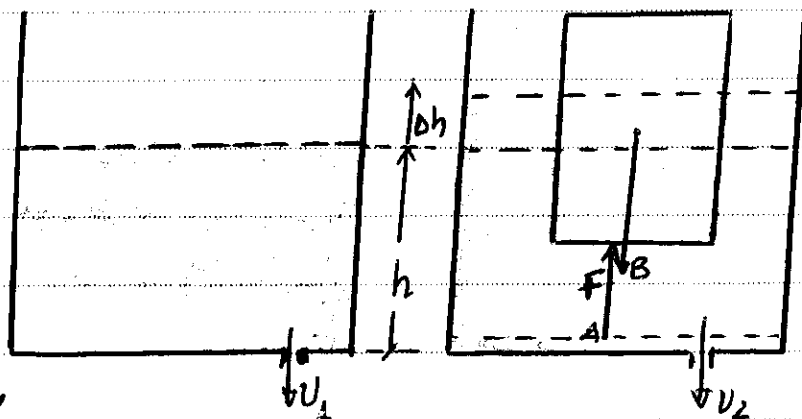
Όταν βυθιστεί το σώμα

$$v_2 = \sqrt{2g(h + \Delta h)} \Rightarrow h + \Delta h = \frac{v_2^2}{2g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h + \Delta h = \frac{5,2^2}{2 \cdot 10} \Rightarrow h + \Delta h = 1,352 \text{ m}$$

$$\Rightarrow 1,25 + \Delta h = 1,352 \Rightarrow \Delta h = 0,102 \text{ m}$$

$$\text{ή } \Delta h = 10,2 \text{ cm}$$



b) Με την προϋπόθεση των βωμάτων έχουμε αόξηση του νερού

$$\text{στην ουσία να ισχύει } \Delta P = \frac{F}{A} = \frac{B}{A} \quad (1)$$

Η αόξηση οφείλεται στην ύψωση του νερού στο αέριο

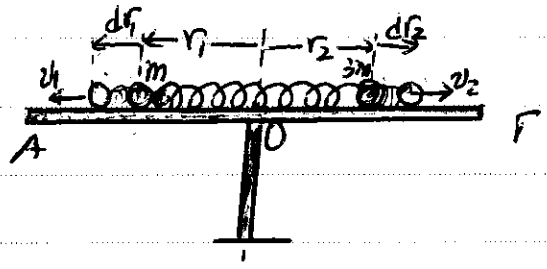
στην ουσία να ισχύει $\Delta P = \rho g \Delta h$ (2)

$$\text{ή, (1)} \quad \frac{B}{A} = \rho g \Delta h \Rightarrow B = \rho g \Delta h \cdot A \stackrel{\text{σε}}{\Rightarrow} B = 10^3 \cdot 10 \cdot 0,102 \cdot 0,25$$

$$\Rightarrow B = 255 \text{ N}$$

6^η επαναληπτική εργασία: Μηχανική του στερεού.

1^ο θέμα



Αρχικά $\Sigma \tau(0) = 0 \Rightarrow m g r_1 = 3 m g r_2$

$\Rightarrow r_1 = 3 r_2$ ή $\frac{r_1}{r_2} = 3$ (1)

Μετά το κόψιμο του νήματος ... έχουμε διατήρηση ενέργειας

των συστημάτων $P_{\text{αρχ}} = P_{\text{τελ}} \Rightarrow 0 = 3 m v_2^2 - m v_1^2 \Rightarrow v_1 = 3 v_2 \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{v_1 dt}{v_2 dt} = 3 \Rightarrow \frac{dr_1}{dr_2} = 3$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \frac{dr_1}{dr_2} = 3 \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \frac{dr_1}{dr_2} = \frac{r_1 + dr_1}{r_2 + dr_2} \Rightarrow \frac{r_1 + dr_1}{r_2 + dr_2} = 3$

$\Rightarrow r_1 + dr_1 = 3(r_2 + dr_2)$... για κάθε χρονική στιγμή.

Σε μια τυχαία χρονική στιγμή $\Sigma \tau(0) = m g(r_1 + dr_1) - 3 m g(r_2 + dr_2)$

$\Rightarrow \Sigma \tau(0) = m g \cdot 3(r_2 + dr_2) - 3 m g(r_2 + dr_2) = 0 \Rightarrow \Sigma \tau(0) = 0 \quad \forall t$

Άρα το σύστημα είναι συνεχώς σε ισορροπία.

Σωστή η πρόταση (δ)

Σχόλιο: Μόλις οι εφάρμες εδικοπαλείγουν το βέλος δεν δέχονται καμία δύναμη και κινούνται με σταθερή ταχύτητα ... ο λόγος των ορμών είναι ίδιος με

αυτό που είχαν τη στιγμή συγκρούσεως, με εξαίρεση

δηλαδή $\frac{v_1}{v_2} = 3$.

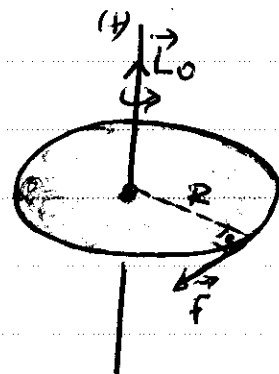
2^ο θέμα

$M = 16 \text{ kg}$, $R = 0,5 \text{ m}$, $L_0 = 50 \text{ kg m}^2/\text{s}$, $F = -8 \text{ t (s)}$

$I = \frac{1}{2} M R^2 = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 0,5^2 \Rightarrow I = 2 \text{ kg m}^2$

Αρχική μηχανική ενέργεια $K_0 = \frac{L_0^2}{2I} \Rightarrow$

$\Rightarrow K_0 = \frac{50^2}{2 \cdot 2} \Rightarrow K_0 = 625 \text{ Joule}$.



$\Delta K = W_F \Rightarrow K_{\text{τελ}} - K_0 = W_F \xrightarrow{K_{\text{τελ}} = 0} 0 - K_0 = W_F \Rightarrow W_F = -625 \text{ J}$

$$\alpha_s = 1 \text{ m/s}^2 \text{ και } \alpha_{\text{μν}} = \frac{a_s}{R} = \frac{1 \text{ m/s}^2}{0,1 \text{ m}} \Rightarrow \alpha_{\text{μν}} = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

$$\delta) \frac{dL_{\text{αυτ}}}{dt} = \sum \tau_{\text{εξωτ}} \Rightarrow \frac{dL_{\text{αυτ}}}{dt} = M_s g R - T R = 6 \text{ m} \cdot 0,4 \text{ m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{L_{\text{αυτ}} - L_0}{t - t_0} = [M_s g - T] R \xrightarrow[t_0 = 0]{L_0 = 0} L_{\text{αυτ}} = [M_s g - T] R t$$

$$\Rightarrow L_{\text{αυτ}} = [5 \cdot 10 - 40] 0,1 t \Rightarrow L_{\text{αυτ}} = 1 \cdot t \text{ (SI)} \xrightarrow{t = 0,8 \text{ s}}$$

$$\Rightarrow L_{\text{αυτ}} = 0,8 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

ε) Από την ερωτημένη 160 βάρδια την βάρδιας έχουμε

$$\sum \tau_{(Δ)} = 0 \Rightarrow (M_k + \eta M') g (AD) + N_2 (ΔZ) = M g (OD) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [10 + \eta \cdot 0,8] 10 \cdot 2 + N_2 \cdot 5 = 20 \cdot 10 \cdot 3 \Rightarrow 200 + 16\eta + 5N_2 = 600$$

$$\Rightarrow 5N_2 = 400 - 16\eta \Rightarrow N_2 = 80 - 3,2\eta \quad \parallel \quad \eta = 20 \text{ πηχθός σε}$$

Η αναρροχή - αν γίνει - θα είναι 29 βάρδια

πριν από Δ γεωμετρία είναι στο Z.

