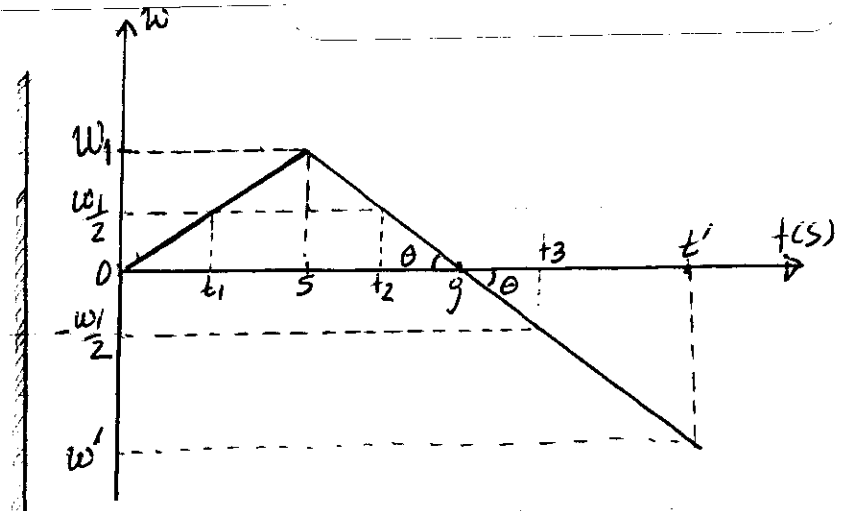
9.1

Α)

1 - ΛΑΘΟΣ, 2 - ΛΑΘΟΣ,
3 - ΛΑΘΟΣ, 4 - ΣΩΣΤΟ



- Για $0 \le t < 9\,s$ $w > 0$
  $t > 9\,s$ $w < 0$
  $t = 9\,s$ αντιστροφή φοράς περιστροφής
- Για $0 \le t < 9\,s$ $\alpha_{1\gamma\omega\nu} = \sigma\tau\alpha\theta > 0$
  $t > 9\,s$ $\alpha_{2\gamma\omega\nu} = \sigma\tau\alpha\theta < 0$

Β) Για $0 \le t < 9\,s \Rightarrow \alpha_{1\gamma\omega\nu} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_1 - 0}{5-0} \Rightarrow \alpha_{1\gamma\omega\nu} = \frac{\omega_1}{5}\ rad/s^2$ (1)

$$\omega = \alpha_{1\gamma\omega\nu} t \Rightarrow \omega = \frac{\omega_1}{5} t \ (SI) \quad (2)$$

Για $t > 9\,s \Rightarrow \alpha_{2\gamma\omega\nu} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \sigma\tau\alpha\theta \Rightarrow \alpha_{2\gamma\omega\nu} = \frac{0-\omega_1}{9-5} \Rightarrow \alpha_{2\gamma\omega\nu} = -\frac{\omega_1}{4}\ rad/s^2$ (3)

$$\omega = \omega_1 + \alpha_{2\gamma\omega\nu}(t - t'') \Rightarrow \omega = \omega_1 - \frac{\omega_1}{4}[t-5]\ SI \quad (4)$$

$\omega = \frac{\omega_1}{2}$ τις t_1 και t_2, οπότε

$(2) \Rightarrow \frac{\omega_1}{2} = \frac{\omega_1}{5} t_1 \Rightarrow \boxed{t_1 = 2{,}5\,s}$

$(4) \Rightarrow \frac{\omega_1}{2} = \omega_1 - \frac{\omega_1}{4}(t_2 - 5) \Rightarrow -\frac{\omega_1}{2} = -\frac{\omega_1}{4}(t_2 - 5) \Rightarrow \boxed{t_2 = 7\,s}$

$\omega = -\frac{\omega_1}{2}$ την t_3 ... $(4) \Rightarrow -\frac{\omega_1}{2} = \omega_1 - \frac{\omega_1}{4}(t_3 - 5) \Rightarrow -1{,}5\omega_1 = -\frac{\omega_1}{4}(t_3 - 5)$

$\Rightarrow \boxed{t_3 = 11\,s}$

Γ) Προφανώς πρόκειται όση είναι η γωνία $\Delta\varphi_1$ που διέγραψε ο δίσκος στο χρονικό διάστημα $0 \le t < 9\,s$, ίδια γωνία που διέγραψε (αλλά με αντίθετη φορά) στη συνέχεια.

στο χρονικό διάστημα $9 < t \le t'$ δηλαδή μετά από χρόνο $t'' = (t'-9)$ s ..., οπότε $\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 = 0 \Rightarrow \Delta\varphi_2 = -\Delta\varphi_1$ ή $|\Delta\varphi_2| = \Delta\varphi_1$

$\Delta\varphi_1 = \frac{1}{2} 9\omega_1 = 4{,}5\omega_1$ (5) (εμβαδόν της $\omega = f(t)$)

Η γωνία για το χρονικό διάστημα $t'' = t' - 9$ είναι επιβραδυνόμενη χωρίς αρχική ταχύτητα ...

$\Delta\varphi_2 = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega} t''^2 = -\Delta\varphi_1 = -4{,}5\omega_1 \overset{(3)}{\Rightarrow} \frac{1}{2}\left(-\frac{\omega_1}{4}\right)t''^2 = -4{,}5\omega_1$

$\Rightarrow t'' = 6$ s $\rightsquigarrow t'' = t' - 9 \Rightarrow 6 = t' - 9 \Rightarrow \boxed{t' = 15 \text{ s}}$

... και διαφορετικά ...

Από το σχήμα-διάγραμμα $\left.\begin{array}{l} \varepsilon\varphi\theta = \frac{\omega_1}{4} \\ \varepsilon\varphi\theta = \frac{|\omega''|}{t'-9} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\omega_1}{4} = \frac{|\omega''|}{t'-9} \Rightarrow$

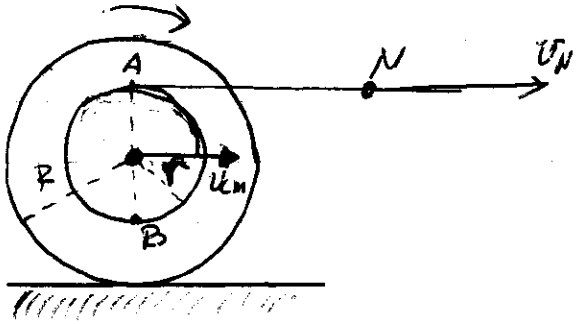
$\Rightarrow |\omega''| = \frac{\omega_1}{4}(t'-9)$ (6)

Από το εμβαδόν της $\omega = f(t) \Rightarrow |\Delta\varphi_2| = \frac{1}{2}(t'-9)\omega' \overset{(6)}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow |\Delta\varphi_2| = \frac{1}{2}(t'-9)\frac{\omega_1}{4}(t'-9) \Rightarrow |\Delta\varphi_2| = \frac{\omega_1}{8}(t'-9)^2$ (7)

$|\Delta\varphi_2| = \Delta\varphi_1 \xrightarrow{(5),(7)} \frac{\omega_1}{8}(t'-9)^2 = 4{,}5\omega_1 \Rightarrow t'-9 = 6 \Rightarrow \boxed{t' = 15 \text{ s}}$

9.2



Αφού έχουμε κύλιση χωρίς ολίσθηση $v_{cm} = \omega R \Rightarrow \omega = \frac{v_{cm}}{R}$

α) $v_N = v_A = v_{cm} + \omega r = v_{cm} + \frac{v_{cm}}{R} r$

$\Rightarrow v_N = v_{cm}\frac{R+r}{R} = v_{cm}\cdot\frac{3r}{2r} \Rightarrow \boxed{v_N = \frac{3}{2}v_{cm}} \Rightarrow v_{cm} = \frac{2}{3}v_N$

άρα α-λάθος

β) $v_B = v_{cm} - \omega r = v_{cm} - \frac{v_{cm}}{R} r = v_{cm}\frac{R-r}{R} = v_{cm}\frac{2r-r}{2r} = \frac{v_{cm}}{2}$

$\Rightarrow \boxed{v_{cm} = 2v_B}$ άρα β-σωστό

δ) $v_A = v_{cm} + \omega r$
$v_B = v_{cm} - \omega r$
$v_A + v_B = 2v_{cm} \xrightarrow{(1)} v_A + v_B = 2\cdot\frac{2}{3}v_N \Rightarrow v_N = \frac{3}{4}(v_A + v_B)$

$\Rightarrow \boxed{v_N = 0{,}75\,(v_A + v_B)}$ άρα δ-σωστό

9.3 Α) Το γιογιό τον πήρα πού ξετυλίγεται – έφόσον το νήμα δεν ολισθαίνει στον κύλινδρο – ισχύει ότι το μήκος του περιφέρειας που διαγράφεται λόγω της στροφικής κίνησης το σημείο επαφής νήματος κυλίνδρου. (σταθερή προσανατολισμού)

παντού: $\Delta l = \Delta S_A = r\Delta\varphi$ (1)
κύλιση: $\Delta x_{cm} = \underset{\text{διαγ. επαφής}}{\Delta S} = R\Delta\varphi$ (2)
$\Rightarrow \frac{\Delta l}{\Delta x_{cm}} = \frac{r}{R} \Rightarrow \Delta l = \frac{r}{R}\Delta x_{cm}$

... και διαφορετικά,
$\Delta l = r\Delta\varphi = \frac{1}{2} r\cdot\alpha_{\omega\nu} t^2$
$\Delta x_{cm} = \frac{1}{2}\alpha_{cm} t^2 = \frac{1}{2} R\alpha_{\omega\nu} t^2$
$\Big\} \boxed{\Delta l = \frac{r}{R}\Delta x_{cm}}$

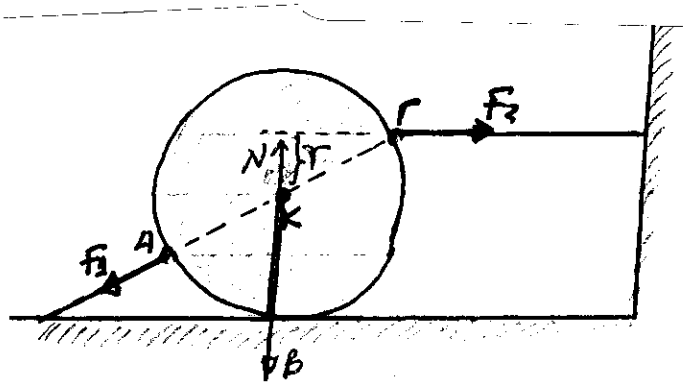
άρα <u>σωστή</u> η πρόταση <u>Α.2</u> ✓

Β) $\Delta S_N = \Delta l_N + \Delta x_{cm} = \frac{r}{R}\Delta x_{cm} + \Delta x_{cm} = \frac{r+R}{R}\Delta x_{cm} \Rightarrow \boxed{\Delta S_N = \frac{r+R}{R}\Delta x_{cm}}$
... και διαφορετικά ...

$\Delta S_N = \frac{1}{2}\alpha_N t^2$
$\Delta x_{cm} = \frac{1}{2}\alpha_{cm} t^2$
$\Big\} \Rightarrow \frac{\Delta S_N}{\Delta x_{cm}} = \frac{\alpha_N}{\alpha_{cm}} = \frac{\alpha_{cm}\frac{R+r}{R}}{\alpha_{cm}} \Rightarrow \Delta S_N = \frac{r+R}{R}\Delta x_{cm}$

άρα σωστή η πρόταση Β.1 ✓

9.4



Για να υπάρχει ισορροπία της ΠΟΣ πρέπει και $\Sigma\tau_{(K)}=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \tau_{F_1}+\tau_B+\tau_N+\tau_{F_2}=0$

$\tau_{F_1}=0,\ \tau_B=0,\ \tau_N=0$

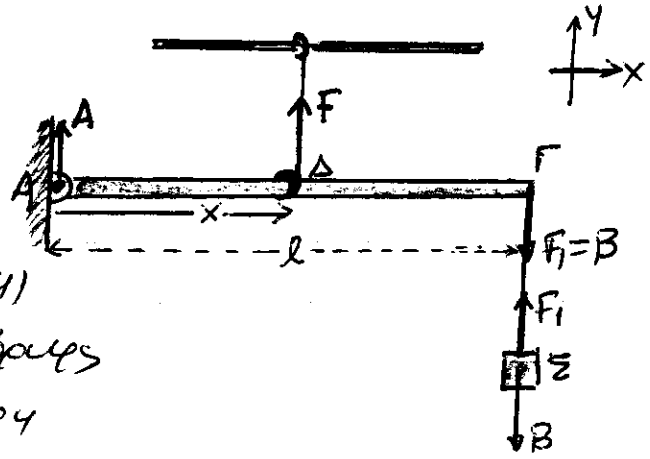
άρα προκύπτει και $\tau_{F_2}=0$

Ναι αλλά $\tau_{F_2}=F_2\cdot r\neq 0 \Rightarrow \Sigma\tau_{(K)}\neq 0$

Άρα η σφαίρα στατικά δεν μπορεί να ισορροπήσει

Σωστή η πρόταση (β)

9.5



Ισορροπία σώματος (ε): $\Sigma F_y=0 \Rightarrow F_1=B$

Ισορροπία ράβδου: $\Sigma\tau_{(A)}=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow F x=F_1 \ell \Rightarrow Fx=B\ell \Rightarrow F=\frac{B\ell}{x}$ (1)

