

Πανελλήνιες Εξετάσεις 2012 Φυσικής Θετικής και
Τεχνολογικής Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου.
Μελέτη – Σχόλια για το Θέμα Γ.4

ΤΟ ΘΕΜΑ:

Ομογενής και ισοπαχής δοκός ΟΑ μάζας $M = 6\text{Kg}$ και μήκους $\ell = 0,3\text{m}$ μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το ένα άκρο της Ο. Στο άλλο άκρο της Α υπάρχει στερεωμένη μικρή σφαίρα μάζας $m = M/2$.

Γ.4 Ασκούμε στο άκρο Α δύναμη σταθερού μέτρου $F = 30\sqrt{3}\text{N}$ που είναι συνεχώς κάθετη στην δοκό. Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει η δοκός με την κατακόρυφο την στιγμή που η κινητική ενέργεια γίνεται μέγιστη.

Δίνονται $g = 10\text{m/s}^2$ και η ροπή αδράνειας της δοκού ως άξονα κάθετο στην δοκό και διερχόμενο από το κέντρο μάζας της $I_{\text{cm}} = \frac{1}{12}M\ell^2$.

ΜΕΛΕΤΗ:

Η ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής Ο είναι :

$$I = I_{\delta, O} + I_{\sigma\varphi} \quad \text{ή} \quad I = \left[I_{\delta, \text{cm}} + M \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 \right] + \frac{M}{2} \ell^2 \quad \text{ή} \quad I = \left[\frac{1}{12} M \ell^2 + M \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 \right] + \frac{M}{2} \ell^2 \quad \text{ή}$$

$$I = \frac{5}{6} M \ell^2 \xrightarrow{\text{S.I.}} I = 0,45 \text{Kg m}^2$$

Αρχικά ας βρούμε τη συνάρτηση $\alpha_{\gamma\omega\nu} = f(\varphi)$, της επιτάχυνσης $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ του συστήματος «δοκός – σφαιρίδιο» με τη γωνία στροφής φ της δοκού από την αρχική της θέση. Εργαζόμενοι στη θέση της δοκού με γωνιακή απόκλιση φ (σχήμα 1) έχουμε: $\Sigma \tau = I \alpha_{\gamma\omega\nu}$ ή

$$F\ell - Mg \frac{\ell}{2} \eta\mu\varphi - mg\ell \eta\mu\varphi = I \alpha_{\gamma\omega\nu}$$

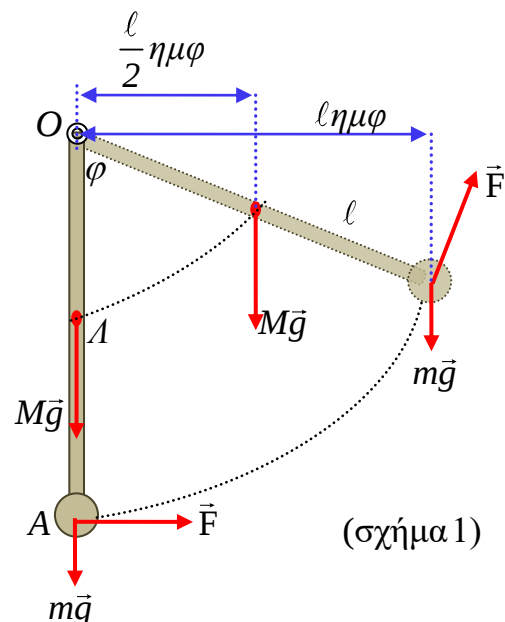
$$\xrightarrow{\text{S.I.}} \alpha_{\gamma\omega\nu} = 20\sqrt{3} - 40\eta\mu\varphi \quad (\text{S.I.})$$