Για να μην έχουμε αναρροχή πρέπει $N_2 \geq 0$

$$\text{ή } 80 - 3,2\eta \geq 0 \text{ ή } 3,2\eta \leq 80 \text{ ή } \eta \leq 25$$

άρα $\eta_{\text{max}} = 25 \text{ βάρδια}$

$$6\tau) \frac{dL_{\text{αυτ}}}{dt} = \sum \tau = M_s g R - T R = (M_s g - T) R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3,4 = (50 - T) \cdot 0,1 \Rightarrow T = 16 \text{ N}$$

$$T = \mu N_2 \Rightarrow N_2 = \frac{T}{\mu} = \frac{16 \text{ N}}{0,5} \Rightarrow N_2 = 32 \text{ N}$$

Από την σχέση $N_2 = 80 - 3,2\eta$ βρίσκουμε

$$32 = 80 - 3,2\eta \Rightarrow 3,2\eta = 48 \Rightarrow \eta = 15 \text{ βάρδια}$$

4^ο Θέμα

Ορειβάτης: $m_1 = 60 \text{ kg}$

Καλάθι: $m_2 = 15 \text{ kg}$

Τροχαλία: $M = 10 \text{ kg}$, $R = 0,10 \text{ m}$

$$I = \frac{1}{2} M R^2$$

$H = 40 \text{ m}$

Ορειβάτης: $\Sigma F_y = m_1 a \Rightarrow F + N - m_1 g = m_1 a$ (1)

Καλάθι: $\Sigma F_y = m_2 a \Rightarrow F' - N - m_2 g = m_2 a$ (2)

Τροχαλία: $\Sigma \tau = I \alpha_{\text{γων}} \Rightarrow F R - F' R = \frac{1}{2} M R^2 \frac{a}{R}$

$$\Rightarrow F - F' = \frac{1}{2} M a$$
 (3)

[$v_{\text{νηφτος}} = v_{\text{καλάθιν}} = v_{\text{τροχαλίας}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow v = \omega R \Rightarrow \frac{dv}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow a = R \alpha_{\text{γων}}]$$

$$(1) + (2) + (3) \Rightarrow 2F - m_1 g - m_2 g = (m_1 + m_2 + \frac{M}{2}) a$$
 (4)

$$a) H = \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow 2H = a t^2 \Rightarrow a = \frac{2H}{t^2} = \frac{2 \cdot 40 \text{ m}}{1600 \text{ s}^2} \Rightarrow a = 0,05 \text{ m/s}^2$$

$$a = R \alpha_{\text{γων}} \Rightarrow \alpha_{\text{γων}} = \frac{a}{R} \Rightarrow \alpha_{\text{γων}} = \frac{0,05 \text{ m/s}^2}{0,1 \text{ m}} \Rightarrow \alpha_{\text{γων}} = 0,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

$$b) (4) \Rightarrow 2F = (m_1 + m_2)g + (m_1 + m_2 + \frac{M}{2})a \Rightarrow 2F = (60 + 15) \cdot 10 + (60 + 15 + \frac{10}{2}) \cdot 0,05$$

$$\Rightarrow F = 377 \text{ N}$$

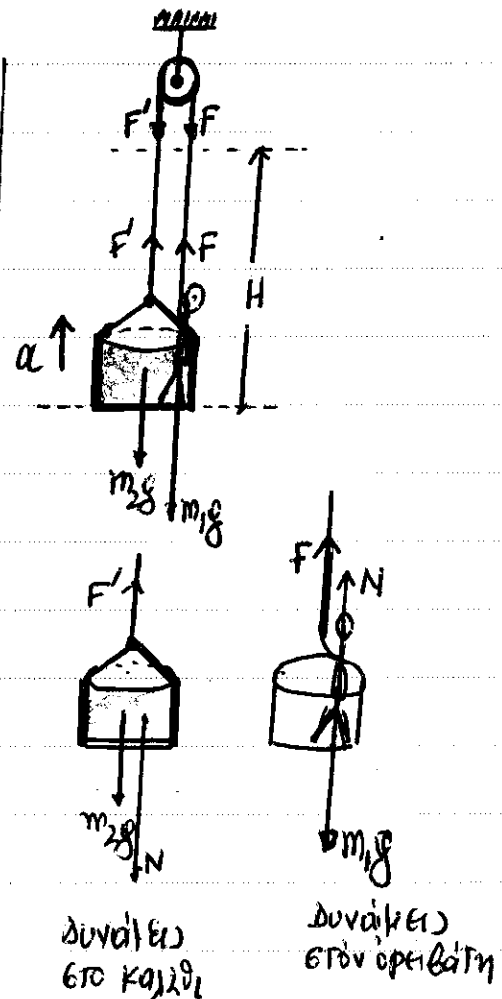
$$r) (1) \Rightarrow N = m_1(a + g) - F = 60 \cdot (0,05 + 10) - 377 \Rightarrow N = 226 \text{ N}$$

$$(3) \Rightarrow F - F' = \frac{1}{2} M a \Rightarrow F' = 376,25 \text{ N}$$

$$\text{Βάρος } B_2 = m_2 g = 150 \text{ N}$$

$$d) \frac{dL_{\text{ροξ}}}{dt} = \Sigma \tau_{\text{ροξ}} = I \alpha_{\text{γων}} = \frac{1}{2} M R^2 \alpha_{\text{γων}} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 0,1^2 \cdot 0,5 = 25 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2/\text{s}^2$$

$$\Rightarrow \frac{dL_{\text{ροξ}}}{dt} = 25 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2/\text{s}^2$$



5^ο Θέμα

Τροχαλία $\Sigma \tau = I \alpha_{\text{γων}} = 0 \Rightarrow F' r = F r$

$$\Rightarrow F' = F$$

Καρέντζι

$$\Sigma F_x = M a_{\text{cm}} \Rightarrow F + T - Mg \eta \mu \varphi = M a_{\text{cm}} \quad (1)$$

$$\Sigma \tau = I \alpha_{\text{γων}} \Rightarrow F r - T R = I \frac{a_{\text{cm}}}{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F \frac{r}{R} - T = \frac{I}{R^2} a_{\text{cm}} \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow$$

$$F + F \frac{r}{R} - Mg \eta \mu \varphi = \left[M + \frac{I}{R^2} \right] a_{\text{cm}}$$

$$\Rightarrow \frac{F(R+r)}{R} - \frac{Mg \eta \mu \varphi R}{R} = \frac{MR^2 + I}{R^2} a_{\text{cm}}$$

$$\Rightarrow a_{\text{cm}} = \frac{(R+r)R}{MR^2 + I} F - \frac{Mg \eta \mu \varphi R^2}{MR^2 + I} \quad (3)$$

α) Για $a_{\text{cm}} = 0 \Rightarrow F = 800 \text{ N} \xrightarrow{(3)} 0 = \frac{(1+0,5) \cdot 1}{M \cdot 1^2 + I} 800 - \frac{M \cdot 10 \cdot 0,6 \cdot 1^2}{M \cdot 1^2 + I}$

$$\Rightarrow 0 = 1200 - 6M \Rightarrow M = 200 \text{ kg}$$

β) Από την (3) για $[a_{\text{cm}} = 1 \text{ m/s}^2, F = 1000 \text{ N}]$ έχουμε

$$-1 = \frac{(1+0,5) \cdot 1 \cdot 1000^2}{200 \cdot 1^2 + I} - \frac{200 \cdot 10 \cdot 0,6 \cdot 1^2}{200 \cdot 1^2 + I} \Rightarrow 200 + I = 1500 - 1200 \Rightarrow I = 100 \text{ kg m}^2$$

γ) Με ανηλικαρισμένη στην (3) παίρνουμε την $a_{\text{cm}} = f(F)$

$$\Rightarrow a_{\text{cm}} = \frac{(1+0,5) \cdot 1}{300} F - \frac{200 \cdot 10 \cdot 0,6 \cdot 1^2}{300} \Rightarrow a_{\text{cm}} = 5 \cdot 10^{-3} F - 4 \quad (\text{SI}) \quad (4)$$