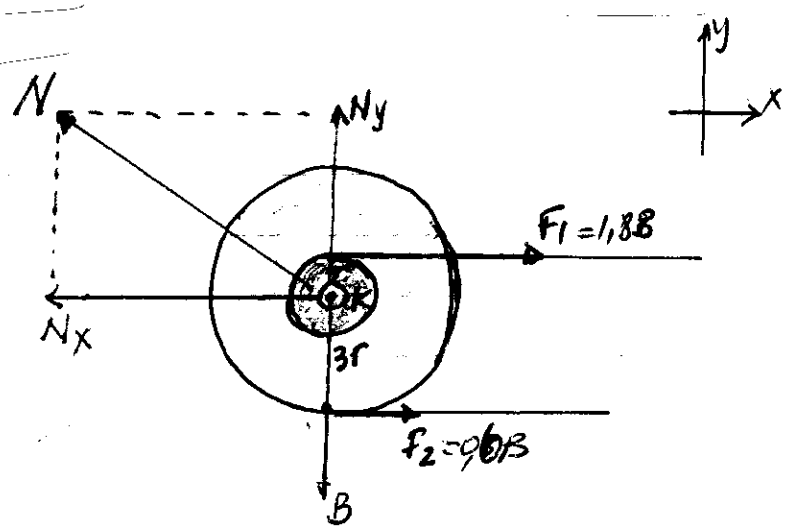
$\Sigma F_y=0$ ... εκτός από $\vec{F}, \vec{F_1}$ καταπόνησης και η $\vec{A}$ θα είναι καταπονούμενη ώστε $\Sigma F_y=0$, δείχνοντας ότι έχει θετική κατεύθυνση $\Sigma F_y=0 \Rightarrow A+F-F_1=0 \Rightarrow A=B-F$ (1)

$\Rightarrow A=B-\frac{B\ell}{x} \Rightarrow A=B\frac{x-\ell}{x}$ (2)

A) Από την (1) $F=\frac{B\ell}{x}=\frac{\text{σταθ}}{x}$ φαίνεται ότι **σωστή πρόταση είναι η Α.4**

B) Από την (2) εκτός από $x<\ell$ θα είναι $A<0$ άρα η δύναμη στη άρθρωση είναι καταπονούμενη κατά φορά προς τα κάτω και γι' αυτό και υπόκειται όταν $A=0 \xrightarrow{(2)} x=\ell$ **Σωστή η πρόταση Β.4**

9.6



Άφού δεν υπάρχει περιστροφή $\Sigma\tau(F)=0$

$\Rightarrow F_1 r = F_2 \cdot 3r$

$\Rightarrow F_1 = 3F_2 \Rightarrow F_1 = 3\cdot 0{,}6B$

$\Rightarrow F_1 = 1{,}8B$

Αφού υπάρχει ισορροπία και $\Sigma F=0$ η δύναμη από το δέσμα Ν πρέπει να έχει συνιστώσες τόσο στον x'x όσο και στον y'y

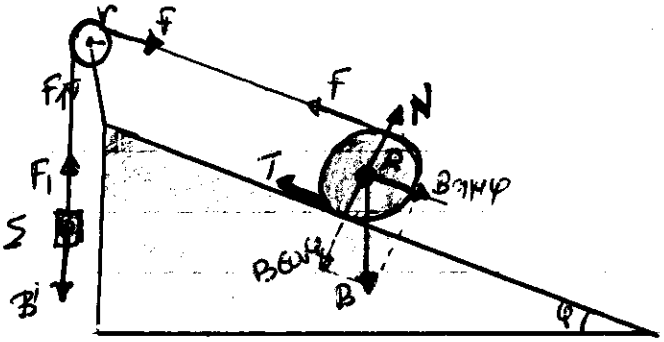
$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_x = F_1 + F_2 \Rightarrow N_x = 2{,}4B$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_y = B$

$\vec{N} = \vec{N}_x + \vec{N}_y \Rightarrow N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2} \Rightarrow N = \sqrt{(2{,}4B)^2 + B^2} \Rightarrow \boxed{N = 2{,}6B}$

Άρα σωστή η πρόταση (β)

9.7



Ισορροπία σωμάτων $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_1 = B'$

Ισορροπία τροχαλίας $\Sigma\tau = 0 \Rightarrow F_1 r = Fr$

$\Rightarrow F_1 = F \Rightarrow F = B'$ ή $F = 0{,}3B$ (1)

Ισορροπία κυλίνδρου

$\Sigma\tau = 0 \Rightarrow F\cdot R = T\cdot R \Rightarrow T = F = 0{,}3B$ (2)

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F + T = B\eta\mu\varphi \Rightarrow$

$\overset{(2)}{\Rightarrow} 0{,}6B = B\eta\mu\varphi \Rightarrow \eta\mu\varphi = 0{,}6$ και $\sigma\upsilon\nu\varphi = 0{,}8$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = B\sigma\upsilon\nu\varphi$

Στατική τριβή $T \le \mu N \overset{(2)}{\Rightarrow} 0{,}3B \le \mu B\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow 0{,}3 \le \mu\cdot 0{,}8$

$\Rightarrow \mu \ge 0{,}375$

Άρα σωστή η πρόταση (β)

9.8

Συνολα "δίσκος (Δ) - άνδρωνας"

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F' + F - 2mg = 0$

$\Rightarrow F' + F = 2mg$ (1)

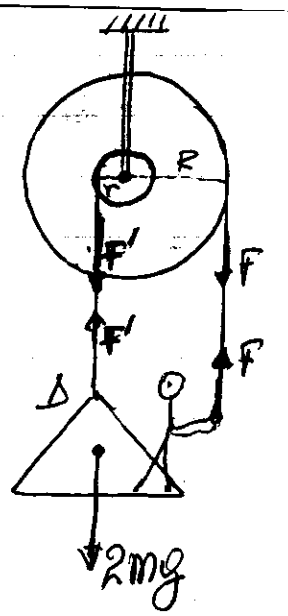
Ισορροπία διπλής τροχαλίας

$\Sigma G = 0 \Rightarrow F' r = F \cdot R \Rightarrow$

$\Rightarrow F' \cdot r = F \cdot 4r \Rightarrow F' = 4F$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow 5F = 2mg \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{F = 0{,}4mg}$



Απαντώτη η πρόταση (γ)

9.9

Αρχικοί...

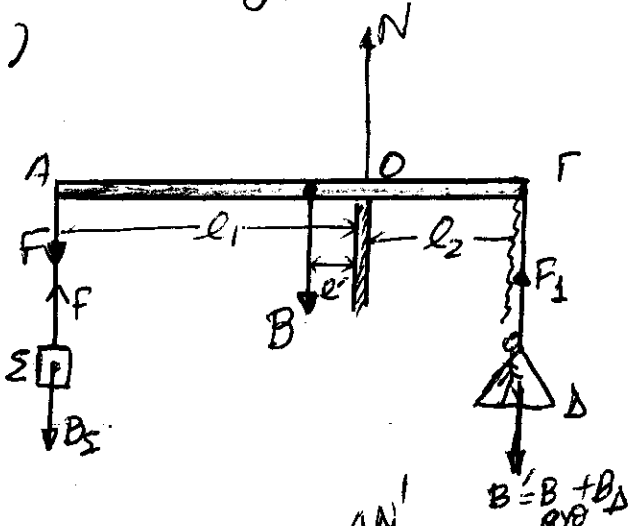
Ισορροπία (Σ): $F = B_\Sigma$

Ισορροπία Δ-ανδρώπου: $F_1 = B'$

Ισορροπία ράβδου

$\Sigma \tau(O) = 0 \Rightarrow F\ell_1 + B\ell' = F_1\ell_2$

$\Rightarrow B_\Sigma \ell_1 + B\ell' = B'\ell_2$ (1)



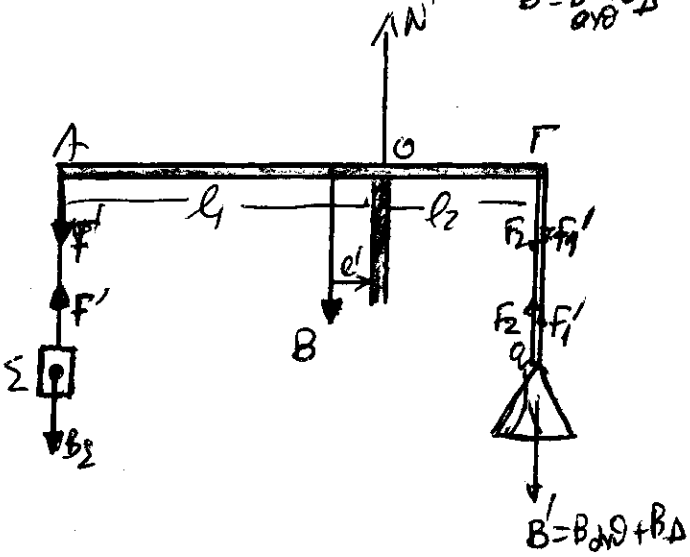
Όταν το ανδρώπου τραβάει πάνω ...όλα παραμένουν ισορροπούν το (Σ) και ο (Δ) έχουμε $F' = B_\Sigma$ και $F_1' + F_2 = B'$

$\Sigma \tau_{\text{ράβδου}}(O) = F'\ell_1 + B\ell - (F_2 + F_1')\ell_2$

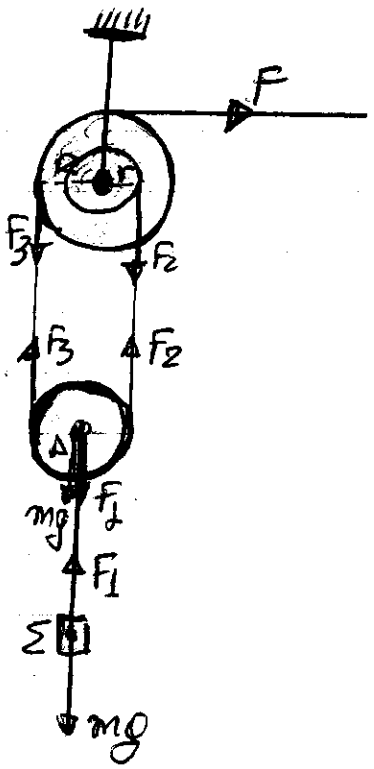
$= B_\Sigma \ell_1 + B\ell - B'\ell_2 \xrightarrow{(1)}$

$\Rightarrow \Sigma\tau(O) = 0$ ... άρα η αρχική ισορροπία της ράβδου δεν επηρεάστηκε

Απάντηση (γ)



9.10



Ισορροπία σώματος

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_1 = mg$ (1)

Ισορροπία δίσκου

$\left.\begin{array}{l} \Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_3 + F_2 = mg + F_1 \\ \Sigma \tau = 0 \Rightarrow F_3 R' = F_2 R' \Rightarrow F_3 = F_2 \end{array}\right\} \overset{(1)}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow 2F_2 = 2mg \Rightarrow F_2 = mg \kappa\alpha\iota F_3 = mg$

Ισορροπία τροχαλίας

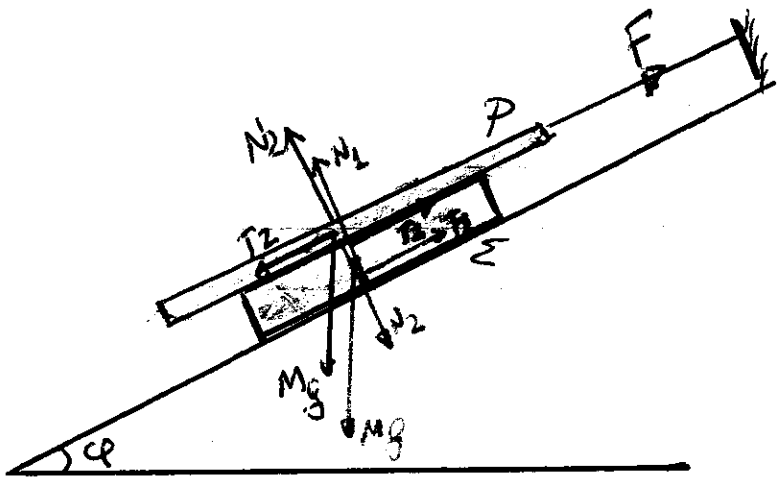
$\Sigma \tau = 0 \Rightarrow F \cdot R + F_2 r - F_3 R = 0$

$\Rightarrow F \cdot 2r + mg r - mg \cdot 2r = 0$

$\Rightarrow F \cdot 2r = mg r \Rightarrow \boxed{F = 0{,}5\, mg}$

Απαντητική σχέση (α)

9.11



Ράβδος P

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F = T_2 + Mg\eta\mu\varphi$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_2 = Mg\sigma\upsilon\nu\varphi$ (1)

$T_2 = \mu N_2 = \mu Mg\sigma\upsilon\varphi$ (2)

Σώμα Σ

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T_1 + T_2 = Mg\eta\mu\varphi$ (3)

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_1 = N_2 + Mg\sigma\upsilon\varphi \xrightarrow{(1)} N_1 = 2Mg\sigma\upsilon\varphi$ (4)

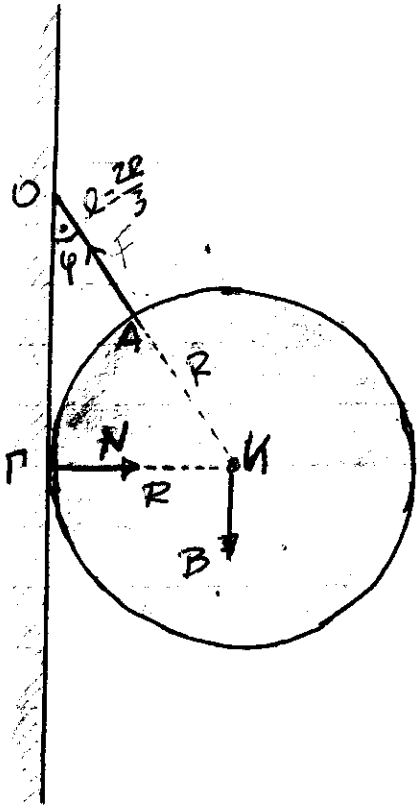
$T_1 = \mu N_1 \xRightarrow{(4)} T_1 = 2\mu Mg\sigma\upsilon\varphi$ (5)

(3) $\xrightarrow{(2,5)}$ $2\mu Mg\sigma\upsilon\varphi + \mu Mg\sigma\upsilon\varphi = Mg\eta\mu\varphi \Rightarrow$

$\Rightarrow 3\mu\sigma\upsilon\varphi = \eta\mu\varphi \Rightarrow \mu = \frac{\varepsilon\varphi}{3} \Rightarrow \mu = \frac{0,6}{3} \Rightarrow \boxed{\mu = 0,2}$

Άρα σωστή η πρόταση (β)

9.12



α) Στη σφαίρα ασκούνται οι δυνάμεις: $\vec{F}$ από το νήμα, $\vec{B}$ το βάρος της, $\vec{N}$ από το τοίχο.
Οι $\vec{B}$ και $\vec{N}$ (τομέας του ορίζοντα) διέρχονται από το Κ.
Άρα η σφαίρα ισορροπεί υπό ΣΤ(Κ)=0 .

