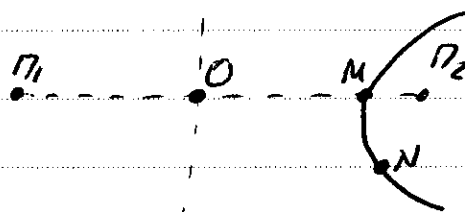


2ο Διαγωνίσμα προβολογώσεως - Γ' Λυκείου

Θέμα Α: 1-δ, 2-δ, 3-δ, 4-δ, 5 (α-η, β-ξ, δ-η, ε-ζ)

A.1 $E = E_1 + E_2 - 2\sqrt{E_1 E_2} = 1,6 + 99 - 2\sqrt{1,6 \cdot 99} = 0,17 \Rightarrow E = 0,17$ δ-ε

A.2



$$\pi_1 H - \pi_2 H = [\pi_1 O + OM] - [\pi_2 O - OM] = 2(OM) \Rightarrow$$

$$\pi_1 H - \pi_2 H = 6,57 = 13 \frac{2}{2} \text{ ή } \pi_2 H - \pi_1 H = -6,57$$

Το Η είναι σημείο απόβλεψης

$2k+1=13 \Rightarrow k=6.000$ και ανήκει στην 7η πηληθήτη απόβλεψη

γύρω τη γεωμετρία (κ=0,1,2,000,6)

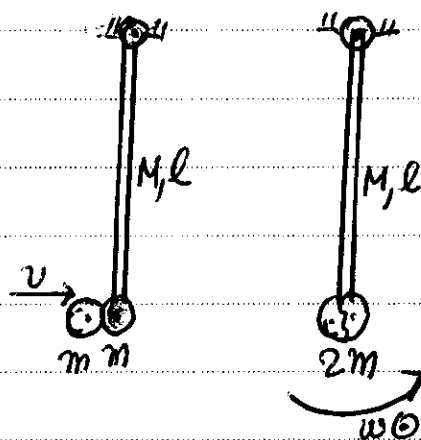
Συνολο απόβλεψων $f+f=14$ δ-ε

A.3

$$\left. \begin{aligned} L_{\text{αξ}} &= 0 \text{ σταθερή} \Rightarrow mvl + 0 = I_{\text{αξ}} \omega \\ I_{\text{αξ}} &= \frac{1}{3} M l^2 + 2m l^2 = \frac{1}{3} 6m l^2 + 2m l^2 = 4m l^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mvl = 4m l^2 \omega \Rightarrow v = 4l\omega \Rightarrow \omega = \frac{v}{4l}$$

Σωστή η' (δ)



A.4) $k_{\text{γερμ}} = \frac{36}{100} k_{\text{νερμ}} \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{36}{100} \frac{1}{2} m_1 v_0^2 \Rightarrow v_1 = \pm 0,6 v_0$

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0 \Rightarrow +0,6 v_0 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0 \Rightarrow 0,6 m_1 + 0,6 m_2 = m_1 - m_2$$

$$\Rightarrow 1,6 m_2 = 0,4 m_1 \Rightarrow m_1 = 4 m_2$$

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0 \Rightarrow -0,6 v_0 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0 \Rightarrow -0,6 m_1 - 0,6 m_2 = m_1 - m_2$$

$$\Rightarrow 0,4 m_2 = 1,6 m_1 \Rightarrow m_2 = 4 m_1 \text{ άρα σωστή η' (δ)}$$

A.5 (α-1, β-ε, δ-1, ε-1, ζ-ε)

→ Το ποίσε είναι ποσάδα του συντελεστή ξείδου αλλάδ' όχι στο SI

→ Η ποση αδρόνεια είναι νέμεδος ποσάδερο, ούτε $I = I_1 + I_2$ δάδουα ναεί, αν είναε η μυνία φπιν δτηγορήσων οί ράβδου OA ναεί OB.

Θέμα Β

B.1. Αρχικά πρίν είςατε το γάδ' $v_1 = \sqrt{2g(H-y)} \Rightarrow v_1^2 = 2g(H-y)$
...στη συνφρα...
Bernoulli (Γ-Δ)

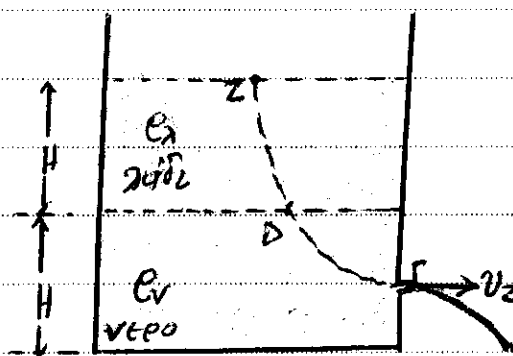
$$P_A + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + 0 = P_B + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g(H-y)$$

$$\underline{v \ll v_2} \quad P_A + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_B + \rho g(H-y) \quad (1)$$