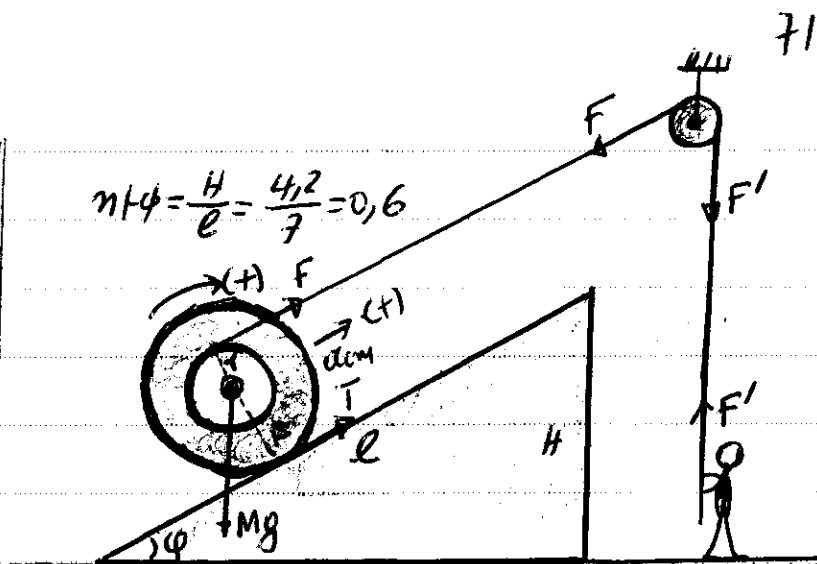
Για $F = 828 \text{ N}$ παίρνουμε $a_{\text{cm}} = 0,14 \text{ m/s}^2 \dots l = \frac{1}{2} a_{\text{cm}} t^2$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{2l}{a_{\text{cm}}}} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot 7}{0,14}} \Rightarrow t = 10 \text{ s}$$

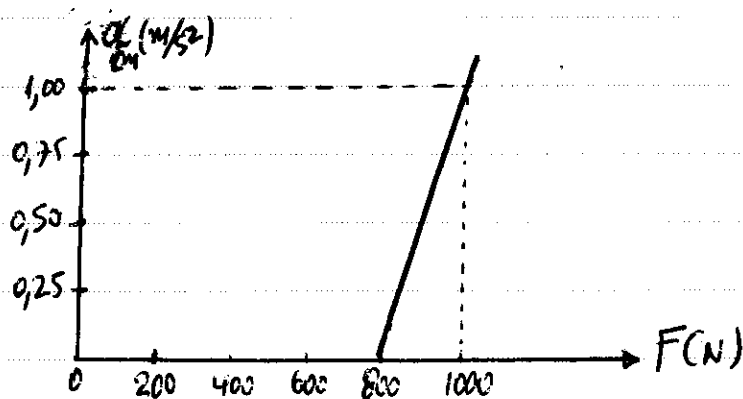
$$\delta) (1) \quad F + T - 1200 = 200 [5 \cdot 10^{-3} F - 4] \Rightarrow F + T - 1200 = F - 800$$

$$\Rightarrow T = 400 \text{ N}$$

Σχόλιο: Η T είναι ανεξάρτητη της F



$$\eta \mu \varphi = \frac{H}{\ell} = \frac{4,2}{7} = 0,6$$



Ε) προδοχή (!)

Για τον άνθρωπο πρέπει πάντοτε $N \geq 0$. Όταν

$N=0$ ο άνθρωπος οριακά χάνει την επαφή του με το δάπεδο. Ο άνθρωπος

σε κάθε στιγμή πρέπει να είναι σε επαφή με το δάπεδο

($N \geq 0$) οπότε $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N + F - M'g = 0 \Rightarrow N = F + M'g \geq 0$

$\Rightarrow F \geq -M'g$ ή $F \leq M'g$ ή $F \leq 1100 \text{ N}$ (5)

Από την (4) $F = \frac{a_{cm} + 4}{5 \cdot 10^{-3}} \xrightarrow{5} \frac{a_{cm} + 4}{5 \cdot 10^{-3}} \leq 1100 \Rightarrow a_{cm} + 4 \leq 55 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{cm} \leq 1,5 \text{ m/s}^2$ άρα $a_{cm, \max} = 1,5 \text{ m/s}^2$

7ο θέμα

$M = 4 \text{ kg}$, $I = 0,02 \text{ kgm}^2$

$R = 0,1 \text{ m}$ ή $\phi = 0,6$

α) $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F + T = Mg \sin \phi$

$\Sigma \tau = 0 \Rightarrow F \cdot 2R - T \cdot R = 0 \Rightarrow T = 2F$ } $\Rightarrow$

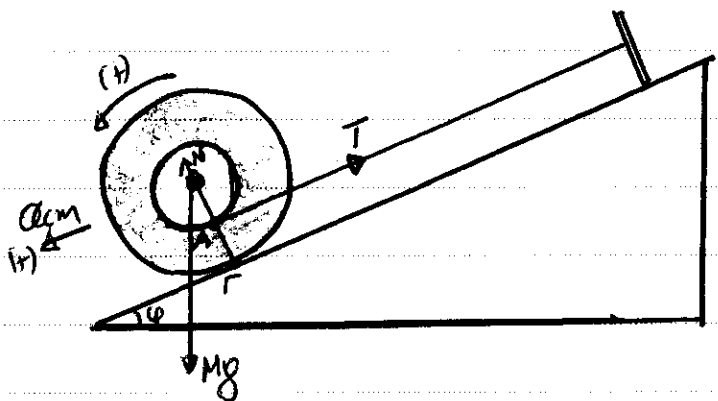
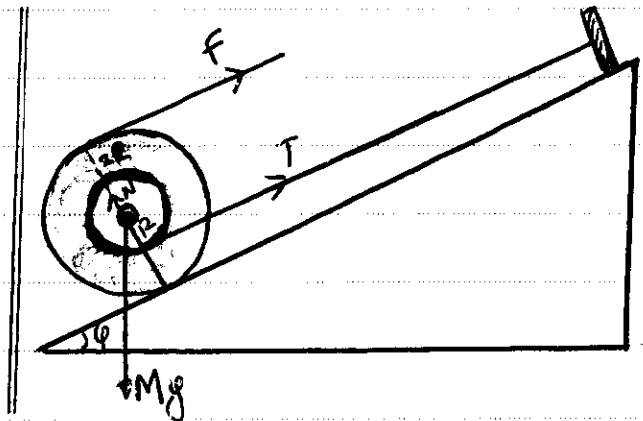
$\Rightarrow F + 2F = Mg \sin \phi \Rightarrow 3F = Mg \sin \phi$

$\Rightarrow 3F = 4 \cdot 10 \cdot 0,6 \Rightarrow F = 8 \text{ N}$, $T = 16 \text{ N}$

β) φερόμενη το νήμα είναι η ίδια ταχύτητα. Επειδή όμως είναι δεμένο στο Ο η ταχύτητα αυτή είναι μηδέν, $v_{\text{νηματος}} = 0$

$\Rightarrow v_{\text{νηματος}} = 0$. Επειδή τώρα το νήμα δεν γλιστράει στον κύλινδρο τον καρφιό, θα έχει την ίδια ταχύτητα

στον κύλινδρο τον καρφιό, θα έχει την ίδια ταχύτητα

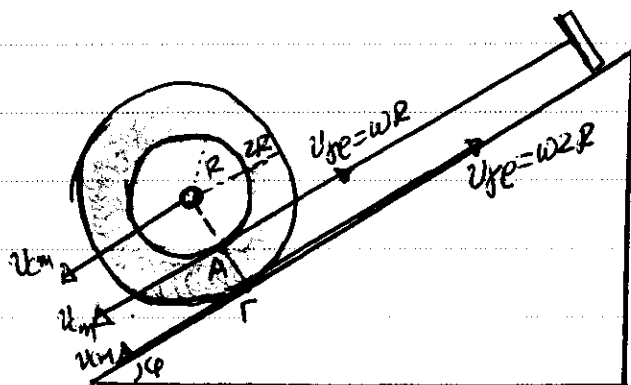


με το κέντρο (δίνω κατεύθυνση του νήματος) στο ευθείο ελαφύς Α.