$\left.\begin{array}{l} \tau_N+\tau_B+\tau_F=0 \\ \tau_{N(K)}=0 \\ \tau_{B(K)}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \tau_{F(K)}=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow F\cdot d=0 \overset{F\neq 0}{\Rightarrow} d=0$

(d: παράσταση της φορέα της $\vec{F}$ από το Κ)

Άρα η $\vec{F}$ διέρχεται από το Κ.

β)

$OK=\ell+R=\frac{2R}{3}+R=\frac{5R}{3}$, $\eta\mu\phi=\frac{\Gamma K}{OK}=\frac{R}{5R/3}=0,6 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\phi=0,8$

$\Sigma F_x=0 \Rightarrow N=F_x=F\eta\mu\phi$

$\Sigma F_y=0 \Rightarrow F_y=B \Rightarrow F\sigma\upsilon\nu\phi=B \Rightarrow F\cdot 0,8=Mg \Rightarrow \boxed{F=1,25Mg}$

Απαντάται η (4)

9.13

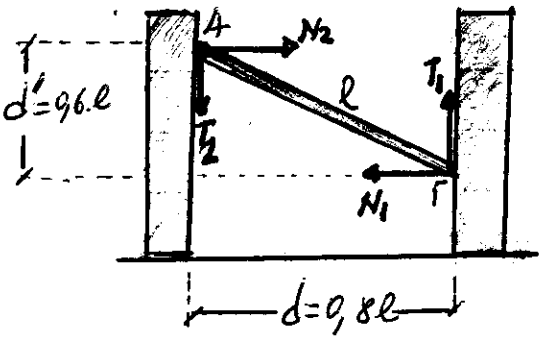
$\Sigma F_x=0 \Rightarrow N_1=N_2$

$\Sigma F_y=0 \Rightarrow T_1=T_2$

$\Sigma\tau_{(A)}=0 \Rightarrow T_1 d=N_1 d' \Rightarrow$

$\Rightarrow T_1\cdot 0,8\ell=N_1\cdot 0,6\ell$

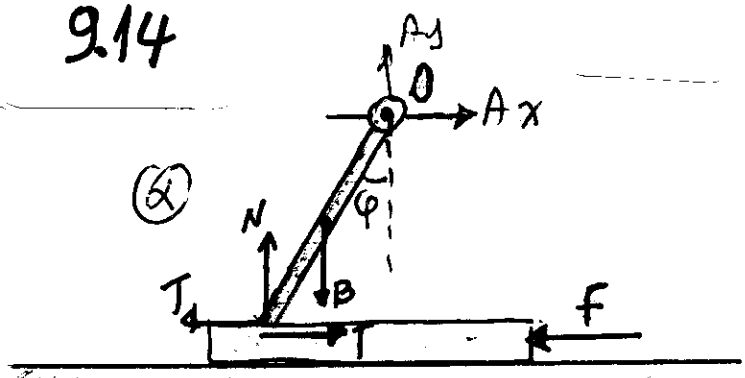
$\Rightarrow 4T_1=3N_1 \Rightarrow T_1=\frac{3}{4}N_1$



$T_1\leq \mu N_1 \Rightarrow \frac{3}{4}N_1\leq \mu N_1 \Rightarrow \mu\geq\frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{\mu\geq 0,75}$

Άρα σωστή η σχέση (α)

9.14



α) $\Sigma\tau_{(O)}=0 \Rightarrow T\ell\sigma\upsilon\varphi + N\ell\eta\varphi = B\frac{\ell}{2}\eta\varphi \Rightarrow \mu N\ell\sigma\upsilon\varphi + N\ell\eta\varphi = B\frac{\ell}{2}\eta\varphi$

$\Rightarrow (\mu\sigma\upsilon\varphi + \eta\varphi)N = \frac{mg}{2}\eta\varphi \Rightarrow N = \frac{mg\eta\varphi}{2(\mu\sigma\upsilon\varphi+\eta\varphi)}$

$\Rightarrow N = \frac{mg\sigma\varphi}{2(\mu+\sigma\varphi)}$

$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F = T = \mu N \Rightarrow F_{min} = \frac{\mu mg\sigma\varphi}{2(\mu+\sigma\varphi)} \Rightarrow f = \frac{0,25\cdot mg\cdot 1}{2\cdot(1,25)}$

$\Rightarrow \boxed{F = 0,1mg}$ ή $\boxed{F = \frac{mg}{10}} \Rightarrow \boxed{F = 6N}$ Σωστή η α.1

β) $\Sigma\tau_{(O)} = 0 \Rightarrow -T\ell\sigma\upsilon\varphi - B\frac{\ell}{2}\eta\varphi + N\ell\eta\varphi = 0$

$\Rightarrow -\mu N\ell\sigma\upsilon\varphi - B\frac{\ell}{2}\eta\varphi + N\ell\eta\varphi = 0$

$\Rightarrow N\ell(\eta\varphi - \mu\sigma\upsilon\varphi) = mg\frac{\ell}{2}\eta\varphi$

$N = \frac{mg\cdot\eta\varphi}{2(\eta\varphi - \mu\sigma\upsilon\varphi)}$

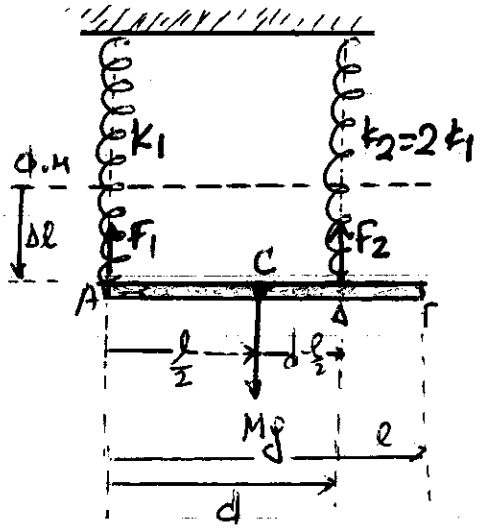
$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F = \mu N = \mu\cdot\frac{mg\eta\varphi}{2(\eta\varphi - \mu\sigma\upsilon\varphi)} \Rightarrow F = \frac{\mu mg\sigma\varphi}{2(\sigma\varphi - \mu)}$

$f = \frac{0,25\cdot mg\cdot 1}{2(1-0,25)} \Rightarrow f = \frac{0,25mg}{1,5} \Rightarrow \boxed{F = \frac{1}{6}mg} \Rightarrow \boxed{F = 10N}$

Σωστή η (β.2)

9.15

36. Απάντηση – 1



$\Sigma \tau_C = 0 \Rightarrow \tau_{F_1} + \tau_{Mg} + \tau_{F_2} = 0$

$\Rightarrow F_1 \cdot (AC) - F_2 (\Delta C) = 0$

$\Rightarrow F_1 \cdot \frac{l}{2} = F_2 \left(d - \frac{l}{2}\right) \Rightarrow$

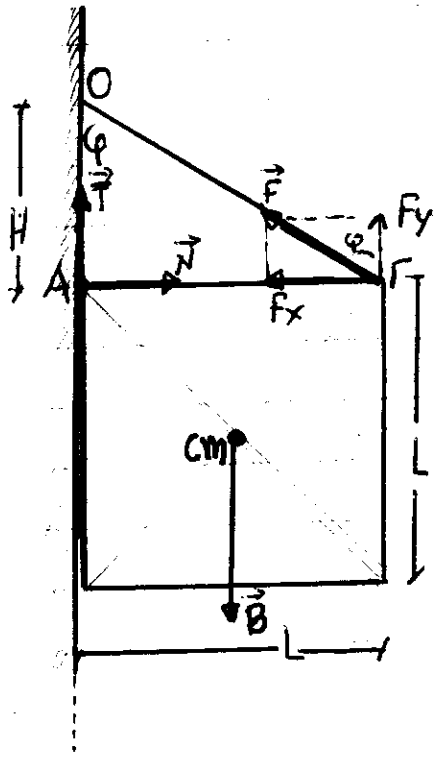
$\Rightarrow k_1 \Delta l \cdot \frac{l}{2} = k_2 \Delta l \cdot \left(d - \frac{l}{2}\right)$

$\Rightarrow k_1 \frac{l}{2} = 2k_1 \left(d - \frac{l}{2}\right) \Rightarrow \frac{l}{2} = 2d - l \Rightarrow 2d = \frac{3l}{2} \Rightarrow d = \frac{3l}{4}$

$\Rightarrow \boxed{d = 0{,}75\,l}$

Άρα σωστή η πρόταση (γ)

9.16



$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N = F_x \Rightarrow N = F\eta\mu\varphi$ (1)

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_y + T = B \Rightarrow T = Mg - F\sigma\upsilon\varphi$ (2)

$\Sigma M_{(A)} = 0 \Rightarrow F_y \cdot L = B\frac{L}{2}$

$\Rightarrow F\sigma\upsilon\varphi = \frac{B}{2} \Rightarrow F\sigma\upsilon\varphi = \frac{Mg}{2}$

$\Rightarrow Mg = 2F\sigma\upsilon\varphi \xrightarrow{(2)}$

$T = F\sigma\upsilon\varphi$ (4)

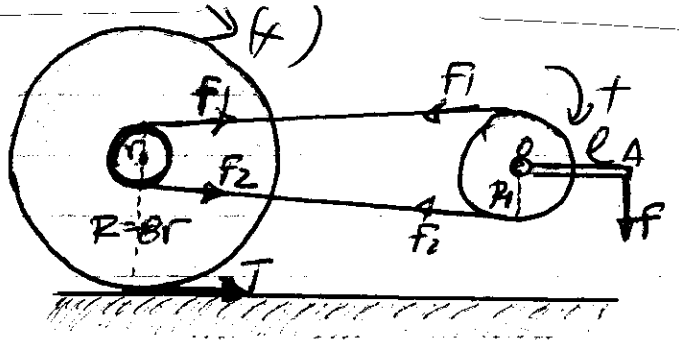
$T \le \mu N \overset{(1)}{\Rightarrow} F\sigma\upsilon\varphi \le \mu F\eta\mu\varphi$

$\Rightarrow 1 \le \mu\varepsilon\phi\varphi \Rightarrow \varepsilon\phi\varphi \ge \frac{1}{\mu} \Rightarrow \varepsilon\phi\varphi \ge 2 \Rightarrow \frac{L}{H} \ge 2$

$\Rightarrow L \ge 2H \Rightarrow 2H \le L \Rightarrow \boxed{H \le \frac{L}{2}}$

Άρα σωστή η. σχέση (α)

9.17



Μικρός δίσκος

$\Sigma \mathcal{C} = 0 \Rightarrow F\ell + F_2 R_1 - F_1 R_1 = 0 \Rightarrow F\ell = (F_1 - F_2) R_1$ (1)

Πίσω τροχός

$\Sigma \mathcal{C} = 0 \Rightarrow F_1 r - F_2 r - T \cdot R = 0 \Rightarrow (F_1 - F_2) r = T \cdot R$ ή

$T \cdot R = (F_1 - F_2) r$ (2)

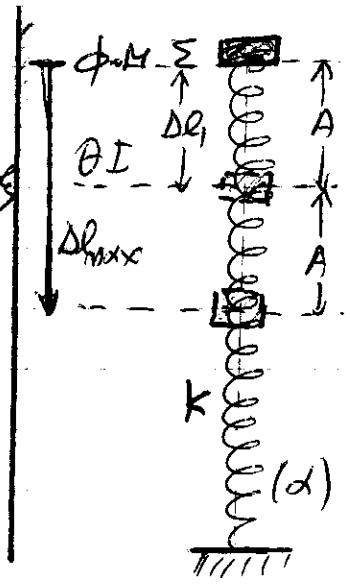
(1),(2) $\rightsquigarrow$ $\dfrac{F\ell}{T \cdot R} = \dfrac{(F_1 - F_2) R_1}{(F_1 - F_2) r}$ $\xrightarrow{\ell = 2R_1 \quad R = 8r}$