Bernoulli (Δ-Ζ)

$$P_\Delta + \frac{1}{2} \rho v^2 = P_A + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g H \Rightarrow$$

$$P_\Delta = P_A + \rho g H \quad (7)$$



$$(1), (7) \Rightarrow P_A + \frac{1}{2} \rho v_2^2 = P_A + \rho g H + \rho g(H-y) \Rightarrow$$

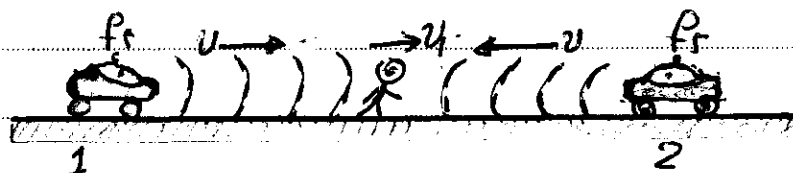
$$\Rightarrow v_2^2 = 2g(H-y) + 2 \frac{\rho}{\rho} g H$$

$$v_2^2 = (1,5v_1)^2 \Rightarrow 2g(H-y) + 2 \frac{\rho}{\rho} g H = 2,25 \cdot 2g(H-y)$$

$$\Rightarrow 2 \frac{\rho}{\rho} g H = 2,5g(H-y) \Rightarrow 2 \frac{9625 \rho}{\rho} g H = 2,5gH - 2,5gy$$

$$\Rightarrow 1,25H = 2,5H - 2,5y \Rightarrow 2,5y = 1,25H \Rightarrow y = \frac{H}{2} \quad \text{Σωστό το (δ)}$$

B.2



Το ποινδί δέχεται 7α

ηχητικά κύματα από τα περιηγητικά (1) και (2) με συχνότητες

$$f_1 = \frac{v - v_1}{v} f_s \text{ και } f_2 = \frac{v + v_1}{v} f_s$$

$$\text{Συχνότητα διακροτήματος } f_D = f_2 - f_1 = \frac{v + v_1}{v} f_s - \frac{v - v_1}{v} f_s \Rightarrow$$

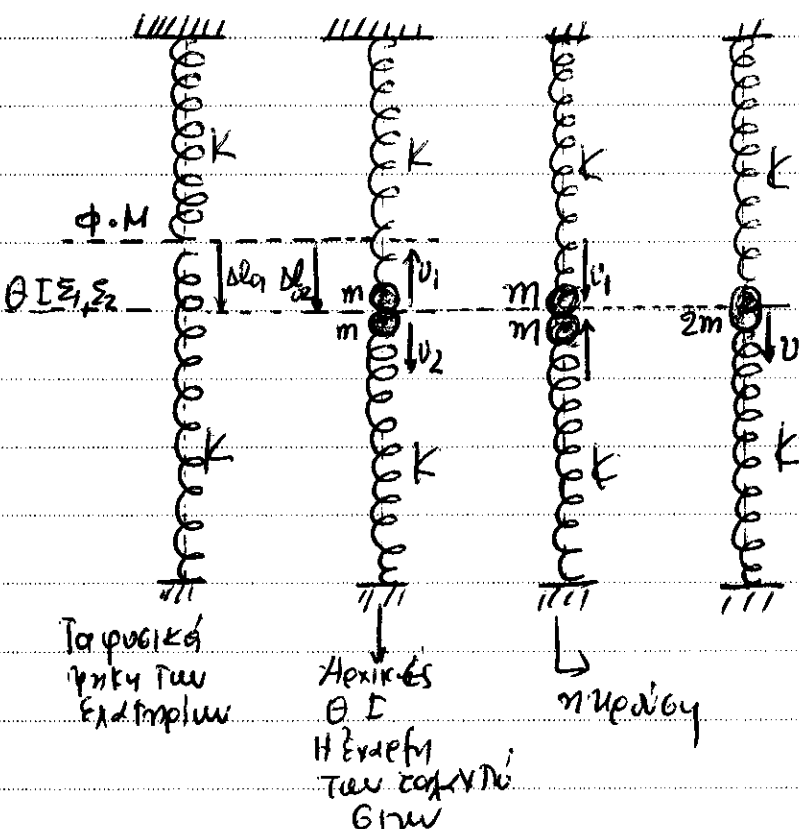
$$\Rightarrow f_D = \frac{2v_1}{v} f_s \Rightarrow f_D = \frac{2v_1}{\lambda f_s} f_s \Rightarrow f_D = \frac{2v_1}{\lambda}$$

$$\text{Περίοδος διακροτήματος } T_D = \frac{1}{f_D} \Rightarrow T_D = \frac{\lambda}{2v_1} \text{ ή } \Delta t = \frac{\lambda}{2v_1}$$