$$v_A = 0 \Rightarrow v_{cm} - \omega R = 0 \Rightarrow v_{cm} = \omega R \quad (1)$$

Η ταχύτητα όπως του ευθείου ελαφύς Γ του κορδονιού με το κέντρο έχει οριζόντιο είδος

$$v_{\Gamma} = v_{cm} - \omega \cdot 2R \stackrel{(1)}{=} \omega R - 2\omega R$$



$\Rightarrow v_{\Gamma} = -\omega R \neq 0 \dots$ η επιφάνεια κινείται προς τα αριστερά από ότι η μεταφορική... κίνηση προς τα δεξιά ($v_{\Gamma} \neq 0$)

6.2) $v_{cm} = \omega R \Rightarrow \frac{dv_{cm}}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow a_{cm} = R a_{\mu\kappa}$
 [προδοχή: η ακτίνα "ελαφύς" είναι $2R$]

$$\Sigma F_x = M a_{cm} \Rightarrow Mg \eta \phi - T = M a_{cm}$$

$$\Sigma \tau = I a_{\mu\kappa} \Rightarrow T \cdot R = I \frac{a_{cm}}{R} \Rightarrow T = I \frac{a_{cm}}{R^2} \quad \left. \begin{array}{l} \text{(+)} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow Mg \eta \phi = \left(M + \frac{I}{R^2} \right) a_{cm}$$

$$\Rightarrow 4 \cdot 10 \cdot 0,6 = \left(4 + \frac{0,2}{0,01} \right) a_{cm} \Rightarrow 24 = 6 a_{cm} \Rightarrow a_{cm} = 4 \frac{m}{s^2}$$

$$a_{\mu\kappa} = \frac{a_{cm}}{R} = \frac{4 \frac{m}{s^2}}{0,1 m} \Rightarrow a_{\mu\kappa} = 40 \frac{rad}{s^2}$$

8.) Το νήμα κόβεται τη χρονική στιγμή t_1 : $\Delta \phi = \frac{1}{2} a_{\mu\kappa} t_1^2 \Rightarrow$

$$5 = \frac{1}{2} 40 t_1^2 \Rightarrow t_1 = 0,5 s$$

Τότε $v_{cm} = a_{cm} t_1 = 4 \cdot 0,5 = 2 \frac{m}{s}$ & $\omega = a_{\mu\kappa} t_1 = 40 \cdot 0,5 = 20 \frac{rad}{s}$

Μετά την $t_1 = 0,5 s$ υπάρχει

- οριζόντια $\Sigma F_x = M a'_{cm} \Rightarrow Mg \eta \phi = M a'_{cm} \Rightarrow a'_{cm} = g \eta \phi = 6 \frac{m}{s^2}$

- οριζόντια επιφάνεια κίνηση με $\omega = 20 \frac{rad}{s}$

Την $t = 0,6 s$ ή $t' = 0,1 s$ μετά το κόψιμο του νήματος έχουμε

- $v'_{cm} = v_{cm} + a'_{cm} t' = 2 + 6 \cdot 0,1 \Rightarrow v'_{cm} = 2,6 \frac{m}{s}$

- $\omega' = \omega = 20 \frac{rad}{s}$

8.1) $L = I \omega' = 0,02 \cdot 20 = 0,4 \text{ kg m}^2/s \Rightarrow L = 0,4 \text{ kg m}^2/s$

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma \tau = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{dL}{dt} = 0$$

$$8.2) K = \frac{1}{2} M V_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} 4 \cdot 2,6^2 + \frac{1}{2} 0,02 \cdot 20^2 \Rightarrow K = 17,52 \text{ J}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= \frac{dK_{tr}}{dt} + \frac{dK_{rot}}{dt} \\ \frac{dK_{rot}}{dt} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = 5 F_x v_{cm} = M g \eta r \varphi v_{cm} = 4 \cdot 10 \cdot 0,6 \cdot 2,6$$

$$\Rightarrow \frac{dK}{dt} = 62,4 \frac{\text{Joule}}{\text{s}}$$

7^η Επαναληπτική Εργασία: Μηχανική του στερεού.

1^ο Θέμα:

$$A.1) I_1 = \frac{1}{12} M l^2 + m l_1^2 = \frac{1}{12} 24 \cdot 3^2 + 0,2 \cdot 1,5^2$$

$$\Rightarrow I_1 = 2,25 \text{ kgm}^2$$

$$A.2) L_1 = I_1 \omega_1 = 2,25 \text{ kgm}^2 \cdot 8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\Rightarrow L_1 = 18 \text{ kgm}^2/\text{s}$$

$$B) I_2 = \frac{1}{12} M l^2 + m l_2^2 = \frac{1}{12} 24 \cdot 3^2 + 0,2 \cdot 1^2$$

$$\Rightarrow I_2 = 2 \text{ kgm}^2$$

$$\Sigma \tau_{\epsilon\zeta} = 0 \Rightarrow L = 6 \text{ rad} \Rightarrow$$

$$L_2 = L_1 \Rightarrow I_2 \omega_2 = L_1 \Rightarrow$$

$$\omega_2 = \frac{L_1}{I_2} = \frac{18 \text{ kgm}^2/\text{s}}{2 \text{ kgm}^2} \Rightarrow \omega_2 = 9 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\Gamma) K_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 = \frac{1}{2} 2,25 \cdot 8^2 \Rightarrow K_1 = 72 \text{ J}$$

$$K_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} 2 \cdot 9^2 \Rightarrow K_2 = 81 \text{ J}$$

$$E = W_F = K_2 - K_1 \Rightarrow E = 9 \text{ J}$$

$$\Delta) \text{ Κατά την έξοδο το } \Sigma \text{ έχει } \vec{v} = \vec{v}_y + \vec{v}_x \Rightarrow \vec{v} = \vec{\omega} \vec{R} + \vec{v}_x \dots$$

Το Σ έχει στροφορμή προφανώς εξαιτίας της v_y

Με διατήρηση στροφορμής των

συστημάτων ... βγαίνει ότι

η συνολική γωνιακή ταχύτητα ω_3 είναι

$$\omega_3 = \omega_1$$

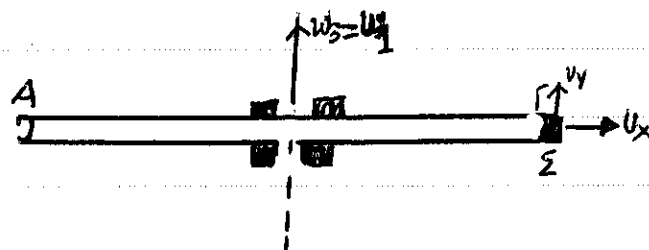
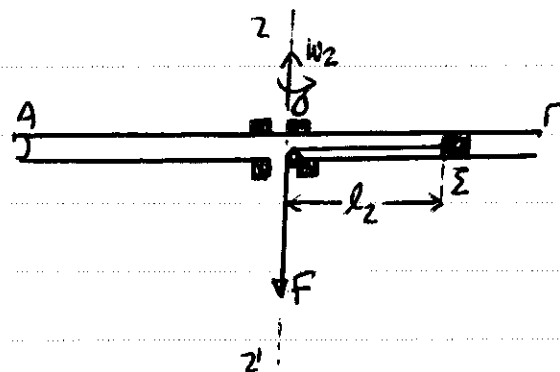
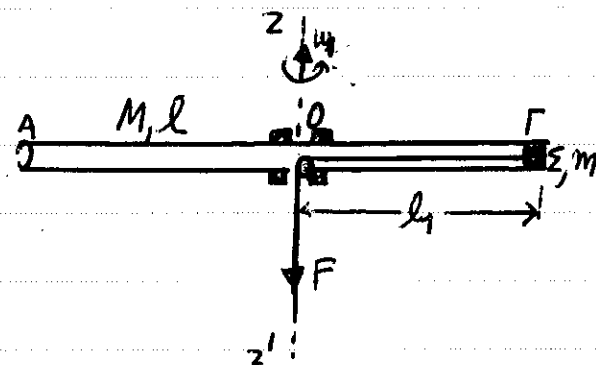
$$I_2 \omega_2 = I_1 \omega_3 \Rightarrow \omega_3 = \omega_2 \frac{I_2}{I_1} = 9 \cdot \frac{2}{2,25} \Rightarrow \omega_3 = 8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Από την διατήρηση μηχανικής ενέργειας έχουμε:

$$E_{\text{μηχ}} = \text{σταθερή} \Rightarrow K_{\text{αρχ}} = K_{\text{τελ}} \Rightarrow \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} I_{\text{συνολ}} \omega_3^2 + \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 9^2 = 1,8 \cdot 8^2 + 0,2 v^2 \Rightarrow v = \sqrt{234} \text{ m/s} \Rightarrow v \approx 15,3 \text{ m/s}$$

$$I_{\text{συνολ}} = \frac{1}{12} M l^2 = 1,8 \text{ kgm}^2$$



2ο Θέμα

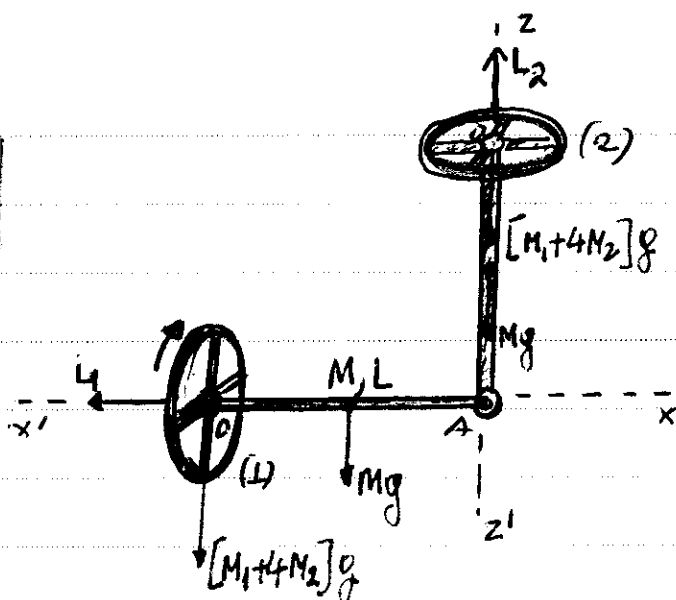
A.1) $I = I_x = I_{\text{σταθμίων}} + 4 I_{\text{ελαστών}} + I_{\text{OA}}$

$$I_{\text{σταθμίων}} = M_1 R^2 = 0,38 \cdot 0,2^2 = 0,0152 \text{ kgm}^2$$

$$I_{\text{ελαστών}} = \frac{1}{3} M_2 R^2 = \frac{1}{3} 0,09 \cdot 0,2^2 = 0,0012 \text{ kgm}^2$$

$$I_{\text{OA}} = 0$$

$$\text{όρα } I = 0,0152 + 4 \cdot 0,0012 \Rightarrow I = 0,02 \text{ kgm}^2$$



A.2) $K = \frac{1}{2} I \omega^2$
 $L = I \omega \Rightarrow K = \frac{L^2}{2I} \Rightarrow L = \sqrt{2IK}$

όριστη θέση (1) : $L_1 = \sqrt{2IK_1} = \sqrt{2 \cdot 0,02 \cdot 2,25} \Rightarrow L_1 = 0,3 \text{ kgm}^2/\text{s}$

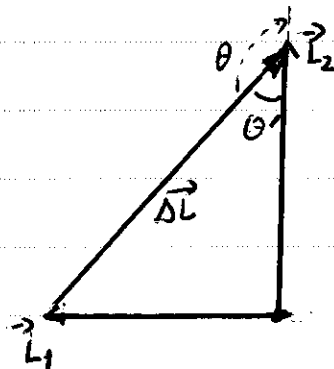
τέλητη θέση (2) : $L_2 = \sqrt{2IK_2} = \sqrt{2 \cdot 0,02 \cdot 4} \Rightarrow L_2 = 0,4 \text{ kgm}^2/\text{s}$

B.1)

$$\vec{\Delta L} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1 \text{ ή } \vec{L}_2 = \vec{L}_1 + \vec{\Delta L}$$

$$\Delta L = \sqrt{L_1^2 + L_2^2} \Rightarrow \Delta L = 0,5 \text{ kgm}^2$$

$$\epsilon \phi \theta' = \frac{L_1}{L_2} = \frac{0,03}{0,04} = 0,75$$



B.2) $W_{\text{ολ}} = \Delta K \Rightarrow W_F + W_f + W_{\text{βαρύν}} = K_2 - K_1 \quad (1)$

$$W_f = -|f| \varphi = -1 \text{ Nm} \cdot \frac{\pi}{2} = -1,57 \text{ J}$$

$$W_{\text{βαρύν}} = -[M_1 + 4M_2] g L - M g \frac{L}{2} = -3,16 \text{ J}$$

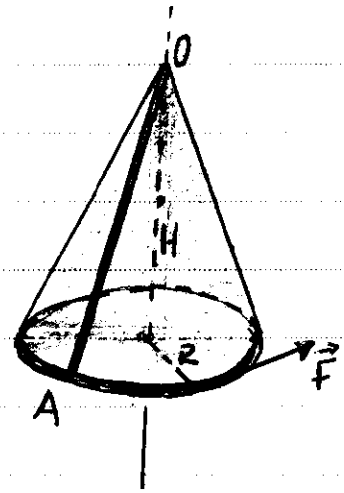
$$(1) \Rightarrow W_F - 1,57 - 3,16 = 4 - 2,25 \Rightarrow W_F = 6,48 \text{ J}$$

3^ο Θέμα

$$A.1) W_F = \tau_F \cdot \varphi = FR \frac{\Delta \theta}{R} = F \Delta \theta$$

$$W_F = K \Rightarrow F \Delta \theta = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{2FR}{I_1}}$$

$$\Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 16 \cdot 100}{\frac{1}{2} \cdot 17 \cdot 0,8}} \Rightarrow \omega_1 = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$



$$A.2) \Sigma \tau = I_1 \alpha_{\text{γων}} \Rightarrow FR = I_1 \alpha_{\text{γων}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_{\text{γων}} = \frac{FR}{I_1} \Rightarrow \alpha_{\text{γων}} = \frac{16 \cdot 100}{\frac{1}{2} \cdot 17 \cdot 0,8} \Rightarrow \alpha_{\text{γων}} = \frac{20}{\pi} \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

$$\omega = \alpha_{\text{γων}} t \Rightarrow t_1 = \frac{\omega_1}{\alpha_{\text{γων}}} \Rightarrow t_1 = \frac{20 \frac{\text{rad/s}}{20/\pi \frac{\text{rad/s}^2}}}{20/\pi \frac{\text{rad/s}^2}} \Rightarrow t_1 = \pi \text{ s} \Rightarrow t_1 = 3,14 \text{ s}$$

$$B) \text{ Λεωτήγας} = \text{σταθερή} \Rightarrow I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2 \Rightarrow I_1 \omega_1 = (I_1 + mR^2) \omega_2$$

$$\Rightarrow \omega_2 = \frac{0,8 \cdot 20}{0,8 + 0,2 \cdot 1^2} \Rightarrow \omega_2 = 16 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\Gamma.1) \Sigma \tau = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{I_1 \omega_2 - I_1 \omega_1}{\Delta t} = \frac{I_1 (\omega_2 - \omega_1)}{\Delta t} = \frac{0,8 (16 - 20)}{0,5} \Rightarrow \Sigma \tau = -6,4 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$\Gamma.2)$ Για τον κύβο:

$$W_{\text{ροπήων}} = \Delta K_{\text{στροφικού}} = \frac{1}{2} I_1 \omega_2^2 - \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 = \frac{1}{2} I_1 (\omega_2^2 - \omega_1^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_{\text{ροπήων}} = \frac{1}{2} 0,8 \cdot (16^2 - 20^2) \Rightarrow W_{\text{ροπήων}} = -57,6 \text{ Joule}$$

$$\Gamma.3) W = \Sigma \tau \cdot \Delta \varphi \Rightarrow 57,6 = 6,4 \cdot \Delta \varphi \Rightarrow \Delta \varphi = 9 \text{ rad}$$