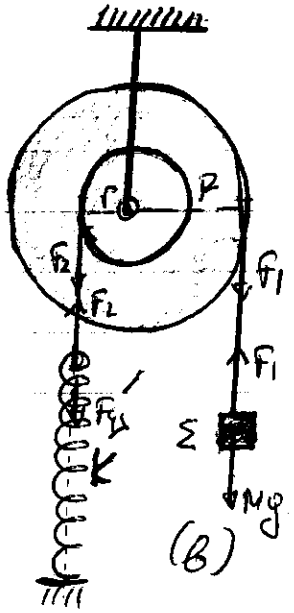
$\Rightarrow \dfrac{F \cdot 2R_1}{T \cdot 8r} = \dfrac{R_1}{r} \Rightarrow 2F = 8T$ ή $\boxed{T = \dfrac{F}{4}}$

Άρα σωστή η πρόταση (β)

Ισορροπία στερεού και ταλάντωση

9.18





Σχήμα (α)

Θέση ισορροπίας - κατακόρυφος άξονας

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_y = Mg \Rightarrow k\Delta l_1 = mg$

$\Rightarrow \Delta l_1 = \frac{mg}{k}$

Πλάτος ταλάντωσης $A = \Delta l_1$

Μέγιστη παραγόμενη φυσ. στ είωση

$\Delta l_{max} = 2A = 2\Delta l_1 = 2\frac{mg}{k}$

$\Rightarrow \Delta l_{max} = \frac{2mg}{k}$ (1)

Σχήμα (β)

Ισορροπία σώματος Σ : $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_1 = Mg$

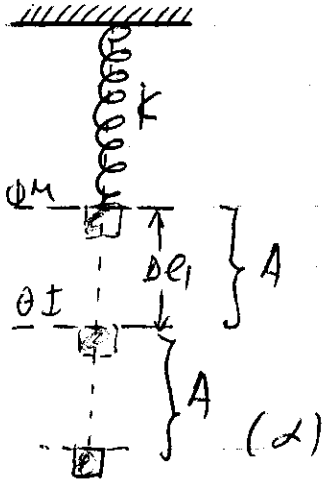
Ισορροπία τροχαλίας : $F_1 R = F_2' \cdot r \Rightarrow Mg R = F_2' \cdot R/2$

$\Rightarrow F_2 = 2Mg$

$F_2 = F_{\epsilon\lambda}' \Rightarrow 2Mg = k\Delta l' \Rightarrow \Delta l' \le \frac{2Mg}{k}$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow$ $\Delta l' = \Delta l_{max}$, όρα σωστή σχέση (β)

9.19



Σχήμα (α)

... πλάτος $A = \Delta l_1 = \frac{mg}{k}$

$\Rightarrow A = \frac{mg}{k}$ (1)

Σχήμα (β)

Ισορροπία ράβδου

$\Sigma\tau_{(O)} = 0 \Rightarrow m_2 g \frac{\ell}{2} = F \cdot \ell$

$\Rightarrow 3mg\frac{\ell}{2} = F\ell \Rightarrow F = 1{,}5mg$ (2)

Ισορροπία σώματος (Σ)

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{\epsilon\lambda}' = B + F = m_1 g + F \xrightarrow{(2)}$

$\Rightarrow F_{\epsilon\lambda}' = mg + 1{,}5mg \Rightarrow F_{\epsilon\lambda}' = 2{,}5mg$

$\Rightarrow k\Delta\ell_2 = 2{,}5mg \Rightarrow \Delta\ell_2 = \frac{2{,}5mg}{k}$ (3)

Μόλις κοπεί το νήμα (ακμαίο) η ταχύτητα θα είναι μηδέν αλλά η θέση ισορροπίας είναι $\Delta\ell_1 = mg/k$.

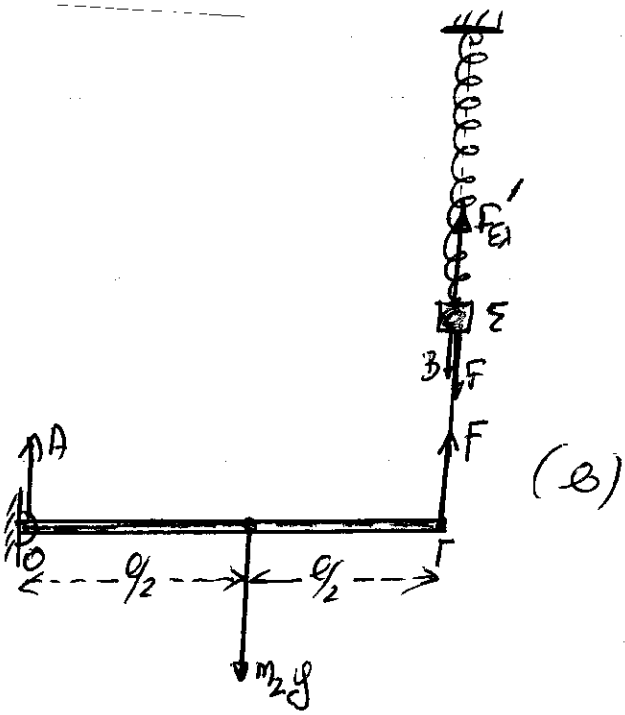
Επειδή τότε η σφαίρα το νήμα έχει $v=0$ σε αυτή τη θέση ταλαντώνεται

Εί νοει!

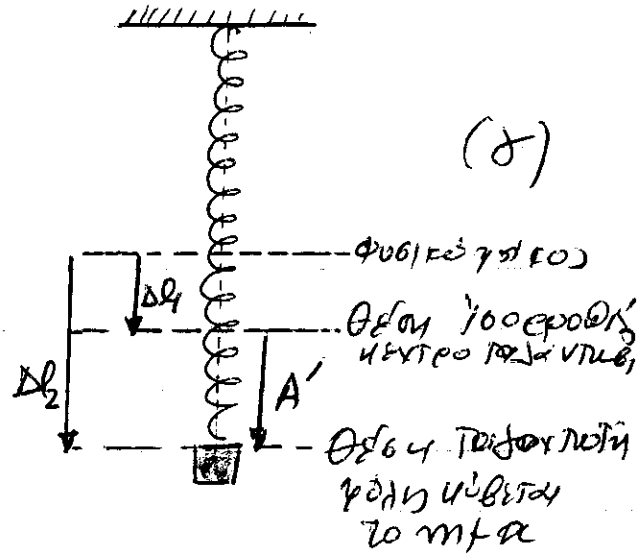
$A' = \Delta\ell_2 - \Delta\ell_1 \xrightarrow{1,3}$

$A' = 1{,}5\, mg/k \Rightarrow \boxed{A' = 1{,}5A}$

Άρα σωστή η σχέση (γ)



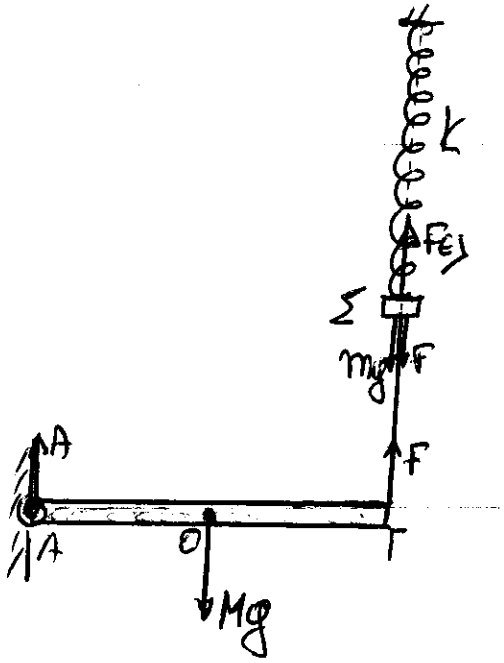
(β)



(γ)

9.20

Αφού η σανίδα ισορροπεί
$\Sigma\tau(A) = 0 \Rightarrow F\ell = Mg\frac{\ell}{2}$
$\Rightarrow F = \frac{Mg}{2}$



Αφού το σώμα (Σ) ισορροπεί θα έχει το ελατήριο παραμορφωθεί κατά $\Delta\ell_2$ ...
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{ελ} = mg + F$

$\Rightarrow F_{ελ} = mg + \frac{Mg}{2} \Rightarrow K\Delta\ell_2 = mg + \frac{Mg}{2}$ (1)

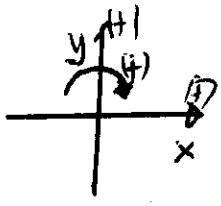
Όταν κόψουμε το νήμα το σώμα έχει ταχύτητα $v = 0$ (...ακριβώς θέση ταλάντωσης) και θα κάνει ταλαντώσεις γύρω από τη θέση ισορροπίας του, άρα το ελατήριο είναι παραμορφωμένο κατά $\Delta\ell_1$ και η θέση αυτή προσδιορίζεται από την σχέση
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow K\Delta\ell_1 = mg$ (2)

Το πλάτος A θα είναι
$A = \Delta\ell_2 - \Delta\ell_1 \xrightarrow{1,2} A = \frac{mg + \frac{Mg}{2}}{K} - \frac{mg}{K} \Rightarrow$

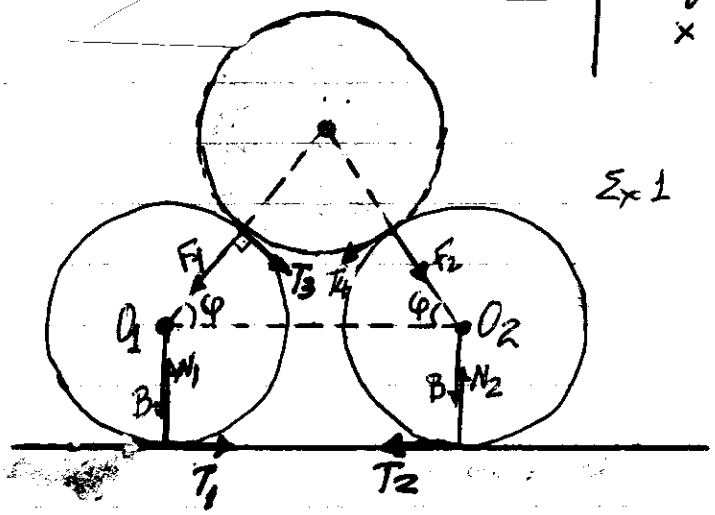
$\Rightarrow \boxed{A = \frac{Mg}{2K}}$

Άρα σωστή η πρόταση (δ)

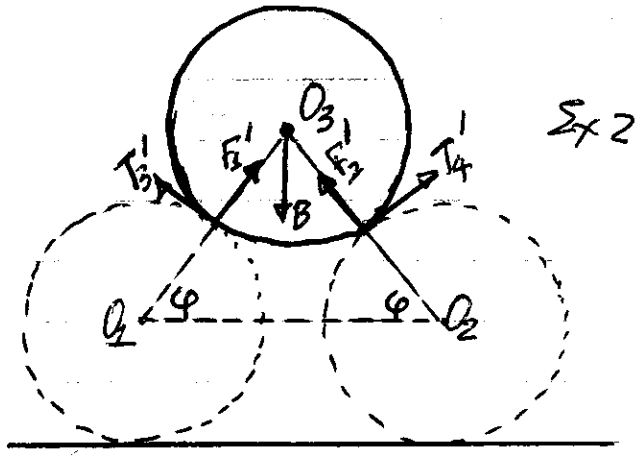
9.21



α) Στο σχήμα (1) είναι τοποθετημένες οι δυνάμεις στις σφαίρες O_1 και O_2, ενώ στο σχήμα (2) έχουν σχεδιασθεί οι δυνάμεις στη σφαίρα O_3.



β) Σχεδίαση - υπολογισμός των τεινόντων.
Πρώτα χαλυφθεί κατά το σχόλιο δηλαδή ότι οι σφαίρες είναι αντίθετα ταυτόσημες R_1, R_2, R_3



- Οι σφαίρες O_1 και O_2 αφού την «πίεση» της O_3 τείνουν να φύγουν προς τα έξω, ... δηλ
  - Η O_1 δέχεται από το δεξιό τείνει $\vec{T}_1 > 0$
  - Η O_2 δέχεται από το δεξιό πάνω $\vec{T}_2 < 0$
- Η σφαίρα (O_1, R_1) δεν στρέφεται – και επειδή γύρω οι τείνει να προς το O_1 έχει ροπή – πρέπει η ροπή της T_1 να εξουδετερώνεται από την ροπή της τείνει T_3 που ασκείται από τη σφαίρα O_3. *

$$\Sigma\tau(O_1) = 0 \Rightarrow \tau_{T_1} + \tau_{T_2} = 0 \Rightarrow -T_1 \cdot R_1 + T_3 R_1 = 0 \Rightarrow T_1 = T_3 = T \quad (1)$$

(* άρα η T_3 πρέπει να τείνει να προκαλέσει στροφή αντίθετη της T_1)

- Με την ίδια λογική έχουν τοποθετηθεί

οι δυνάμεις που ασκούν οι τοίχοι στη σφαίρα (O_2, R_2)

$\Sigma\tau(O_2)=0 \Rightarrow T_2 R_2 - T_4 R_2 = 0 \Rightarrow T_2 = T_4 = T'$ (2)

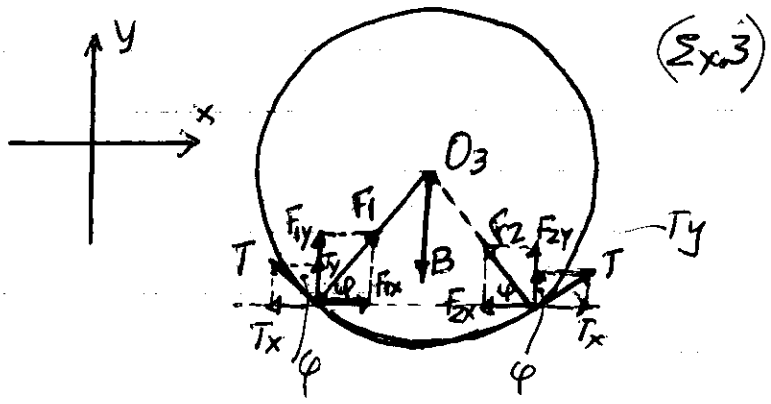
• Στο σχήμα (3) είναι τοποθετημένη η δύναμεις που ασκούνται στην (O_3, R_3) προφανώς $F_1' = F_1$, $F_2' = F_2$, $T_3' = T_3$. και $T_4' = T_4$

Επειδή η σφαίρα δεν στρέφεται $\Sigma\tau(O_3)=0$

$\Rightarrow T_3' \cdot R_3 - T_4' R_3 = 0 \Rightarrow T_3' = T_4' \Rightarrow T_3 = T_4$ (3)

Από (1), (2), (3) $\underline{T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = \dots = T}$ (1)

γ, δ). Στο σχήμα (3) έχουν σχεδιαστεί και αναλυθεί οι δυνάμεις στην O_3, R δυνάμεις.