Αρα άκου το (8)

B.3

$$\begin{aligned} \text{Θέσω ισορροπία των } \Sigma_1 : mg = k\Delta\ell_1 \Rightarrow \Delta\ell_1 &= \frac{mg}{k} \\ \text{Θέσω ισορροπία των } \Sigma_2 : mg = k\Delta\ell_2 \Rightarrow \Delta\ell_2 &= \frac{mg}{k} \end{aligned} \Rightarrow \Delta\ell_1 = \Delta\ell_2$$



Από το 13 και 22 σχήμα φαίνεται ότι τα ελατήρια "εφάπτονται" όταν έχουν το φυσικό των μήκους... και οι Θ.Σ. των Σ_1, Σ_2 ταλαντώνονται. Οι ταχύτητες v_1, v_2 είναι οι φέροντες και τα αντίστοιχα πλάτη A_1 και A_2 είναι $v_1 = \omega_1 A_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} A_1$ $v_2 = \omega_2 A_2 = \sqrt{\frac{k}{m}} A_2$ Οι άρχει, ταλαντώνονται, έχουν την ίδια περίοδο

$T_1 = T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$... και η υαλδα ηνεται νότερα αωδ $\frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}$
 οτις θέβει ίσοερωδία των ξ_1, ξ_2 ... να προαρη
 έχου μέτρα ταχύτητα $v_{1max} = v$, $v_{2max} = v_2$.

... διατήρηση ορμής ... $m v_1 - m v_2 = 2m v \Rightarrow v = \frac{v_1 - v_2}{2}$

Η νέα ταλάνωδα του ξ_{12} έχει θέση ίσοερωδία (κέντρο ταλάνωδας) βρω δλο κέντρω αωδ το $\phi.H$...

$$2mg = k\Delta l_0 + k\Delta l_0 \Rightarrow \Delta l_0 = \frac{mg}{k} = \dots = \Delta l_{01} = \Delta l_{02}$$

... δηλαδή το ξ_{12} έχει το ίδιο κέντρο ταλάνωδας
 με αωτό των ξ_1, ξ_2 άρα $v = \frac{v_1 - v_2}{2} = v_{max} = \omega A$

$$\Rightarrow \frac{v_1 - v_2}{2} = \sqrt{\frac{2k}{2m}} \cdot A \Rightarrow \frac{\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot A_1 - \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot A_2}{2} = \sqrt{\frac{k}{m}} A \Rightarrow A = \frac{A_1 - A_2}{2}$$

άρα σωστή η (β)

Θέμα Γ!

Γενικά σχόλια για την ενέργεια της χορδής στην οθωία έχει
 σχημαπιδεί βήθιγο κύμα.

έβρω η εξίσωση των βήθιγων κώτατος

$y(x, t) = 2A \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \sin(\omega t)$ και το σιγχιότοπο των
 κώτατος των $t = t_1$ είναι $y(x) = 2A \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \sin(\omega t_1)$

τη σιγχιή t_1 για κάθε

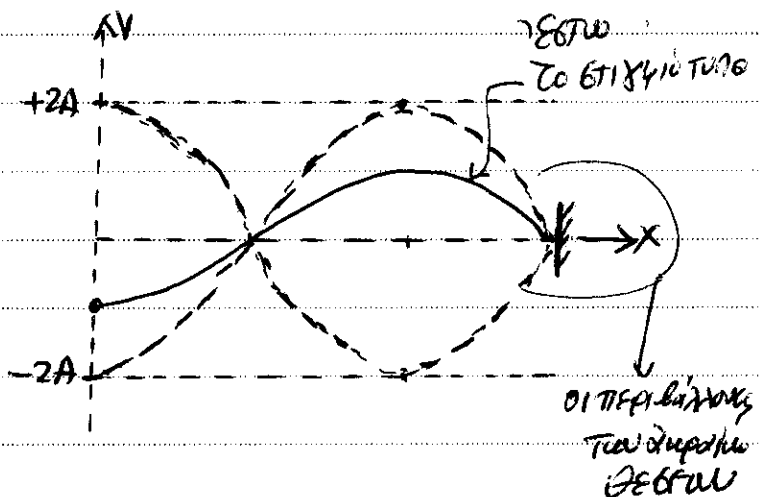
βήθιο της χορδής που

έχει θέση ίσοερωδία

χί, το κλάδα της απομάκρυ-
 νου, πρβ το πλάτος

ταλάνωδας των έχει

την ίδια απόλυτη πηχί



$$y_i = 2A \sin\left(\frac{2\pi x_i}{\lambda}\right) \sin(\omega t) \Rightarrow \frac{y_i}{2A \sin\left(\frac{2\pi x_i}{\lambda}\right)} = \sin(\omega t) \text{ ή } \frac{|y_i|}{A_i} = |\sin(\omega t)| \quad (1)$$

Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε χρονική στιγμή όλα τα σημεία της χορδής (εμπρός από τον δέκτη) βρίσκονται σε ^{τάση} $\pm A$ από την θέση ισορροπίας τους, που είναι το ίδιο ποσοστό των πλάτους της ταλάντωσης τους.

πχ. αν η κοιλία είναι στο 20% του πλάτους της τότε άλλο σημείο της χορδής είναι στο 70% του δικού του πλάτους.

— Τώρα αν υποθέσουμε ότι στη θέση x_i έχουμε την χορδή είναι ότι έχουμε

$$(1) \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} \rho \omega^2 y_i^2}{\frac{1}{2} \rho \omega^2 A_i^2} = \sin^2(\omega t) \Rightarrow \frac{U_i}{E_i} = \sin^2(\omega t) \text{ οπότε σημαίνει}$$

ότι σε κάθε χρονική στιγμή η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης κάθε στοιχειώδους μάζας αντιστοιχεί το ίδιο ποσοστό της ενέργειας ταλάντωσης της μάζας αυτής.

πχ. αν η δυναμική ενέργεια — κοιλία — στιγμή — της κοιλίας είναι το 40% της ολικής ενέργειας της

κοιλίας, τότε και για κάθε άλλο σημείο της

χορδής — την ίδια στιγμή — η δυναμική της ενέργεια είναι το 40% της ολικής της ενέργειας

— Αν τώρα υποθέσουμε ότι η χορδή χωρίζεται σε N τμήματα (1, 2, 3, ..., N) τότε η ενέργεια σε αυτά είναι — την ίδια στιγμή t_1 —

$$\frac{U_1}{E_1} = \frac{U_2}{E_2} = \dots = \frac{U_N}{E_N} = \sin^2(\omega t_1) \Rightarrow$$

$$\frac{U_1}{E_1} = \frac{U_2}{E_2} = \dots = \frac{U_N}{E_N} = \frac{U_1 + U_2 + \dots + U_N}{E_1 + E_2 + \dots + E_N} = \frac{U_{\text{ολ, χορδής}}}{E_{\text{ολ, χορδής}}} = \sin^2(\omega t_1)$$

$$\Rightarrow \frac{U_i}{E_i} = \frac{U_{\text{χορδής}}}{E_{\text{χορδής}}} = \eta t^2 (\omega t_1)$$

Αρα \leftarrow την διαστολή
το κλασικό της δυναμικής ενέργειας ταράχμευ,
υπόθεστέ οτι είναι η ίδια προς την ολική μζ. Ζούτα
ξε το κλάσμα της δυναμικής ενέργειας από
την χορδή προς την ολική ενέργεια της χορδής.

... τώρα στην δοκιμή ...

Γ.1) όπ δύο και τρία ενέργειες (δυναμική, ολική) των
χορδών δύο και τρία κοίλια.

$$U_{\text{χορδ}} + K_{\text{χορδ}} = E_{\text{χορδ}} \quad K_{\text{χορδ}} = 3U_{\text{χορδ}} \rightarrow 4U_{\text{χορδ}} = E_{\text{χορδ}} \Rightarrow 4 \cdot \frac{1}{2} D Y_k^2 = \frac{1}{2} D A_k^2$$

$$\Rightarrow 4 Y_k^2 = A_k^2 \Rightarrow Y_k = \frac{A_k}{2} = \frac{2A}{A} = A = 0,1 \text{ m}$$

$$\text{όρα } A_k = 2A = 0,2 \text{ m}$$

$$\text{Εξίσωση ταράχμευ κοίλιου αχίο) } y_0 = 2A \sin(\omega t) \\ \int t = t_1, y_0 = +A \Rightarrow A = 2A \sin(\omega t_1) \Rightarrow \omega t_1 = 2\pi n + \frac{\pi}{6} \quad (\dots \text{ταράχμευ } v > 0)$$

$$\int t = t_2, y_0 = +2A \Rightarrow 2A = 2A \sin(\omega t_2) \Rightarrow \omega t_2 = 2\pi n + \frac{\pi}{2}$$

$$\omega t_2 - \omega t_1 = [2\pi n + \frac{\pi}{2}] - [2\pi n + \frac{\pi}{6}] \Rightarrow \omega(t_2 - t_1) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \omega \frac{1}{45} = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \omega = 15\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow 2\pi f = 15\pi \Rightarrow f = 7,5 \text{ Hz}$$