4^ο Θέμα

A) Από το σχήμα φαίνεται

$$0,8 + \Delta l = 2r_1 \Rightarrow 0,8 + \Delta l = 1$$

$$\Rightarrow \Delta l = 0,2 \text{ m}, \quad F = 1000 \Delta l = 1000 \cdot 0,2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = 200 \text{ N}$$

Για τον καθε μωλινδρο γράφουμε

$$\Sigma F = m\omega_1^2 r_1 \xrightarrow{\text{SI}} 2F = 0,5 \cdot \omega_1^2 \cdot 0,5$$

$$\Rightarrow 400 = 0,25 \omega_1^2 \Rightarrow \omega_1 = 40 \text{ rad/s}$$

$$I_1 = I_0 + 2mr_1^2 \xrightarrow{\text{SI}} I_1 = 1 + 2 \cdot 0,5 \cdot 0,5^2 \Rightarrow I_1 = 1,25 \text{ kg m}^2$$

$$L_1 = I_1 \omega_1 = 1,25 \text{ kg m}^2 \cdot 40 \text{ rad/s} \Rightarrow L_1 = 50 \text{ kg m}^2/\text{s}$$

$$K_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 1,25 \text{ kg m}^2 \cdot (40 \text{ rad/s})^2 \Rightarrow K_1 = 1000 \text{ Joule}$$

B-1) $I_2 = I_0 + 2mr_2^2 \Rightarrow I_2 = 2 \text{ kg m}^2$

Διατήρηση γροαφορμής $I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{I_1 \omega_1}{I_2}$

$$\Rightarrow \omega_2 = \frac{1,25 \text{ kg m}^2 \cdot 40 \text{ rad/s}}{2 \text{ kg m}^2} \Rightarrow \omega_2 = 25 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

B-2) Για καθε κύλινδρο που γράφει κυκλική κίνηση ισχύει

$$\Sigma F = m\omega_2^2 r_2 \Rightarrow F' = m\omega_2^2 r_2 = 0,5 \text{ kg} \left(25 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 (1 \text{ m})^2 \Rightarrow F' = 312,5 \text{ N}$$

$$l_0 + \Delta l' = 2r_2 \xrightarrow{\text{SI}} 0,8 + \Delta l' = 2 \Rightarrow \Delta l' = 1,2 \text{ m}$$

$$F' = K \Delta l' \Rightarrow K' = \frac{312,5 \text{ N}}{1,2} \Rightarrow K = 260,4 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Γ-1) Μεταβολή της γροαφορμής τον σωλήνα στο χρονικό

διαστήμα $[t_1, t_2]$: $\Delta L = I_0 \omega_2 - I_0 \omega_1 = I_0 (\omega_2 - \omega_1) \Rightarrow$

$$\Delta L = 1 \text{ kg m}^2 (25 - 40) \text{ rad/s} \Rightarrow \Delta L = -15 \text{ kg m}^2/\text{s}$$

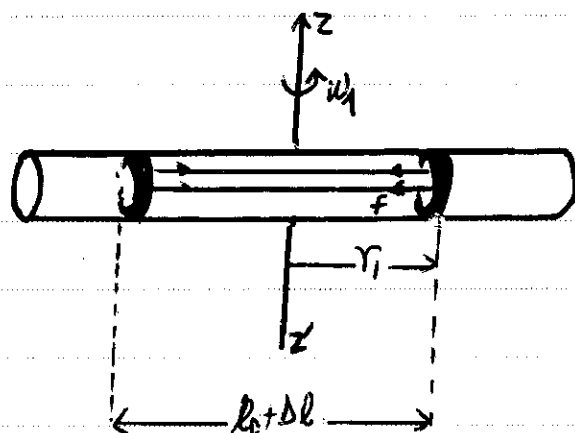
Μέση ροπή που δέχθηκε ο σωλήνας στο χρονικό

διαστήμα $\Delta t = t_2 - t_1 = 0,01 \text{ s}$

$$\Sigma \tau = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{-15 \text{ kg m}^2/\text{s}}{0,01 \text{ s}} \Rightarrow \Sigma \tau = -1500 \text{ N m}$$

Γ-2) Μεταβολή στην κινητική ενέργεια τον σωλήνα

στο χρονικό διαστήμα $\Delta t = t_2 - t_1$



$$\Delta K = K_2 - K_1 = \frac{1}{2} I_0 \omega_2^2 - \frac{1}{2} I_0 \omega_1^2 = \frac{1}{2} I_0 (\omega_2^2 - \omega_1^2) \Rightarrow$$

$$\Delta K = \frac{1}{2} 1 \text{ kg m}^2 (2^2 - 4^2) (\text{rad/s})^2 \Rightarrow \Delta K = -48 \text{ J, 5 Joule}$$

ΑΠΟ ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΚΙΝΗΤΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΓΙΑ ΤΟ
 ΟΛΩΣΤΟΧΑ ΣΥΣΤΗΜΑ Ε:

$$\Delta K = W_{\text{απορρ.}} \Rightarrow \Delta K = \sum \tau \cdot \Delta \varphi \quad \left(\begin{array}{l} \text{ΔΕΧΟΜΕΝΕ ΣΣ ΕΠΙΘΕΡΜΗ} \\ \dots \text{ΓΙΑ ΦΕΒΗ ΠΥΡΝΟΟΟ} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \Delta \varphi = \frac{\Delta K}{\sum \tau} \Rightarrow \Delta \varphi = \frac{-48 \text{ J}}{-1500 \text{ Nm}} \Rightarrow \Delta \varphi = 0,325 \text{ rad}$$

ή $\Delta \varphi = 18,63^\circ$

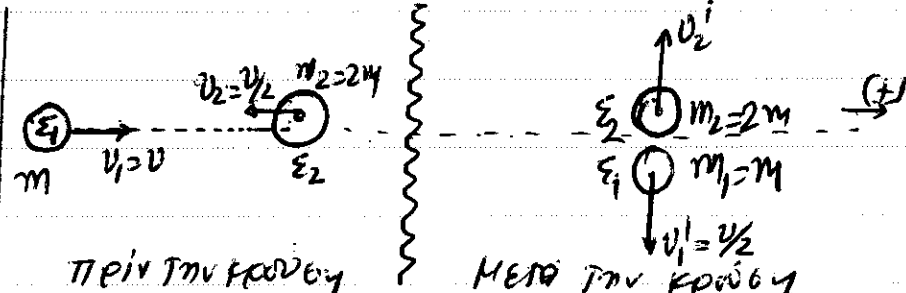
8^η Εποναληθητική εργασία: Κρούσεις - φαινόμενο Doppler.