$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{1x} - T_x - F_{2x} + T_x = 0$

$\Rightarrow F_{1x} = F_{2x} \Rightarrow F_1 \sigma\upsilon\nu\varphi = F_2 \sigma\upsilon\nu\varphi$

$\Rightarrow \boxed{F_1 = F_2 = F}$

$T_x = T\eta\mu\varphi$ $\quad F_{1x} = F_1 \sigma\upsilon\nu\varphi$, $F_{1y} = F_1 \eta\mu\varphi$

$T_y = T\sigma\upsilon\nu\varphi$ $\quad F_{2x} = F_2 \sigma\upsilon\nu\varphi$, $F_{2y} = F_2 \eta\mu\varphi$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow$

$\Leftrightarrow F\eta\mu\varphi + F\eta\mu\varphi + 2T_y = B \Rightarrow 2F\eta\mu\varphi + 2 \cdot T\sigma\upsilon\nu\varphi = Mg \Rightarrow$

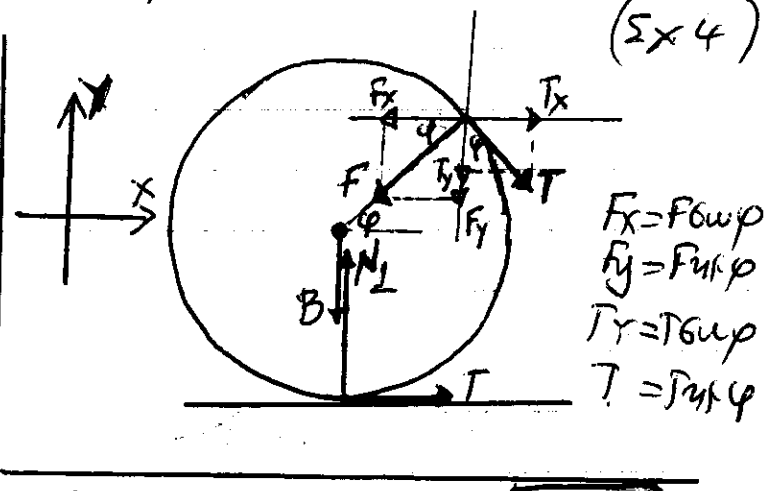
$\Rightarrow 2F \cdot 0{,}8 + 2T \cdot 0{,}6 = 30 \Rightarrow 8F + 6T = 150$

$\Rightarrow 4F + 3T = 75$ (4)

Στο σχήμα 4 έχουν σχεδιαστεί και αναλυθεί όλες οι δυνάμεις στη

(Σχ 4)

Σφαίρα (O_1, R) δυνάμεις



Ισορροπία σφαίρας Q, R

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_x = T_x + T \Rightarrow$

$\Rightarrow F\sigma\upsilon\nu\varphi = T\eta\mu\varphi + T \Rightarrow$

$\Rightarrow F \cdot 0,6 = T \cdot 0,8 + T$

$\Rightarrow F \cdot 0,6 = 1,8T$

$\Rightarrow F = 3T \quad (5)$

$(4), (5) \Rightarrow 4 \cdot 3T + 3T = 75 \Rightarrow 15T = 75 \Rightarrow \boxed{T = 5N}$

$(5) \Rightarrow \boxed{F = 15N}$

Ισορροπία σφαίρας (Q, R)

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_1 - B - F_y - T_y = 0 \Rightarrow N_1 = Mg + F\eta\mu\varphi + T\sigma\upsilon\nu\varphi$

$\Rightarrow N_1 = 30 + 15 \cdot 0,8 + 5 \cdot 0,6 \Rightarrow \boxed{N_1 = 45N}$ όμοια $N_2 = 45N$

... και διαφορετικά από τον N_1 και N_2

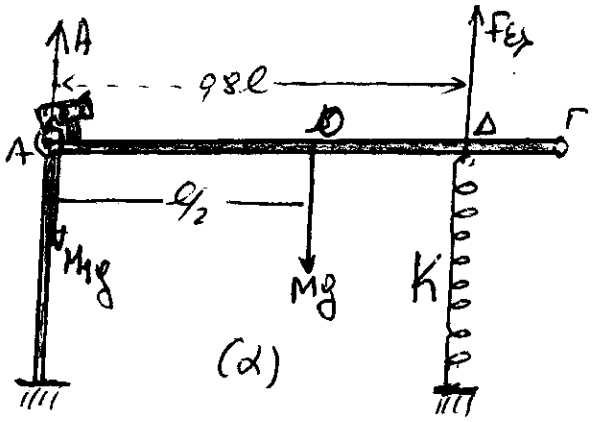
... λόγω συμμετρίας $N_1 = N_2 = N$

Αφού όλο το σύστημα ισορροπεί $\Sigma F_{y\,\text{σύστ.}} = 0$

$\Rightarrow N_1 + N_2 - 3B = 0 \Rightarrow N + N = 3B \Rightarrow N = \frac{3}{2}B$

$\Rightarrow \boxed{N = 45N}$.

9.22



Α) Αφού το αριστερό μέρος ισορροπεί η δύναμη που ασκεί στη ράβδο ισούται με το βάρος του και η δύναμη του ελατηρίου ισορροπεί

$\Sigma\tau_{(A)}=0 \Rightarrow Mg\frac{\ell}{2}=F_{ελ}\cdot 0,8\ell \Rightarrow F_{ελ}=\frac{Mg}{1,6}=\frac{32\cdot 10}{1,6} \Rightarrow F_{ελ}=200N$

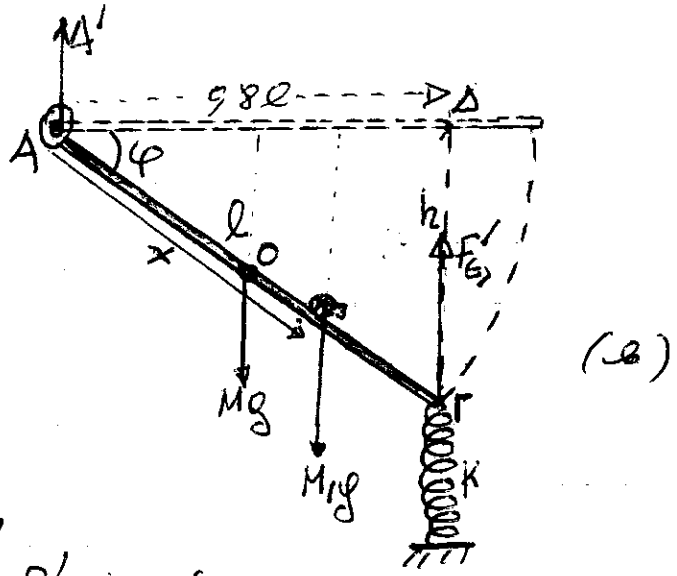
$F_{ελ}=k\Delta\ell \Rightarrow 200=100\Delta\ell \Rightarrow \boxed{\Delta\ell=2m}$

Β) Ισορροπία ράβδου $\Sigma F_y=0 \Rightarrow A+F_{ελ}-M_1g-Mg=0$

$\Rightarrow A+200-320-500 \Rightarrow \boxed{A=620N}$

Γ)

Στη θέση αυτή το ελατήριο συσπειρώθηκε κατά h.



$\Delta A\Delta\Gamma \Rightarrow \eta\mu\varphi=\frac{0,8\ell}{\ell}=0,8$

$\Rightarrow \eta\mu\varphi=0,6 \Rightarrow h=\ell\cdot\eta\mu\varphi$

$\Rightarrow h=4\cdot 0,6 \Rightarrow h=2,4m$

Συσπείρωση του ελατηρίου στη νέα θέση $\Delta\ell'=\Delta\ell+h$

$\Rightarrow \Delta\ell'=4,4m \Rightarrow F_{ελ}'=k\Delta\ell' \Rightarrow F_{ελ}'=440N$

Ισορροπία ράβδου στη νέα θέση $\Sigma\tau_{(A)}=0 \Rightarrow \dots$

$\Rightarrow Mg\frac{\ell}{2}\sigma\upsilon\varphi+M_1g\cdot x\sigma\upsilon\varphi=F_{ελ}'\ell\sigma\upsilon\varphi \Rightarrow 320\cdot\frac{4}{2}+500x=440\cdot 4$

$\Rightarrow 160+125x=440 \Rightarrow 125x=280 \Rightarrow \boxed{x=2,24m}$

Δ) Έστω K' η αναζητούμενη σταθερά ελατηρίου ... αφού το σχήμα (α) η παραμόρφωση του ελατηρίου θα είναι $\Delta\ell=\frac{200}{k'}$ και από το σχήμα (β) η παραμόρφωση $\Delta\ell'=2,4+\frac{200}{k'}$ ... Τι ίδιο) το αρχικό ήταν στο Γ.

$\Sigma\tau_{(A)}=0 \Rightarrow Mg\frac{\ell}{2}\sigma\upsilon\varphi+M_1g\ell\sigma\upsilon\varphi=F_{ελ}'\cdot\ell\sigma\upsilon\varphi \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{Mg}{2} + M_1 g = F_{\epsilon\lambda}' \Rightarrow \frac{320}{2} + 500 = K'\Delta\ell'' \Rightarrow$

$\Rightarrow 660 = K'\left(2{,}4 + \frac{200}{K}\right) \Rightarrow 660 = 2{,}4K' + 200$

$\Rightarrow 460 = 2{,}4K' \Rightarrow K' = \frac{460}{2{,}4}\ N/m \Rightarrow \boxed{K' = 191{,}6\ N/m}$

9.23

Α) Ισορροπία δίσκου

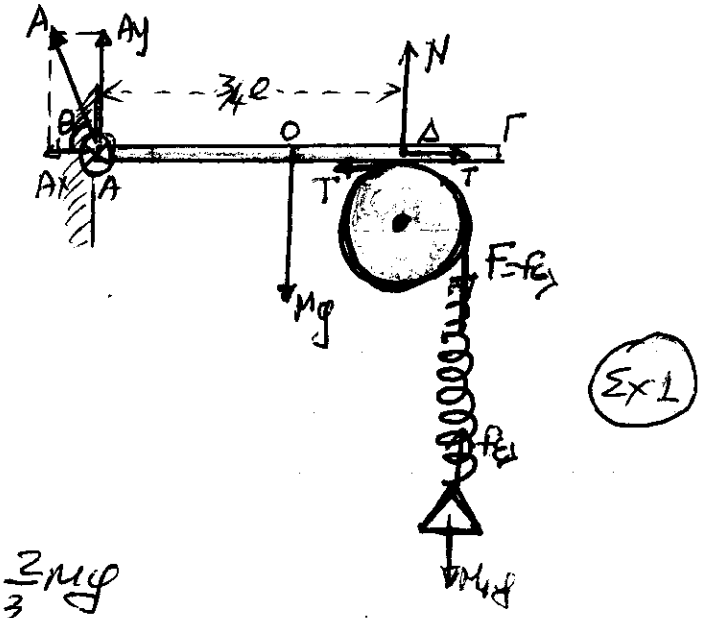
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{\epsilon\lambda} = M_1 g$

$\Rightarrow F_{\epsilon\lambda} = 10\,N$

Ισορροπία κυλίνδρου

$\Sigma\tau = 0 \Rightarrow TR = F_{\epsilon\lambda} R$

$\Rightarrow \boxed{T = 10\,N}$



Β) Ισορροπία ράβδου

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x = T \Rightarrow \boxed{A_x = 10\,N}$

$\Sigma\tau_{(A)} = 0 \Rightarrow Mg\frac{\ell}{2} = N\cdot\frac{3}{4}\ell \Rightarrow N = \frac{2}{3}Mg$

$\Rightarrow \boxed{N = 240\,N}$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y + N - Mg = 0 \Rightarrow A_y = Mg - N \Rightarrow A_y = 360\,N - 240\,N \Rightarrow \boxed{A_y = 120\,N}$

$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y \Rightarrow A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \Rightarrow \boxed{A \approx 120{,}4\,N}$ $\quad \varepsilon\varphi\theta = \frac{A_y}{A_x} \Rightarrow \boxed{\varepsilon\varphi\theta = 12}$

Γ) Η θέση ισορροπίας του δίσκου είναι το τελευταίο παραγωμένο σημείο κατά $\Delta\ell_1$: $F_{\epsilon\lambda} = M_1 g \Rightarrow K\Delta\ell = M_1 g \Rightarrow \Delta\ell = \frac{M_1 g}{K}$

$\Rightarrow \Delta\ell = 0{,}10\,m$.