Γ.2) ... Η ελαστικότητα της χορδής ονομάζεται
σταθερά ελαστικότητας $F_0 = \frac{v}{4\ell}$ (παράγ.)

$$\Rightarrow 2,5 = \frac{12}{4\lambda} \Rightarrow \lambda = 1,2 \text{ m}$$

Για να έχουμε σταδία κέραια στη χορδή αυτή πρέπει $f = (2k+1)f_0$ (σταθία)

$$\begin{cases} f = 7,5 \text{ Hz} \\ f_0 = 2,5 \text{ Hz} \end{cases} \quad 2k+1 = 3 \Rightarrow k=1$$

από αυτό ούο δεσμούς

$$k=0, 1$$

$$\Gamma.3) \quad y_{\text{στ}}(x,t) = 2A \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \sin(\omega t)$$

$$v = \lambda f \Rightarrow 12 = \lambda \cdot 7,5 \Rightarrow \lambda = 1,6 \text{ m}$$

$$y_{\text{στ}}(x,t) = 0,2 \sin(1,25\pi x) \sin(150\pi t) \quad (\text{S.I})$$

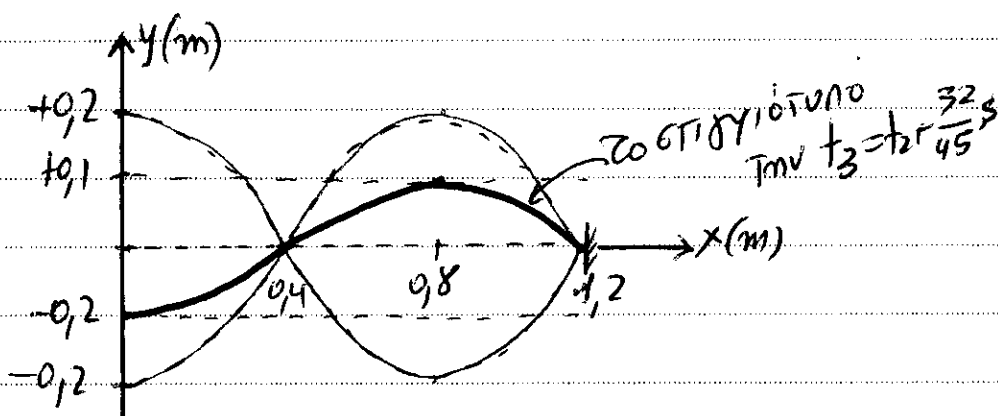
$$\text{και για } t_3 = \frac{1}{2} + \frac{32}{45} \text{ s} \Rightarrow t_3 = kT + \frac{T}{2} + \frac{32}{45} \text{ s} \quad \text{εχουμε}$$

$$y(x) = 0,2 \sin[1,25\pi x] \sin\left[150\left[kT + \frac{T}{2}\right] + \frac{32}{45}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x) = 0,2 \sin[1,25\pi x] \sin\left[\frac{2\pi}{T}kT + \frac{2\pi}{T}\frac{T}{2} + 150\frac{32}{45}\right]$$

$$\Rightarrow y(x) = 0,2 \sin(1,25\pi x) \sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{32\pi}{3}\right) \Rightarrow \dots$$

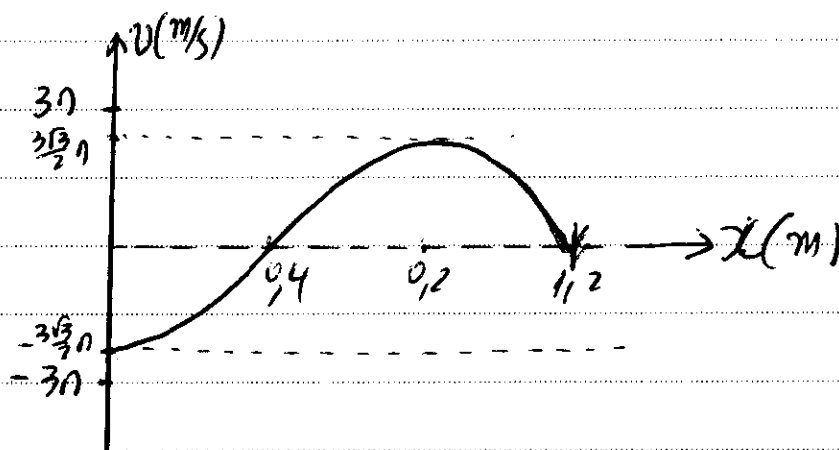
$$y(x) = 0,2 \sin(1,25\pi x) \sin\left(10\pi + \frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow y(x) = -0,1 \sin(1,25\pi x)$$