Η γωνιακή επιτάχυνση μηδενίζεται στις θέσεις: $\alpha_{\gamma\omega\nu} = 0$ ή

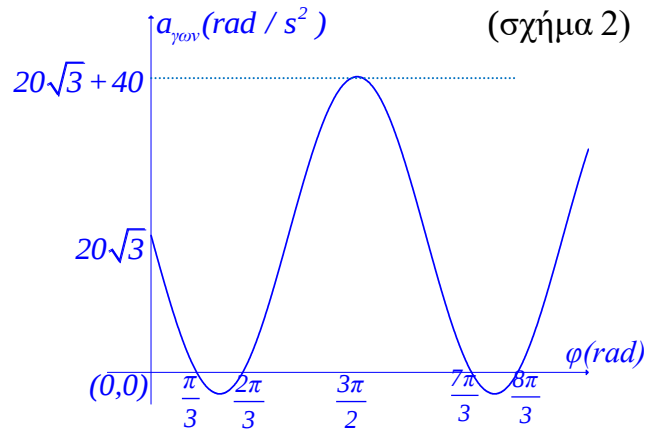
$$20\sqrt{3} - 40\eta\mu\varphi = 0 \quad \text{ή} \quad \eta\mu\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{και}$$

$$\text{από εδώ βρίσκουμε } \varphi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \quad \text{και} \quad \varphi = 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3}.$$

Κάνουνε την γραφική παράσταση της $\alpha_{\gamma\omega\nu} = f(\varphi) \dots$ (σχήμα 2 επόμενης σελίδας).



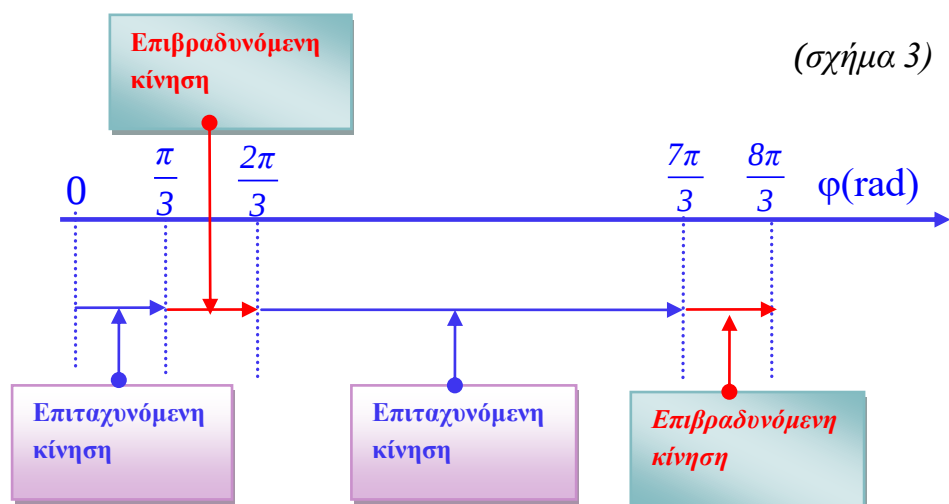
Παρατηρούμε ότι από διάστημα από $\left[0, \frac{\pi}{3} \text{ rad}\right)$ η κίνηση είναι **επιταχυνόμενη** και από $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \text{ rad}\right)$ η κίνηση είναι **επιβραδυνόμενη**. Εδώ πρέπει να ελεγχθεί **αν στο επιβραδυνόμενο τμήμα** της κίνησης από $\pi/3 \text{ rad}$ έως $2\pi/3 \text{ rad}$ **μηδενίζεται η κινητική ενέργεια** της δοκού... οπότε δεν θα συνεχίζεται η άνοδος και το ένα και μοναδικό μέγιστο της κινητικής ενέργειας θα ήταν στην θέση $\varphi = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$.



[Αυτό το σημείο δυστυχώς δεν πρόσεξε η επιτροπή των εξετάσεων και είχαμε τα ... γνωστά αποτελέσματα!]