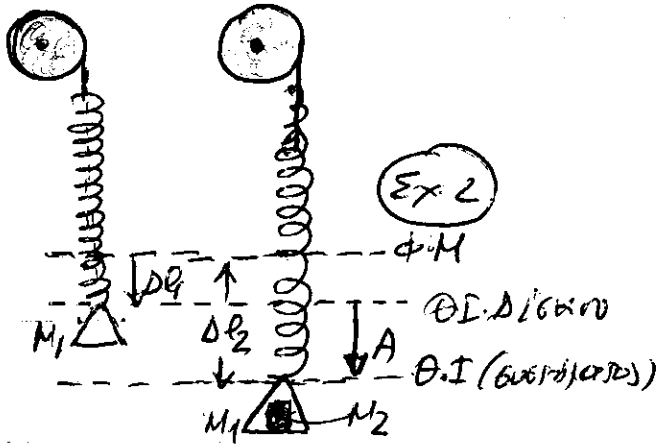
Η θέση ισορροπίας των 2 δίσκων – σώματος Σ) είναι επίσης το δεύτερο παραγωμένο κατά $\Delta\ell_2$: $\Sigma F_y = 0$

$\Rightarrow F_{\epsilon\lambda}' = (M_1 + M_2)g \Rightarrow K\Delta\ell_2 = (M_1 + M_2)g \Rightarrow \Delta\ell_2 = 0{,}29\,m$

Επειδή τώρα αφήνουμε το σώμα $\cdots$ $v = 0$ αλλά

Είναι η ανεμπόδιστη, άρα $A = \Delta\ell_2 - \Delta\ell_1 \Rightarrow \boxed{A = 0{,}19\,m}$

(βλ. Σχ. 2)



β) Όταν $F_{ελ1} = 14{,}5\,N \Rightarrow$

$F_{ελ1} = k\Delta\ell \Rightarrow 14{,}5 = 100\Delta\ell$

$\Rightarrow \Delta\ell = 0{,}145\,m$

Η απομάκρυνση του σημείου εφαρμογής της δύναμης είναι $y = \Delta\ell_2 - \Delta\ell \Rightarrow y = 0{,}145\,m$

$\hookrightarrow y = 0{,}29 - 0{,}145$

(βλέπε σχήμα 3)

Ο ταλαντωτής (δίσκος-σώμα) έχει σταθερά ταλάντωσης

$D = K = (M_1 + M_2)\omega^2$

$\Rightarrow 100 = 2{,}9\omega^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{100}{2{,}9}\,(SI)$

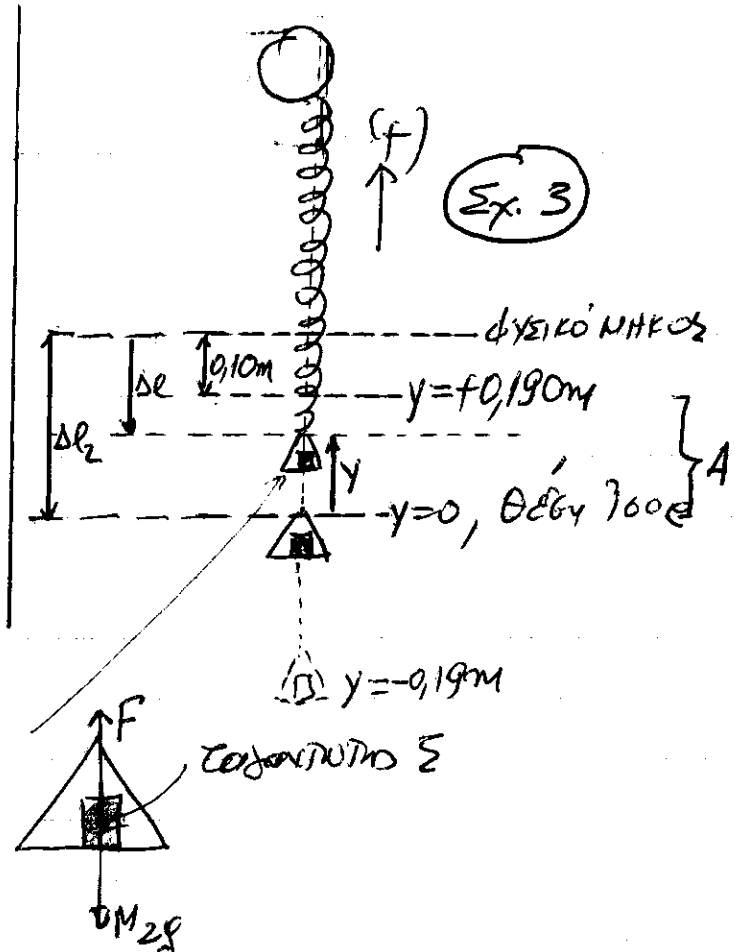
Ο ταλαντωτής Σ έχει σταθερά ταλάντωσης

$D_2 = M_2\omega^2 = 1{,}9 \cdot \frac{100}{2{,}9} = \frac{190}{2{,}9}\,(SI)$.

και δέχεται δυο δυνάμεις

- το βάρος $M_2 g$
- την F από το δίσκο

Σε απομάκρυνση $y = +0{,}145\,m$ από τη θέση ισορροπίας (Σ) αποκτά επιτάχυνση

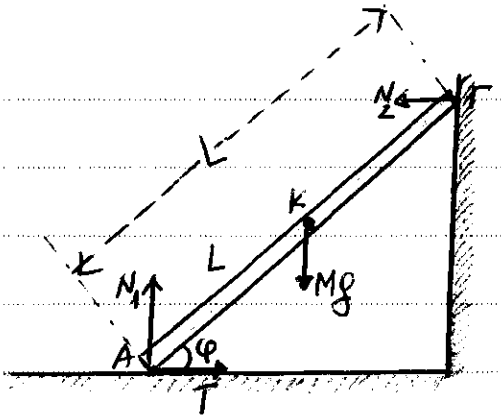


$\Sigma F_y = -D_2 y \Rightarrow F - M_2 g = -D_2 y \Rightarrow F = M_2 g - D_2 y \Rightarrow F = 19 - \frac{190}{2{,}9} y$

$y = +0{,}145\,m \quad F = 19 - \frac{190}{2{,}9} \cdot 0{,}145 \Rightarrow \boxed{F = 9{,}5\,N}$

ε) Τέλη $\mu \geq \frac{I}{N}$ ή $\mu \geq \frac{10}{140}$ ή $\mu \geq \frac{1}{14}$

9.24



Α) $L=4m$, $M=10kg$ $\mu=0,5$

$\Sigma F_x=0 \Rightarrow T=N_2$ (1)

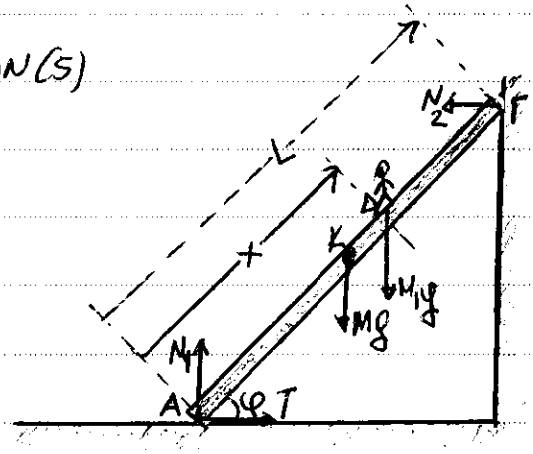
$\Sigma F_y=0 \Rightarrow N_1=Mg \Rightarrow N_1=100N$ (2)

$\Sigma \tau_{(A)}=0 \Rightarrow Mg\frac{L}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi = L\eta\mu\varphi N_2$

$\Rightarrow N_2=\frac{Mg\sigma\upsilon\nu\varphi}{2\eta\mu\varphi} \xrightarrow{(1)} T=\frac{Mg}{2}\frac{\sigma\upsilon\nu\varphi}{\eta\mu\varphi}$ (3)

Επειδή η ράβδος είναι στατική $T\le\mu N_1 \xrightarrow[(3)]{(2)} \frac{Mg}{2}\frac{\sigma\upsilon\nu\varphi}{\eta\mu\varphi}\le\mu Mg \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi\le 2\mu\eta\mu\varphi$

$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi\le 2\cdot 0,5\cdot\eta\mu\varphi \Rightarrow 1\le\frac{\eta\mu\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi} \Rightarrow \varepsilon\varphi\varphi\ge 1 \Rightarrow \varphi\ge 45^\circ \Rightarrow \varphi_{min}=45^\circ$



Β-1)

$\Sigma F_x=0 \Rightarrow T=N_2$ (4) , $\Sigma F_y=0 \Rightarrow N_1=(M_1+M)g=500N$ (5)

$\Sigma\tau_{(A)}=0 \Rightarrow N_2 L\eta\mu\varphi = Mg\frac{L}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi + M_1 g x\sigma\upsilon\nu\varphi \overset{SF}{\Rightarrow}$

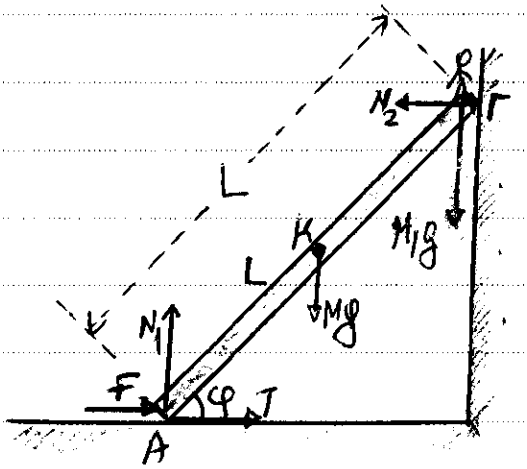
$N_2=37,5+75x \xrightarrow{(4)} T=37,5+75x$

$T\le\mu N_1 \Rightarrow 37,5+75x\le 0,5\cdot 500$

$\Rightarrow 75x\le 212,5 \Rightarrow x\le 2,83m$ η $x_{max}=2,83m$

Β-2) $N_1=500N$, $N_2=T=250N$

$Mg=100N$, $F_1=M_1g=500N$



Γ)

$\Sigma F_x=0 \Rightarrow F+T=N_2$ (5)

$\Sigma F_y=0 \Rightarrow N_1=M_1g+Mg=500N$

$\Sigma\tau_{(A)}=0 \Rightarrow N_2 L\eta\mu\varphi = Mg\frac{L}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi + M_1 g L\sigma\upsilon\nu\varphi$

$\overset{SF}{\Rightarrow} N_2=337,5N$

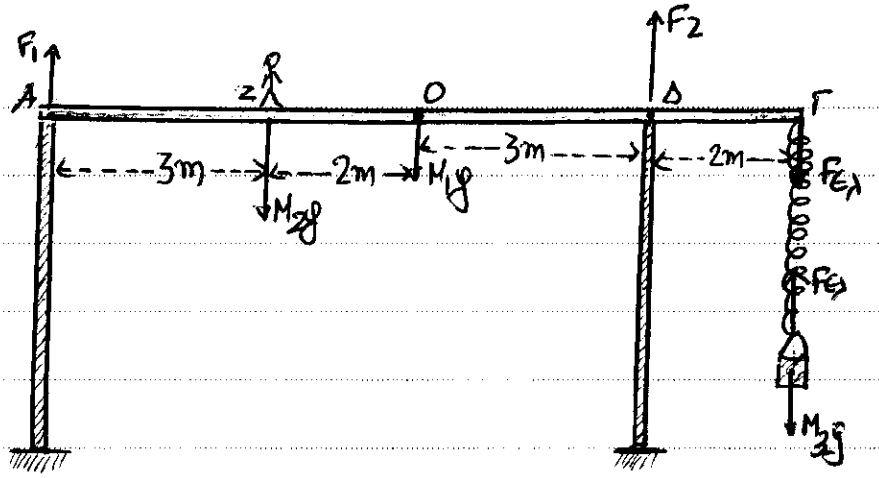
(5) $T=337,5-F$

Και α) λλ $0\le T\le\mu N_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0\le 337,5-F\le 0,5\cdot 500 \Rightarrow 0\le 337,5-F\le 250 \Rightarrow -337,5\le -F\le -87,5$

$\Rightarrow 337,5\ge F\ge 87,5N$ ή $87,5N\le F\le 337,5N$

9.25



Α) $M_1 = 20kg$ $M_2 = 30kg$, $L = 10m$

$(AZ) = 3m$; $K = 1000\ N/m$

$M_3 = 10kg$

Ισορροπία κάδου: $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow F_{ελ} = M_3 g \Rightarrow F_{ελ} = 100N$

Ισορροπία δοκού: $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_1 + F_2 = M_2 g + M_1 g + F_{ελ} = 300 + 200 + 100 \Rightarrow F_1 + F_2 = 600\ N$

$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \Rightarrow M_2 g (AZ) + M_1 g (OA) + F_{ελ} (AΓ) = F_2 (AΔ) \Rightarrow 300 \cdot 3 + 200 \cdot 5 + 100 \cdot 10 = F_2 \cdot 8$