$$y_{01}(x,t) = 0,26w(1,25\pi x) \sin(15\pi t) \rightarrow$$

$$v(x,t) = \frac{dy}{dt} = 306w(1,25\pi x) \cos(15\pi t) \dots \frac{t}{3} = \frac{t}{2} + \frac{32}{45} s \dots$$

$$v(x) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \pi 6w(1,25\pi x)$$



$$\Gamma. y_H(t) = 0,26w[1,25\pi [x_{2k} \pm \frac{4}{15}]] \sin(15\pi t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_H(t) = 0,26w[1,25\pi (0,8 \pm \frac{4}{15})] \sin(15\pi t) \Rightarrow$$

$$y_H(t) = 0,26w[\pi \pm \frac{2}{3}] \sin(15\pi t) \Rightarrow y_H(t) = -0,1 \sin(15\pi t)$$

$$v = K \Rightarrow \dots v + K = E \Rightarrow 2v = E \Rightarrow 2 \frac{1}{2} D y_H^2 = \frac{1}{2} D A_H^2 \Rightarrow y_H = \pm \frac{A_H}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow y_H = \pm \frac{0,1}{\sqrt{2}} \dots \text{και για } 3^{\text{ο}} \text{ πορ } 3^{\text{ο}} \text{ και } y_H = \pm \frac{0,1}{\sqrt{2}} \cdot w$$

$$y_H(t) = -0,1 \sin(15\pi t) \Rightarrow \pm \frac{0,1}{\sqrt{2}} = -0,10 \sin(15\pi t) \Rightarrow$$

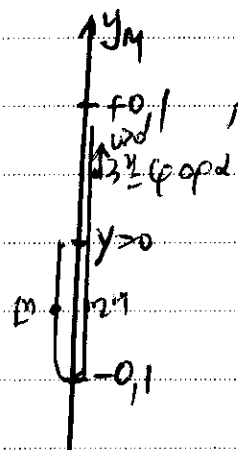
$$\sin(15\pi t) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} 15\pi t = 2\pi n + \pi + \frac{\pi}{4} \\ 15\pi t = 2\pi n + 2\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

→ αρα εις ας δειχθ

και k=0 διότι v>0

$$\text{αρα } 15\pi t = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{5}{60} s$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{12} \text{ sec}$$



Г.5 $y_{6T}(x,t) = 0,26\omega(1,25\pi x) \sin(15\pi t)$

• При $0 \leq x < 0,4 \text{ м}$ $6\omega(1,25\pi x) > 0 \Rightarrow y(x,t) = 0,26\omega(1,25\pi x) \sin(15\pi t)$

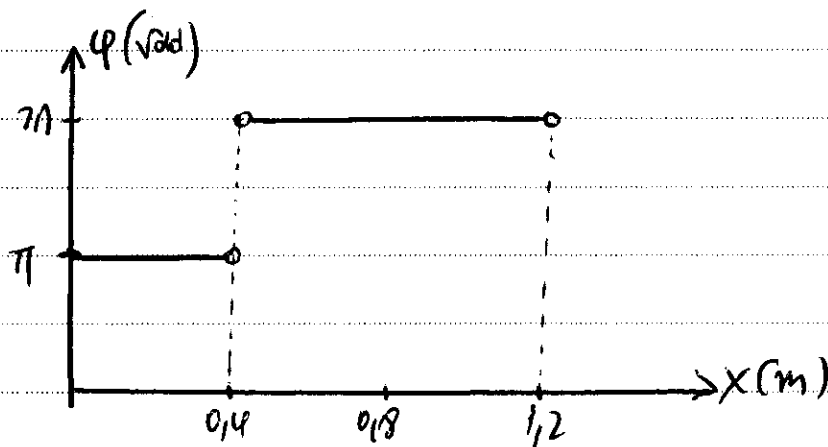
$$\varphi = 15\pi t \xrightarrow{t = \frac{2}{30} \text{ с}} \varphi = \pi \text{ рад}$$

• При $0,4 \text{ м} < x < 1,2 \text{ м}$ $6\omega(1,25\pi x) < 0$

$$y(x,t) = -0,26\omega(1,25\pi x) \sin(15\pi t) \Rightarrow$$

$$y(x,t) = 0,26\omega(1,25\pi x) \sin(15\pi t + \pi)$$

$$\varphi = 15\pi t + \pi \xrightarrow{t = \frac{2}{30} \text{ с}} \varphi = 2\pi$$



Θέση Δ!