Όπως φαίνεται στην ενεργειακή μελέτη (που γίνεται στη συνέχεια) η ράβδος περνάει από την θέση $\varphi = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$ και συνεχίζει να επιταχύνεται και να επιβραδύνεται όπως περιγράφεται στο σχήμα (3).

Από $\varphi = 0 \text{ rad}$ έως $\varphi = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$ η κίνηση είναι επιταχυνόμενη, από $\varphi = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$ έως $\varphi = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$ η κίνηση γίνεται επιβραδυνόμενη, από $\varphi = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$ έως $\varphi = 2\pi + \frac{\pi}{3} \text{ rad}$ πάλι επιταχυνόμενη, από $\varphi = 2\pi + \frac{\pi}{3} \text{ rad}$ έως $\varphi = 2\pi + \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$ πάλι επιβραδυνόμενη ... και συνεχίζεται με την ίδια «ομοιομορφία». Γενικά



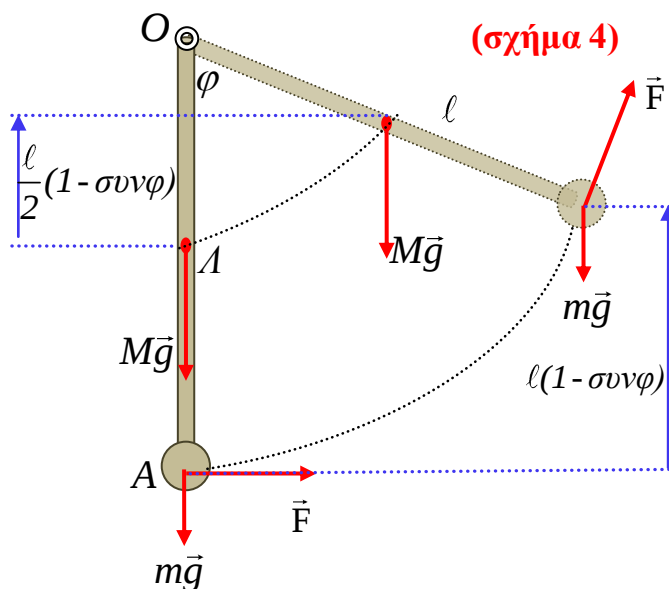
- Στο διάστημα $2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3} < \varphi < 2(\kappa+1)\pi + \frac{\pi}{3}$ είναι επιταχυνόμενη.
- Στο διάστημα $2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} < \varphi < 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3}$ είναι επιβραδυνόμενη.

Μελετάμε ενεργειακά το πρόβλημα για μετατόπιση από $\varphi = 0 \text{ rad}$ έως μια τυχαία θέση σε γωνιακή απόκλιση $\varphi \text{ rad}$ (σχήμα 4). Θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας...

$$\Delta K = W_{F'} + W_{Mg} + W_{mg} \Rightarrow K = F\ell\varphi - Mg\left(\frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{2}\cos\varphi\right) - mg(\ell - \ell\cos\varphi) \Rightarrow$$

$$K = F\ell\varphi - Mg\frac{\ell}{2}(1 - \cos\varphi) - mg\ell(1 - \cos\varphi) \text{ και με αντικατάσταση παίρνουμε}$$