$\Rightarrow F_2 = 362,5N$ και $F_1 = 237,5N$

Προφανώς η δοκός θα κερί τις ακίνητες δυνάμεις από αυτό που δέχεται

Β.1) Θέση ισορροπίας κάδου

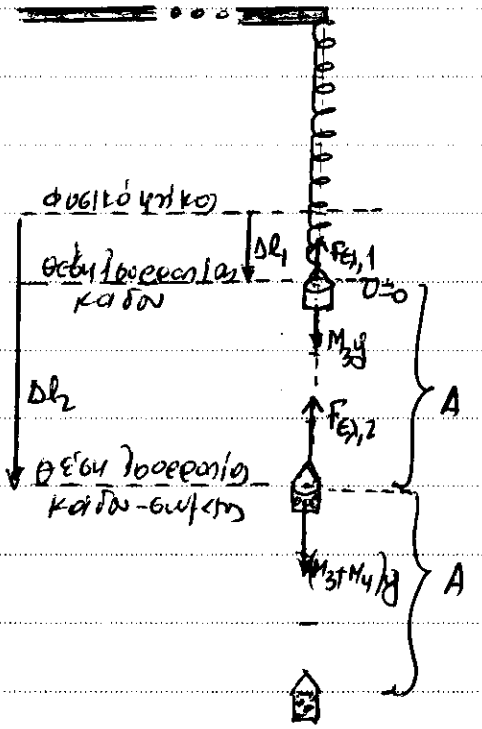
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow M_3 g = K \Delta l_1 \Rightarrow 10 = 1000 \Delta l_1$

$\Rightarrow \Delta l_1 = 0,01m$

Θέση ισορροπίας κάδου-δοκού

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow (M_3 + M_4) g = K \Delta l_2 \Rightarrow 40 = 1000 \Delta l_2$

$\Rightarrow \Delta l_2 = 0,04m$



Από το σχήμα φαίνεται ότι το σώμα την $t=0$ βρίσκεται με $\upsilon = 0$ σε απόσταση $\Delta l_2 - \Delta l_1 = 0,3m$ από τη θέση ισορροπίας, άρα αυτό είναι το πλάτος της ταλάντωσης $A = 0,3m$

Β.2) ... $F_2 = \dfrac{M_2 g (AZ) + M_1 g (OA) + F_{ελ} (AΓ)}{AΔ} \Rightarrow F_2 = \dfrac{300 \cdot 3 + 200 \cdot 5 + F_{ελ} \cdot 10}{8}$

$\Rightarrow F_2 = \dfrac{1900 + 10 F_{ελ}}{8}$ ... $F_{ελ,max} = K(\Delta l_2 + A) = 1000 \cdot 0,7 = 700N$

άρα $F_{2,max} = \dfrac{1900 + 10 \cdot 700}{8} \Rightarrow F_{2,max} = 1112,5N$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_1 + F_2 = M_2 g + M_1 g + F_{ελ,max} = 300 + 200 + 700 \Rightarrow F_1 + F_2 = 1200N$

$\Rightarrow F_1 = 87,5N$ (... τη προφανώς δεν είναι ακίνητη)

$\Sigma\tau_{(\Delta)}=0 \Rightarrow F_1(A\Delta)+F_{\epsilon\lambda}(\Delta\Gamma)=M_2g(Z\Delta)+M_1g(O\Delta) \Rightarrow F_1\cdot 8+F_{\epsilon\lambda}\cdot 2=300\cdot 5+200\cdot 3$

$\Rightarrow 8F_1+2F_{\epsilon\lambda}=2100 \Rightarrow 8F_1=2100-2F_{\epsilon\lambda} \Rightarrow F_1=\frac{2100-2F_{\epsilon\lambda}}{8}$

$F_{1,max}=\frac{2100-2F_{\epsilon\lambda,min}}{8}$ ... και αλλά $F_{\epsilon\lambda,min}=k\Delta l_{min}=1000\cdot 0,1=100N$

άρα $F_{1,max}=\frac{2100-2\cdot 100}{8}=\frac{1900}{8}N$ ή $F_{1,max}=237,5N$

Γ) Για να γίνει υπόθεση ανατροπή της σανίδας πρέπει $F_1\geq 0$

ή $2100-2F_{\epsilon\lambda}\geq 0$ ή $-2F_{\epsilon\lambda}\geq -2100$ ή $F_{\epsilon\lambda}\leq 1050N$ ή $k\Delta l\leq 1050$

ή $1000\Delta l\leq 1050$ ή $\Delta l\leq 1,05m$ και οπότε το σχοινί α

$0,1+2A\leq 1,05$ ή $2A\leq 0,95m$ ή $A\leq 0,475m$

Και αλλά $A=\Delta l_2-\Delta l_1=\frac{(M_3+M_4)g}{k}-\frac{m_3g}{k}=\frac{m_4g}{k}\leq 0,475$ ή $\frac{m_4\cdot 10}{1000}\leq 0,475$

$\Rightarrow m_4\leq 47,5kg$

Δ) Αν στον κάδο αφήσουμε νερό $M'=50kg$ το πλοίο της παραγράφου (όπως και παραπάνω) θα είναι $A=\frac{M'g}{k}=\frac{50\cdot 10}{1000}\Rightarrow A=0,5m$.

Στην ταλάντωση $F_{\epsilon\lambda,max}=k\Delta l_{max}$

$\Rightarrow F_{\epsilon\lambda,max}=k(\Delta l_1+2A)=1000(1+0,1)$

$\Rightarrow F_{\epsilon\lambda,max}=1100N$.

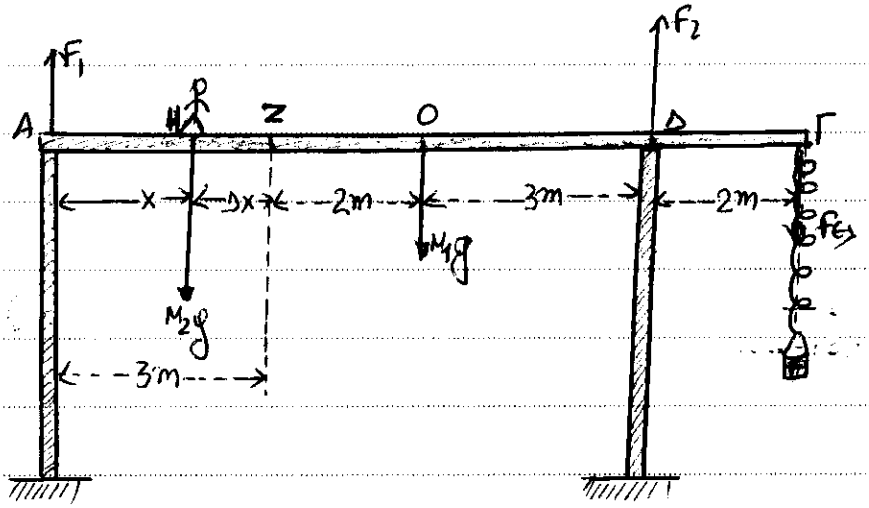
(βλ. προηγούμενο σχήμα)

$\Sigma\tau_{(\Delta)}=0 \Rightarrow F_1\cdot(A\Delta)+F_{\epsilon\lambda}(\Delta\Gamma)=$

$=M_2g(H\Delta)+M_1g(O\Delta)$

$\Rightarrow F_1 8+F_{\epsilon\lambda}2=300(8-x)+200\cdot 3$

$\Rightarrow F_1=\frac{300(8-x)+600-2F_{\epsilon\lambda}}{8}$



$F_1\geq 0$ ή $300(8-x)+600-2F_{\epsilon\lambda}\geq 0 \Rightarrow 2400-300x+600-2F_{\epsilon\lambda}\geq 0$

$\Rightarrow 3000-2F_{\epsilon\lambda}\geq 300x$ ή $300x\leq 3000-2F_{\epsilon\lambda}$ ή $x\leq\frac{3000}{300}-\frac{2}{300}F_{\epsilon\lambda}$ και για

$F_{\epsilon\lambda,max}=1100N$ έχουμε $x=\frac{3000}{300}-\frac{2}{300}\cdot 1100 \Rightarrow x=\frac{8}{3}m$

Άρα $\Delta x=3-\frac{8}{3}$ ή $\Delta x=\frac{1}{3}m$

9.26

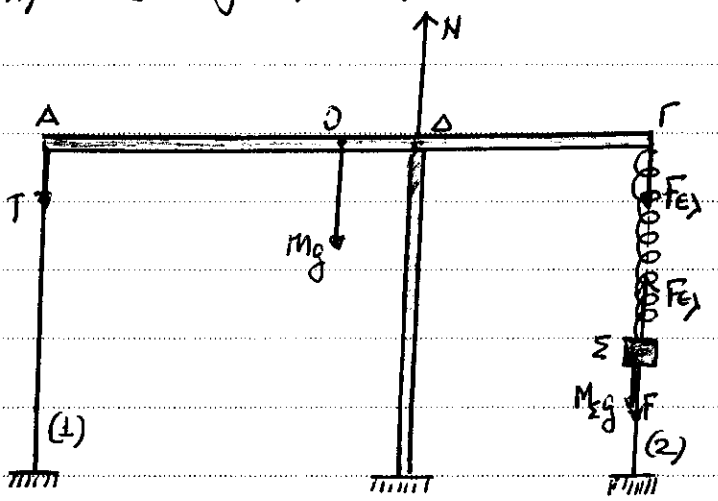
Α) $L=2m$, $M=2kg$, $(OA)=0,20m$, $K=100N/m$, $M_\Sigma=1kg$, $F=4N$

Σώμα (Σ): $F_{ελ}=M_\Sigma g+F \Rightarrow F_{ελ}=1\cdot10+4=14N$

Ράβδος: $\Sigma\tau_{(O)}=0 \Rightarrow T\cdot(OA)+Mg(OA)=F_{ελ}(O\Gamma)$

$\Rightarrow T\cdot1,2+20\cdot0,2=14\cdot0,8 \Rightarrow T=6N$

$\Sigma F_y=0 \Rightarrow N=T+Mg+F_{ελ} \Rightarrow N=40N$



Β-1) Θέση ισορροπίας του Σ στην

τελάγτωση (μεγιστοπαλάγτωση)

$\Sigma F_y=0 \Rightarrow K\Delta l=M_\Sigma g \Rightarrow 100\Delta l=1\cdot10$

$\Rightarrow \Delta l=0,10m$

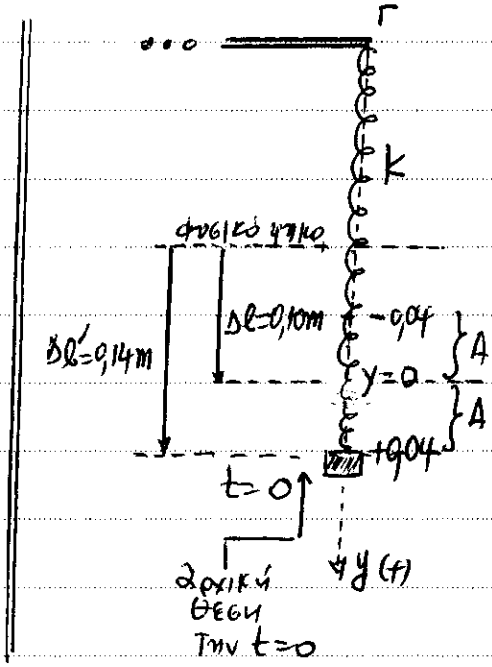
Θέση ισορροπίας μόλις άφηκε η τελάγτωση $F_{ελ}=K\Delta l' \Rightarrow 14=100\Delta l'$

$\Rightarrow \Delta l'=0,14m$. Το σώμα (Σ) μόλις άφηκε την τελάγτωση άρχισε από

τη θέση ισορροπίας του απόσταση $y=\Delta l'-\Delta l=0,04m$. που αποτελεί

και το πλάτος της ταλάντωσης, $A=0,04m$

$D=K=M_\Sigma\omega^2 \Rightarrow \omega=10\,rad/s$



Β-2) $y(t)=A\eta\mu(\omega t+\frac{\pi}{2}) \Rightarrow y(t)=0,04\eta\mu(10t+\frac{\pi}{2})\,(SI)$

$v(t)=0,4\sigma\upsilon\nu(10t+\frac{\pi}{2})\,(SI)$

Β-3) $\Sigma\tau(O)=0 \Rightarrow T\cdot(A\Delta)+Mg(O\Delta)=F_{ελ}\cdot(O\Gamma)$

$\Rightarrow T\cdot1,2+20\cdot0,2=F_{ελ}\cdot0,8 \Rightarrow T=\frac{0,8F_{ελ}-4}{1,2}\,(SI)$ (1)

Την είχαμε όταν $F_{ελ,min}=K\Delta l_{min}$

Από το σχήμα φαίνεται ότι $\Delta l_{min}=0,10-0,04$

$\Rightarrow \Delta l_{min}=0,06m$, $F_{ελ,min}=K\Delta l_{min}=6N$

$(1) \Rightarrow T_{min}=\frac{0,8\cdot6-4}{1,2} \Rightarrow T_{min}=\frac{0,8}{1,2} \Rightarrow T_{min}=\frac{2}{3}N$

Γ) ... $T=\frac{0,8F_{ελ}-4}{1,2}$ ... για να υπάρχει ισορροπία πρέπει

να την χαλαρώνει το νήμα

δηλαδή $T\geq0 \Rightarrow \frac{0,8F_{ελ}-4}{1,2}\geq0$

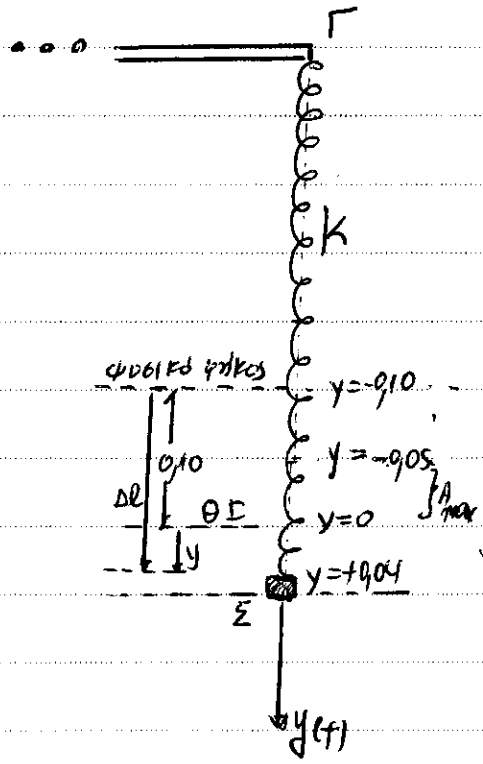
$\Rightarrow 0{,}8 F_{ελ} \geq 4$ και $F_{ελ} \geq 5N$ (2) δηλ $K\Delta\ell \geq 5$ και $\Delta\ell \geq 0{,}05m$!!!