Δ.1

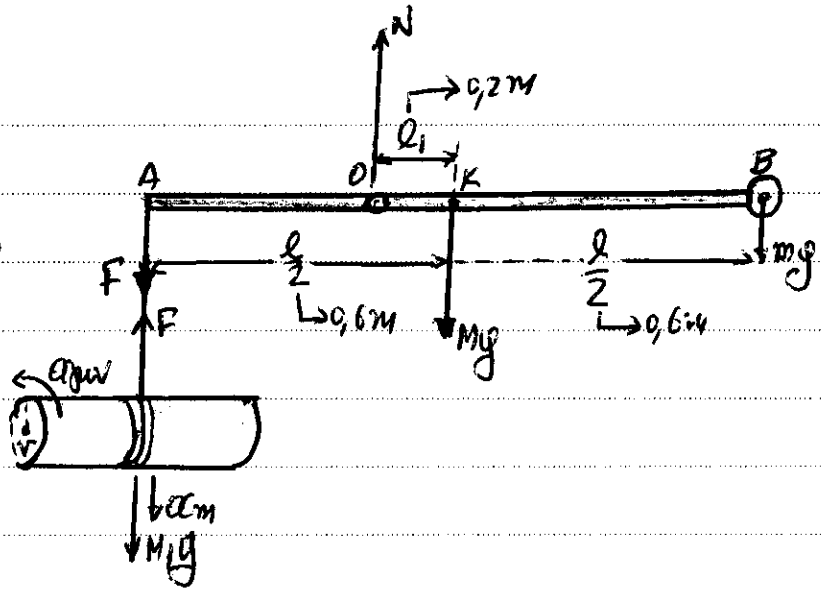
Υπολογισμός <<εφελδίων-εφελδίων>>

$$\sum \tau(0) = 0 \Rightarrow$$

$$F\left(\frac{l}{2} - l_i\right) = Ngl + mg\left(\frac{l}{2} + l_i\right)$$

$$F \cdot 0,4 = 5 \cdot 10 \cdot 0,2 + 1 \cdot 10 \cdot 0,8$$

$$\Rightarrow F = 45 \text{ N}$$



Μηνονη κυλινορω: $\sum F_y = M_1 \alpha_{cm} \Rightarrow M_1 g - F = M_1 \alpha_{cm}$

$\sum \tau = I_1 \alpha_{ρω} \Rightarrow F r = \frac{1}{2} M_1 r^2 \frac{\alpha_{ρω}}{r} \Rightarrow F = \frac{1}{2} M_1 \alpha_{ρω} \quad \} +$

$$M_1 g = \frac{3}{2} M_1 \alpha_{ρω} \Rightarrow \alpha_{ρω} = \frac{2g}{3}$$

$$M_1 g - F = M_1 \alpha_{ρω} \Rightarrow M_1 g - f = M_1 \frac{2g}{3} \Rightarrow F = \frac{1}{3} M_1 g \Rightarrow 45 = \frac{1}{3} M_1 \cdot 10$$

$$\Rightarrow M_1 = 13,5 \text{ kg}$$

Δ.2) $\Delta K = W_{ext} \Rightarrow K - 0 = W_{B_1} + W_F \Rightarrow K = M_1 g \Delta y_{cm} + F \Delta y_{cm} + F r \Delta \varphi(1)$

$$\Delta y_{cm} = \frac{1}{2} \alpha_{ρω} t^2$$

$$r \Delta \varphi = r \cdot \frac{1}{2} \alpha_{ρω} t^2 = \frac{1}{2} (r \alpha_{ρω}) t^2 = \frac{1}{2} \alpha_{ρω} t^2 \quad \} \xrightarrow{(2)}$$

$$K = M_1 g \Delta y_{cm} \quad (2)$$

$$l_{\neq} = \Delta s_{πρε} = r \Delta \varphi = \dots = \Delta y_{cm} \quad \} \Rightarrow K = M_1 g l_{\neq} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 81 = 13,5 \cdot 10 \cdot l_{\neq} \Rightarrow l_{\neq} = 0,6 \text{ m}$$