1^ο Θέμα:

α) Ραρχική = $m_1 v_1 - m_2 v_2 = m v - 2m \frac{v}{2}$
 συνθήκες

$\Rightarrow$ Ραρχική = 0

$\vec{P}_{\text{μετ}} = \vec{P}_{\text{πριγ}} \Rightarrow \vec{P}'_1 + \vec{P}'_2 = 0 \Rightarrow$
 συνθήκες $\Rightarrow \vec{P}'_2 = -\vec{P}'_1$ δηλαδή οι
 σφαίρες, μετά την κρούση



πριν την κρούση μετά την κρούση

θα έχουν αντίθετες ορμές ... ορότε ναί η Σ_2 θα κινείται σε
 διτύνουση πω σχηματίζει γωνία 90° με την οριτική διτύνουση.
 α- γνωστό

β) $\vec{P}_{\text{μετ}} = 0 \Rightarrow m_2 v'_2 - m_1 v'_1 = 0 \Rightarrow m_2 v'_2 = m_1 v'_1 \Rightarrow 2m v'_2 = m \frac{v}{2} \Rightarrow v'_2 = \frac{v}{4}$
 β- λάθος

γ) $K_{\text{πριγ}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} 2m \left(\frac{v}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{4} m v^2 = \frac{3}{4} m v^2 = \frac{12}{16} m v^2$

$K_{\text{μετ}} = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{v}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} 2m \left(\frac{v}{4}\right)^2 = \frac{1}{8} m v^2 + \frac{1}{16} m v^2 = \frac{3}{16} m v^2$
 Έπειδή $K_{\text{πριγ}} > K_{\text{μετ}}$ η κρούση είναι ανελαστική
 δ- λάθος

δ)

$\pi \% = \frac{\Delta K}{K_{\text{πριγ}}} 100 \% = \frac{K_{\text{μετ}} - K_{\text{πριγ}}}{K_{\text{πριγ}}} 100 \% = \frac{\frac{3}{16} m v^2 - \frac{12}{16} m v^2}{\frac{12}{16} m v^2} 100 \%$

$\Rightarrow \pi \% = \frac{-9}{12} 100 \% \Rightarrow \pi \% = -75 \%$

δ- γνωστό

2^ο Θέμα

$$\vec{v}_{\text{ηχ},A} = \vec{v} - \vec{v}_A \Rightarrow v_{\text{ηχ},A} = v + v_A$$

$$\Rightarrow v + \frac{20}{100}v = v + v_A \Rightarrow v_A = 0,2v$$

$$\lambda_A = \lambda - v_s T \Rightarrow 0,8\lambda = \lambda - v_s T \Rightarrow \frac{v_s}{f_s} = 0,2\lambda \Rightarrow \frac{v_s}{f_s} = 0,2 \frac{v}{f_s} \Rightarrow v_s = 0,2v$$

$$f_A = \frac{v + v_A}{v - v_s} f_s = \frac{v + 0,2v}{v - 0,2v} f_s = \frac{1,2}{0,8} f_s = 1,5 f_s, \quad \Delta f = f_A - f_s = 0,5 f_s$$

$$\pi\% = \frac{\Delta f}{f_s} 100\% = \frac{0,5 f_s}{f_s} 100\% \Rightarrow \pi\% = +50\%$$

Σωστή η πρόταση (γ)

Σχόλιο: Ένας διαφορετικός τρόπος υπολογισμού της f_A

$$v_{\text{ηχ},A} = v + \frac{20}{100}v = 1,2v, \quad \lambda_A = 0,8\lambda$$

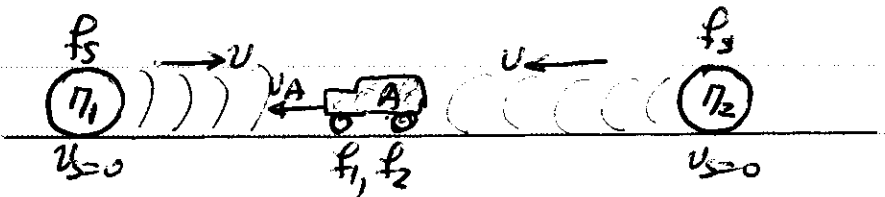
$$v_{\text{ηχ},A} = \lambda_A f_A \Rightarrow f_A = \frac{v_{\text{ηχ},A}}{\lambda_A} \Rightarrow f_A = \frac{1,2v}{0,8\lambda} = 1,5 \frac{v}{\lambda} = 1,5 f_s$$

3^ο Θέμα

A) Ο ήχος που λαμβάνει

ο A είναι ο ήχος που

η₁ και η₂ έχει



συχνότητα $f_1 = \frac{v + v_A}{v} f_s$ και $f_2 = \frac{v - v_A}{v} f_s$. Ο σύνθετος ακούγ

ήχος που λαμβάνει ο A είναι διακροήματα με συχνότητα

$$\text{διακροήματος } f_D = f_1 - f_2 \Rightarrow f_D = \frac{v + v_A}{v} f_s - \frac{v - v_A}{v} f_s \Rightarrow f_D = \frac{2v_A}{v} f_s$$

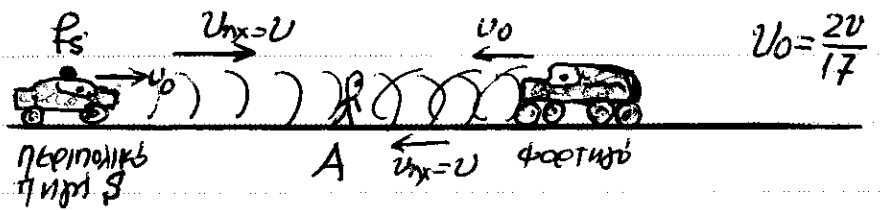
$$\frac{f_D = f_s/100}{\frac{f_s}{100}} = \frac{2v_A}{v} f_s \Rightarrow v_A = \frac{v}{200}$$

Άρα σωστή η σχέση A-2

B) Η συχνότητα των σύνθετων ήχου που λαμβάνει ο A

$$\text{είναι } \bar{f} = \frac{f_1 + f_2}{2} = \frac{v + v_A}{2v} f_s + \frac{v - v_A}{2v} f_s = \frac{2v}{2v} f_s \Rightarrow \bar{f} = f_s$$

Άρα σωστή η σχέση B-1

4^ο Θέμα

Ο παρατηρητής Α λαμβάνει

πρώτο συχρότητα f_1 αθ' εμάς

από την πηγή S και στο συχρότητα f_2 δεύτερα αθ' εμάς από την ανάκλαση των ηχητικών κυμάτων στο φορτηγό. Η πρώτη συχρότητα f_1 είναι

$$f_1 = \frac{v}{v - v_0} f_s \quad (1)$$

Υπολογισμός της f_2

Τα ηχητικά κύματα λαμβάνονται και ανάκλινται από

το φορτηγό με συχρότητα $f' = \frac{v + v_0}{v - v_0} f_s$ (2) (θεωρούμε υποθετικό παρατηρητή στο φορτηγό)... δηλαδή τώρα το φορτηγό είναι δευτερογενής πηγή που εκπέμπει με συχρότητα f' .

Αυτά τα κύματα λαμβάνονται από τον Α με

$$\text{συχρότητα } f_2 = \frac{v}{v - v_0} f' \xrightarrow{(2)} f_2 = \frac{v}{v - v_0} \frac{v + v_0}{v - v_0} f_s \quad (1)$$

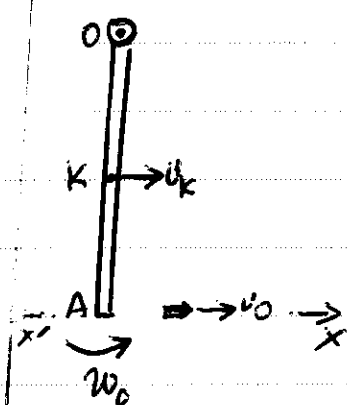
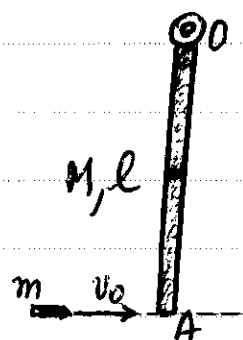
$$\Rightarrow f_2 = \frac{v(v + v_0)}{(v - v_0)^2} f_s \quad (3)$$

$$\frac{(1)}{(3)} \Rightarrow \frac{f_1}{f_2} = \frac{\frac{v}{v - v_0} f_s}{\frac{v(v + v_0)}{(v - v_0)^2} f_s} \Rightarrow \frac{f_1}{f_2} = \frac{v - v_0}{v + v_0} \Rightarrow \frac{f_1}{f_2} = \frac{v - \frac{2v}{17}}{v + \frac{2v}{17}} = \frac{15}{19}$$

$$\Rightarrow \frac{f_1}{f_2} = \frac{15}{19} \quad \text{Άρα σωστή η σχέση (β)}$$