$$K = 9\sqrt{3}\varphi - 18(1 - \cos\varphi) \text{ (S.I)}$$



$$\text{Για } \varphi = \frac{\pi}{3} \text{ rad, } K = 7,32\text{J}$$

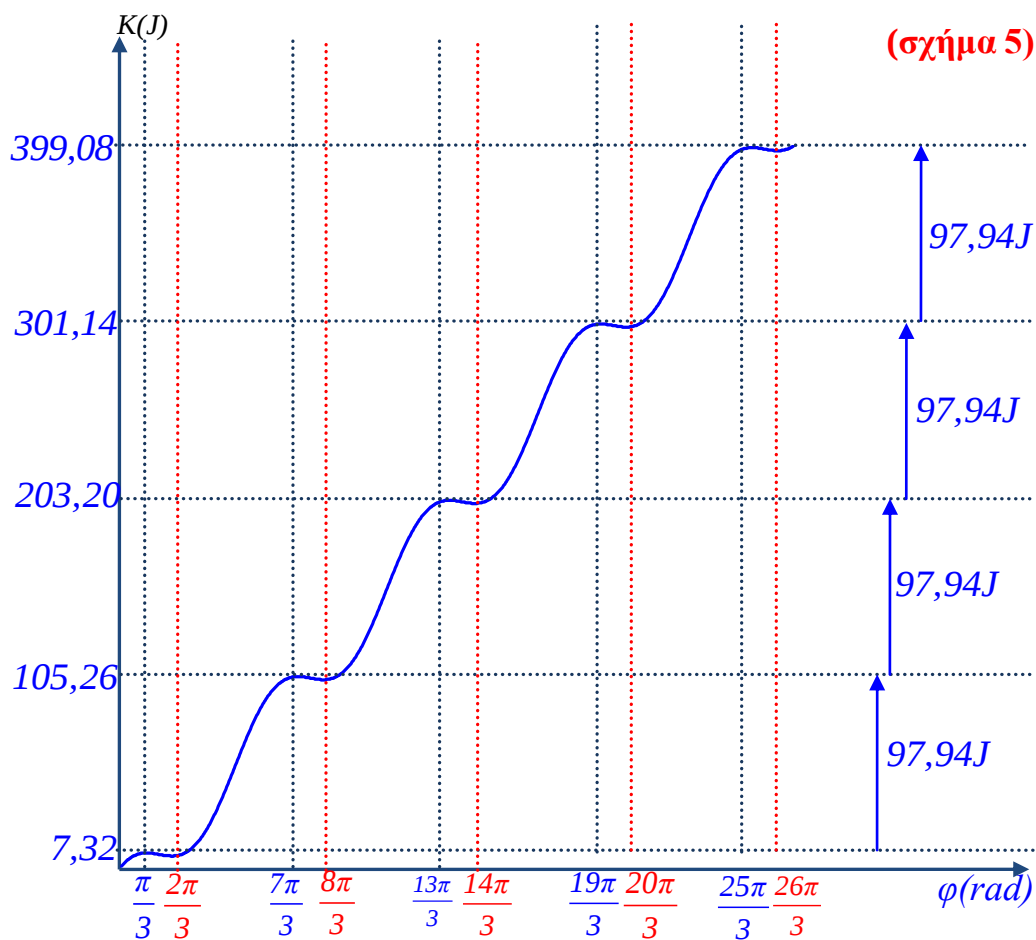
$$\text{Για } \varphi = \frac{2\pi}{3} \text{ rad, } K = 5,65\text{J}$$

$$\text{Για } \varphi = \pi \text{ rad, } K = 12,97\text{J}$$

Για κάθε πλήρη στροφή η κινητική ενέργεια του συστήματος αυξάνεται σε τιμή ίση με το έργο της δύναμης $\vec{F}$, αφού τα βάρη είναι δυνάμεις συντηρητικές και μέσω των έργων τους δεν προσφέρεται ενέργεια την κλειστή αυτή διαδρομή.

Το έργο της $\vec{F}$ σε μια πλήρη περιστροφή είναι $W = F\ell 2\pi = 97,94\text{J}$.

Στο σχήμα (5) της επόμενης σελίδας φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $K = f(\varphi)$, της κινητικής ενέργειας του συστήματος σε συνάρτηση με την γωνία στροφής.