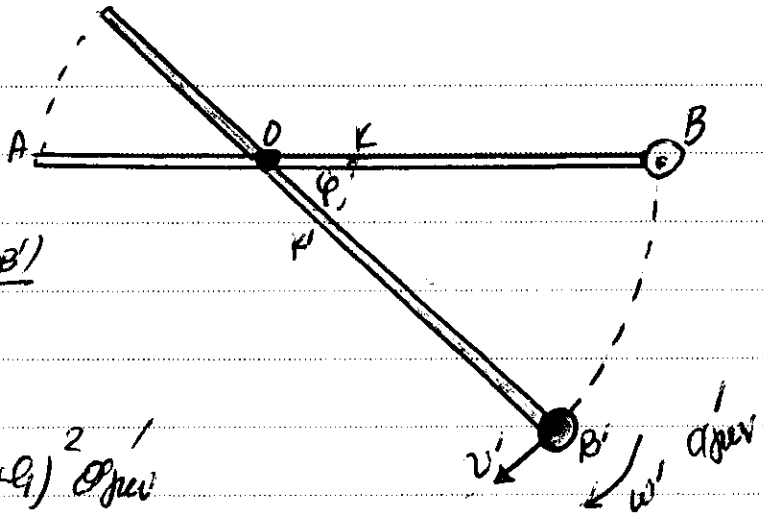
Δ.3

προσχηλ' υδρο ηα' το ελαρπίδιο

$$\frac{dL_{\text{rot}}}{dt} = \frac{d(mv' \cdot OB')}{dt} = m \cdot OB' \frac{d(\omega' \cdot OB')}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dL_{\text{rot}}}{dt} = m(OB')^2 \frac{d\omega'}{dt} = m\left(\frac{l}{2} + l_1\right)^2 \alpha_{\text{ρεν}}$$

$$\Rightarrow \frac{dL_{\text{rot}}}{dt} = 1 \cdot 0,8^2 \cdot 2,0 \Rightarrow \frac{dL_{\text{rot}}}{dt} = 12,8 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$



Δ.4 $I_{\text{c.m.}} = \left[\frac{1}{12} M l^2 + M l_1^2 \right] + m \left(l_1 + \frac{l}{2} \right)^2 \Rightarrow I = \frac{1}{12} \cdot 5 \cdot 1,2^2 + 5 \cdot 0,2^2 + 1 \cdot 0,8^2$
 $\Rightarrow I = 1,44 \text{ kgm}^2$

$$\Delta K = N_{\text{rot}} \Rightarrow K = W_{\text{rot}} + W_{\text{trans}}$$

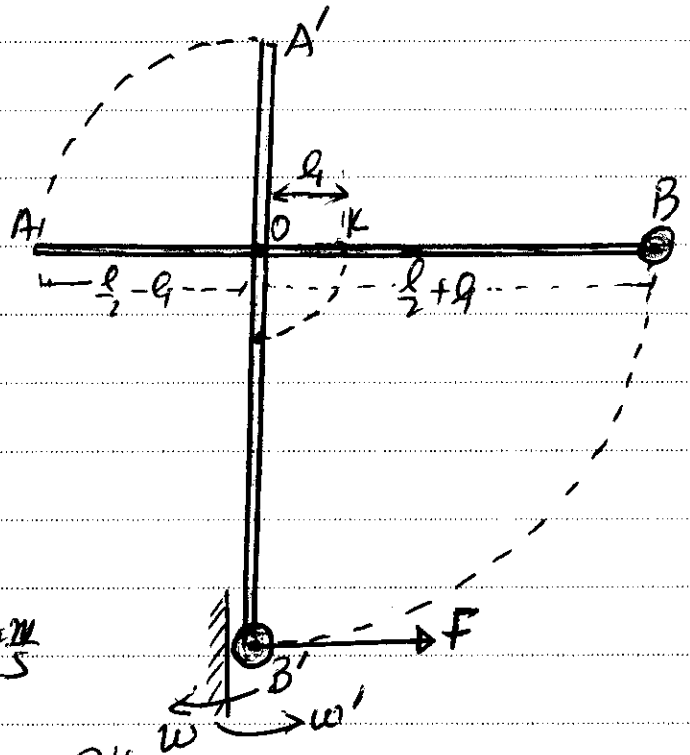
$$\Rightarrow \frac{1}{2} I \omega^2 = N g l_1 + m g \left(\frac{l}{2} + l_1 \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 1,44 \cdot \omega^2 = 5 \cdot 10 \cdot 0,2 + 1 \cdot 10 \cdot 0,8$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 1,44 \cdot \omega^2 = 10 + 8 = 18$$

$$\omega = 5 \text{ rad/s}$$

$$v = \omega(OB) \Rightarrow v = 5 \cdot 0,8 \Rightarrow v = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



Δ.5

$$\frac{1}{2} I \omega'^2 = \frac{36}{100} \frac{1}{2} I \omega^2 \Rightarrow \omega' = 0,6 \omega = 3 \text{ rad/s}$$

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = \Sigma \tau = F(OB) \Rightarrow \frac{I \omega' + I \omega}{\Delta t} = F(OB)$$

$$\Rightarrow \frac{1,44 \cdot 8}{0,01} = F \cdot 0,8 \Rightarrow F = 1440 \text{ N}$$