5^η Θέμα

- α) Το σύστημα δεν είναι μονωμένο
 στον άξονα π'χ (η ράβδος είναι
 άρθρωτη) ... και δεν είναι ελεύθερο
 για μετατόπιση, άρα δεν μπορεί
 να έχουμε διατήρηση ορμής
 του συστήματος ράβδος - βλήτα
 Η πρόταση (α) είναι λάθος



- β) Η κρούση είναι θνητλαστική και υπάρχουν θωλώσεις
 μηχανική ενέργειας $Q_{\text{απώλεια}} = E_{\text{μηχ}} - E_{\text{μηχ}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow Q = |DE| = \frac{1}{2} m v_0^2 - \left[\frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} I \omega_0^2 \right]$$

Άρα (β) λάθος

- γ, δ) Έδώ έχουμε διατήρηση μηχανικής του συστήματος
 άξονα πριν και θωλώσεις μετά την κρούση
 ($\sum \tau_{\text{αξονα πριν}} = 0$)

[... κρούση ... και ελεύθερη δυνατότητα περιστροφής
 κίνησης ...]

$$\left. \begin{aligned} L_{\text{πριν}} &= L_{\text{μετά}} \Rightarrow m v_0 l = m v_1 l + I \omega_0 \\ v_K &= \omega_0 \frac{l}{2} \Rightarrow \omega_0 = \frac{2 v_K}{l} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m v_0 l = m v_1 l + I \frac{2 v_K}{l} \Rightarrow m (v_0 - v_1) l = \frac{2 I}{l} v_K$$

Άρα γ- λάθος
 δ- σωστή

6^ο Θέμα

$$M_1 = 1 \text{ kg}, M_2 = 3 \text{ kg}, K = 300 \text{ N/m}$$

$$R = 0,1 \text{ m} \quad \ell = 2R, v_0 = 4 \text{ m/s}$$

α) Πριν η εφαιρα κυλίεται

χωρίς ολίσθηση $v_0 = \omega_0 R$

$$\Rightarrow \omega_0 = \frac{v_0}{R} \Rightarrow \omega_0 = \frac{4 \text{ m/s}}{0,1 \text{ m}} \Rightarrow$$

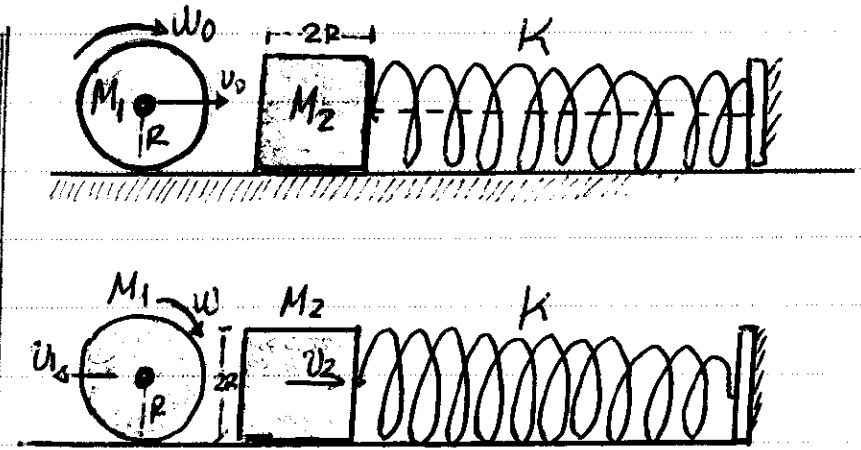
$$\Rightarrow \omega_0 = 40 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Κινητική ενέργεια εφαιρας

$$K = \frac{1}{2} M_1 v_0^2 + \frac{1}{2} I \omega_0^2 = \frac{1}{2} M_1 v_0^2 + \frac{1}{2} \frac{2}{5} M_1 R^2 \frac{v_0^2}{R^2} \Rightarrow K = \frac{1}{2} M_1 v_0^2 + \frac{1}{5} M_1 v_0^2 \Rightarrow K = \frac{7}{10} M_1 v_0^2$$

$$\Rightarrow K = \frac{7}{10} 1 \text{ kg} (4 \text{ m/s})^2 \Rightarrow K = 11,2 \text{ Joule}$$

$$L = I \omega_0 \Rightarrow L = \frac{2}{5} M_1 R^2 \omega_0 \Rightarrow L = \frac{2}{5} 1 \text{ kg} (0,1 \text{ m})^2 \cdot 40 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow L = 0,16 \text{ kg m}^2/\text{s}$$



β-1) Έπειτα οι δύο σώματα βγαίνουν με ταχύτητες μετά την διαδρομή της κρούσης είναι μεντοιές - διερχόμενες από το CM δεν έχω ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής γη) ... και έτσι διατηρείται η διαφορετικότητα

$$\frac{L_{\text{εφαιρας}}}{\text{πριν}} = \frac{L_{\text{εφαιρας}}}{\text{μετά}} \Rightarrow I \omega_0 = I \omega_1 \Rightarrow \omega_1 = \omega_0 \Rightarrow \omega_1 = 40 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

... Η εφαιρα συνεχίζει να στρέφεται στην ίδια φορά με την ίδια γωνιακή ταχύτητα!

β-2) Για την κρούση εφαιρας κύβου έχουμε διατήρηση ορμής και διατήρηση μηχανικής ενέργειας την συστήματος

$$M_1 v_0 = M_1 v_1 + M_2 v_2$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} M_1 v_0^2 + \frac{1}{2} I \omega_0^2 &= \frac{1}{2} M_1 v_1^2 + \frac{1}{2} I \omega_1^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2^2 \end{aligned} \right\} \text{όσο το σύστημα αργά παύει να κινείται}$$

$$v_1 = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} v_0 = \frac{1 - 3}{1 + 3} \cdot 4 = -2 \text{ m/s} \Rightarrow v_1 = -2 \text{ m/s}$$

$$v_2 = \frac{2 M_1}{M_1 + M_2} v_0 = \frac{2 \cdot 1}{1 + 3} \cdot 4 = 2 \text{ m/s} \Rightarrow v_2 = 2 \text{ m/s}$$

$$\delta) K_{\text{ερω}}' = \frac{1}{2} M_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} I \omega_1'^2 = \frac{1}{2} M_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} \frac{2}{5} M_1 R^2 \omega_1'^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_{\text{ερω}}' = \frac{1}{2} M_1 v_1'^2 + \frac{1}{5} M_1 R^2 \omega_1'^2 = \frac{1}{2} 1 \cdot 2^2 + \frac{1}{5} \cdot 1 \cdot 0,1^2 \cdot 40^2 \Rightarrow K_{\text{ερω}}' = 5,2 \text{ Joule}$$

Ποσοστό μεταβολής $\pi\% = \frac{\Delta K}{K_{\text{πρω}}} 100\% = \frac{5,2 \text{ J} - 11,2 \text{ J}}{11,2 \text{ J}} 100\%$

$$\Rightarrow \pi\% = -53,57\%$$

$$\delta) \text{ Για την ταλάντωση του κύβου } D = k = M_2 \omega_{\text{cμ}}^2 \Rightarrow \omega_{\text{cμ}} = \sqrt{k/M_2}$$

$$\Rightarrow \omega_{\text{cμ}} = \sqrt{\frac{300 \text{ N/m}}{3 \text{ kg}}} \Rightarrow \omega_{\text{cμ}} = 10 \text{ rad/s}$$

$$v_2 = v_{\text{max}} = \omega_{\text{cμ}} A \Rightarrow 2 = 10 \cdot A \Rightarrow A = 0,2 \text{ m}$$

Θεωρώντας θετικό ως προς τη δεξιά τον άξονα της και $t=0$ να είναι έρχεται η ταλάντωση ...

$$x = A \sin(\omega t) \Rightarrow x = 0,2 \sin(10t) \quad (\text{SI})$$

$$v = v_{\text{max}} \cos(\omega t) \Rightarrow v = 2 \cos(10t) \quad (\text{SI})$$