✚ Στο διάστημα $2κπ + \frac{2π}{3} < φ < 2(κ+1)π + \frac{π}{3}$ η κινητική ενέργεια αυξάνεται και όλα τα τοπικά της μέγιστα λαμβάνονται όταν έχει διαγράψει από την αρχή γωνιακή μετατόπιση $φ = 2λπ + \frac{π}{3}$ με $λ = 0, 1, 2, 3, \dots$ Δηλαδή όλα τα τοπικά μέγιστα της κινητικής ενέργειας συμβαίνουν στην ίδια θέση στην οποία η ράβδος σχηματίζει με την κατακόρυφη γωνία $φ = \frac{π}{3}$!!!

[Το σημείο αυτό των διαδοχικών τοπικών μεγίστων δυστυχώς δεν πρόσεξε η Επιτροπή Εξετάσεων και είχαμε ...ότι είχαμε!]

Η εκφώνηση του θέματος ήταν «Βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η δοκός με την κατακόρυφο τη στιγμή που η κινητική της ενέργεια γίνεται μέγιστη» .

Προφανώς θα έπρεπε:

✚ Να δοθεί μικρότερη τιμή της $\vec{F}$ ώστε να μην γίνεται ανακύκλωση και να υπάρχει ένα και μοναδικό μέγιστο της κινητικής ενέργειας, ή

✚ να καταργείται η δύναμη σε κάποια θέση της επιβραδυνόμενης κίνησης, ή

✚ να ζητείται η θέση του 1^{ου} τοπικού μεγίστου ή γενικά των τοπικών μεγίστων της ενέργειας.

Σχόλια

1. Επειδή στην άσκηση δεν ζητούνταν μέγιστη τιμή για την κινητική ενέργεια, αλλά η θέση του μεγίστου αυτής ... αντί των τοπικών μεγίστων... και η θέση αυτή είναι η

ίδια - μία και μοναδική - $\varphi = \frac{\pi}{3} \text{rad}$ για όλα τα τοπικά μέγιστα, θεωρώ την

απόφαση ακύρωσης του Γ.4 θέματος ως υπερβολική, βεβαισμένη και πρόχειρη. Η πράξη ακύρωσης θυμίζει μάλλον πολιτική απόφαση και λυπάμαι που η Επιτροπή δεν υπερασπίσθηκε καθόλου την επιλογή της, έστω ... και με τις όποιες ατέλειες.

2. Υπάρχουν μαθητές που δεν έκαναν την ανωτέρω ανάλυση (.., και δεν χρειάζονταν...), αλλά την προσέγγισαν σε μεγάλο βαθμό και εξήγησαν τα περί 1ου μεγίστου της κινητικής ενέργειας ... κάτι .. που μάλλον δεν κατάλαβαν οι εξεταστές. Αυτοί οι μαθητές δεν αδικούνται με την απόφαση ακύρωσης; Αλλά στην Ελλάδα ποιος σκέπτεται τον τέλειο και αυτόν που διακρίνεται από τους άλλους;

3. Αν είχαμε σοβαρό κράτος και δεν επικρατούσε ο λαϊκισμός, το θέμα έπρεπε να εξετασθεί κατά περίπτωση. Αλλά είπαμε ... βάζουμε ισοπεδωτικά δύσκολα θέματα... δεν προσέχουμε την σωστή διατύπωση, γιατί δεν γνωρίζουμε ακριβώς την λύση τους... και μετά αποφασίζουμε ...ισοπεδωτικά!!

4. Φαντάζεσθε ένα μαθητή που από ατυχία της στιγμής έκανε λάθος το Γ.3 (6 μόρια) και στο Γ.4 (με την ατελή έστω διατύπωσή του) βρήκε σωστά τη θέση του 1^{ου} τοπικού μεγίστου; Πριν την ακύρωση έχανε 6 μόρια, τώρα θα χάσει 8 ή 9 μόρια!!

5.Τελικά με την λύση που δόθηκε – και εκτιμώ δυστυχώς είναι πολιτική – ευνοούνται οι άριστοι; Προφανώς όχι... και μετά λέμε γιατί κατέρρευσε η Χώρα! Τίποτα δεν είναι τυχαίο...

Βασίλης Τσουνής
Φυσικός