Προσοχή!! Στο σχήμα φαίνεται ότι $y+0{,}10 = \Delta\ell$ δηλ $y = \Delta\ell - 0{,}10$

(2) $\Rightarrow K\Delta\ell \geq 5$ και $K(y+0{,}10) \geq 5$

$\Rightarrow 100(y+0{,}10) \geq 5 \Rightarrow y+0{,}10 \geq 0{,}05$

$\Rightarrow y \geq -0{,}05m$

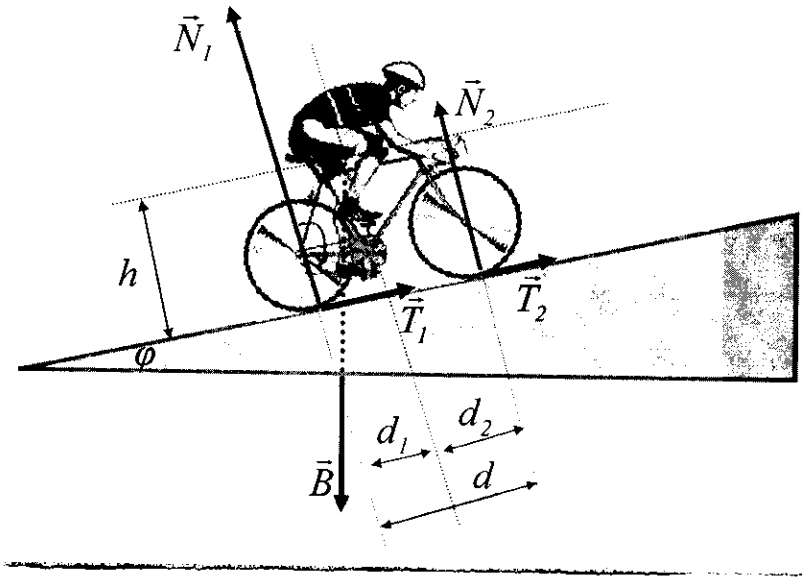


Άρα για να μην χαλαρώνει το νήμα πρέπει $T \geq 0$

$y \geq -0{,}05m$ (το σώμα να είναι πάνω απ' αυτή τη θέση)

$A_{max} = 0{,}05m$

9.27



$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T_1 + T_2 = B\eta\mu\varphi$ (1)

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_1 + N_2 = B\sigma\upsilon\nu\varphi$ (2)

$\Sigma \tau_{cm} = 0 \Rightarrow N_1 d_1 = N_2 d_2 + (T_1 + T_2) h$ (3)

α) (1) $\Rightarrow T_1 + T_2 = Mg\,\eta\mu\varphi$

$\Rightarrow T_{01} = 150\,kg \cdot 10\,m/s^2 \cdot 0{,}28$

$\Rightarrow \boxed{T_{01} = 420\,N}$

β) (3) $\Rightarrow N_1 d_1 - N_2 d_2 = (T_1 + T_2) h \xrightarrow{(1)} N_1 d_1 - N_2 d_2 = B\eta\mu\varphi \cdot h$

(1) $\Rightarrow N_1 + N_2 = B\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow -N_1 d_1 - N_2 d_1 = -B\sigma\upsilon\nu\varphi\, d_1$ } (+)

$-N_2 (d_1 + d_2) = -B\sigma\upsilon\nu\varphi\, d_1 + B\eta\mu\varphi\, h \Rightarrow N_2 d = Mg(d_1\sigma\upsilon\nu\varphi - h\eta\mu\varphi)$

$\Rightarrow N_2 = \dfrac{Mg(d_1\sigma\upsilon\nu\varphi - h\eta\mu\varphi)}{d}$ (4)

$\hookrightarrow N_2 = \dfrac{150\,kg\cdot 10\,m/s^2 \,(0{,}4\,m \cdot 0{,}96 - 1\,m \cdot 0{,}28)}{1\,m} \Rightarrow \boxed{N_2 = 156\,N}$

(2) $N_1 + N_2 = Mg\sigma\upsilon\nu\varphi = 1500 \cdot 0{,}96 = 1440\,N \Rightarrow \boxed{N_1 = 1284\,N}$

γ) $T_1 \le \mu_e N_1$, $T_2 \le \mu_e N_2$ } $T_1 + T_2 \le \mu_e (N_1 + N_2) \xrightarrow{(1)} B\eta\mu\varphi \le \mu_e (N_1 + N_2)$

$\xrightarrow{(2)} B\eta\mu\varphi \le \mu_e B\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow \mu_e \ge \varepsilon\varphi\varphi$

$\Rightarrow \mu_e \ge \dfrac{0{,}28}{0{,}96} \Rightarrow \mu_e \ge \dfrac{7}{24}$ ή $\boxed{\mu_e \ge 0{,}292}$

δ) Ο κίνδυνος ανατροπής είναι στον μπροστινό τροχό ($N_2 < N_1$). Για να ισχύει ανατροπή πρέπει $N_2 > 0 \overset{(4)}{\Rightarrow} d_1\sigma\upsilon\nu\varphi - h\eta\mu\varphi \ge 0 \Rightarrow -h\eta\mu\varphi > -d_1\sigma\upsilon\nu\varphi$

$\Rightarrow h\eta\mu\varphi < d_1\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow \dfrac{\eta\mu\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi} < \dfrac{d_1}{h} \Rightarrow \boxed{\varepsilon\varphi\varphi < 0{,}4}$

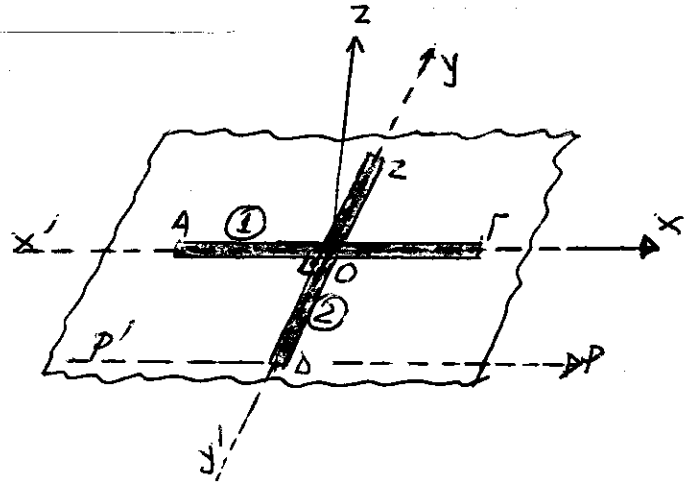
$\Rightarrow \boxed{\varphi < 21{,}8^\circ}$ ... εξαρτάται μόνο από τη θέση του C.M.

9.28

(1) ράβδος (1)

$I_{P,1} = \Sigma m_i (\frac{L}{2})^2 = \frac{L^2}{4} \Sigma m_i$

$\Rightarrow I_{P,1} = \frac{1}{4} ML^2$



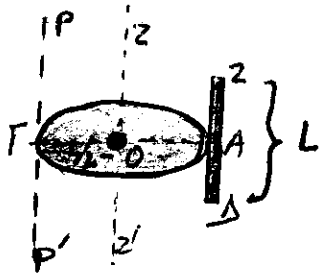
Ράβδος (2)

$I_{P,2} = \frac{1}{12} ML^2 + M(\frac{L}{2})^2 = \frac{1}{3} ML^2$

$I_{P,\text{σωστή ράβδος}} = I_{P,1} + I_{P,2} = \frac{1}{4} ML^2 + \frac{1}{3} ML^2 \Rightarrow I_P = \frac{7}{12} ML^2$

άρα σωστή η σχέση (δ)

9.29



Δίσκος: $I_{P,\delta} = \frac{1}{2} M_1 R^2 + M_1 R^2 = \frac{3}{2} M_1 R^2$

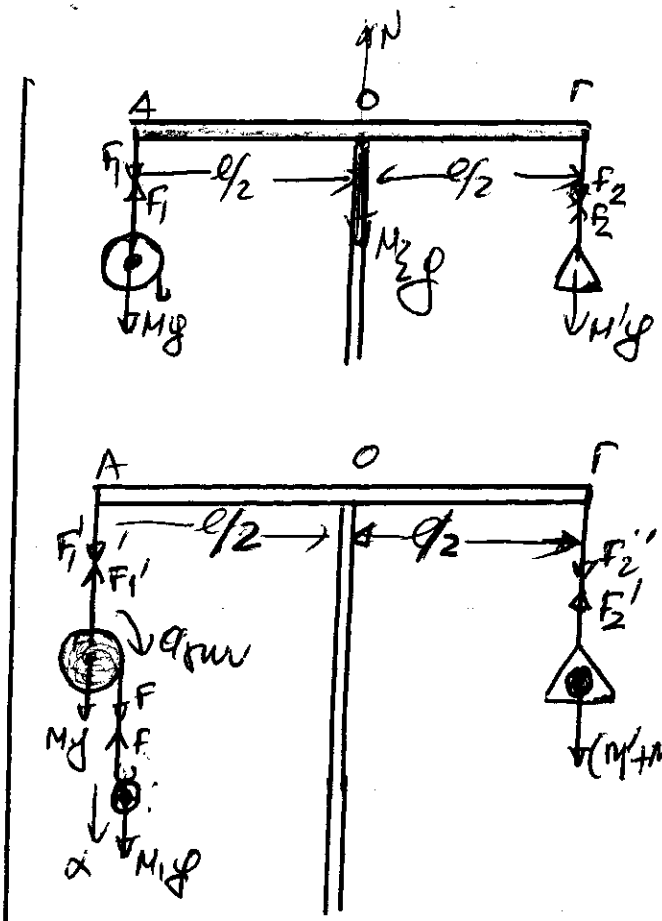
$\Rightarrow I_{P,\delta} = \frac{3}{2} M_1 (\frac{L}{2})^2 = \frac{3}{8} M_1 L^2$

Ράβδος: $I_{P,\rho} = \Sigma m_i L^2 = M_2 L^2 = ML^2$

άρα $I_{P,\sigma} = \frac{3}{8} ML^2 + ML^2 = \frac{3}{8} ML^2 + \frac{8}{8} ML^2 \Rightarrow \boxed{I_{P,\sigma} = \frac{11}{8} ML^2}$

άρα σωστή η σχέση (δ)

9.30



Αρχικά $\Sigma\tau(O)=0$

$\Rightarrow F_1\frac{\ell}{2}=F_2\frac{\ell}{2}\Rightarrow$

$\Rightarrow F_1=F_2\Rightarrow \dots Mg=M'g$

$\Rightarrow M'=M$.

Στη σανίδα

Παίρνω $M_1=M$

$\Sigma F_y=M_1\alpha\Rightarrow M_1g-F=M_1\alpha$

$\xrightarrow{M_1=M}$ $Mg-F=M\alpha$ (1)

Τροχαλία

$\Sigma\tau=I\alpha_{\gamma\omega\nu}\Rightarrow Fr=\frac{1}{2}Mr^2\frac{\alpha}{r}$

$\Rightarrow F=\frac{1}{2}M\alpha$ (2)

(1)+(2) $\Rightarrow Mg=\frac{3}{2}M\alpha\Rightarrow\alpha=\frac{2}{3}g\xrightarrow{(2)}F=\frac{1}{2}M\frac{2}{3}g$

$\Rightarrow F=\frac{Mg}{3}$.

Στήλης $\Sigma F_y=0\Rightarrow F_1'=Mg+F=Mg+\frac{Mg}{3}\Rightarrow\boxed{F_1'=\frac{4}{3}Mg}$ (3)

Η δεξιά δίδακτυλη $\Sigma F_y=0\Rightarrow F_2'=(M'+M_2)g\xrightarrow{M'=M}$

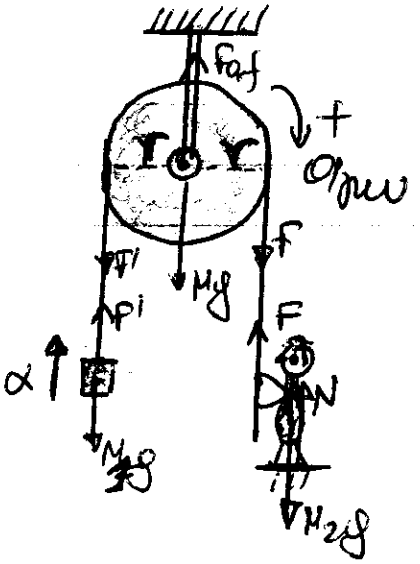
$\Rightarrow\boxed{F_2'=(M+M_2)g}$ (4)

Ισορροπία σανίδας $\Sigma\tau(O)=0\Rightarrow F_1'\frac{\ell}{2}=F_2'\frac{\ell}{2}$

$\Rightarrow F_1'=F_2'\overset{3,4}{\Rightarrow}\frac{4}{3}Mg=Mg+M_2g\Rightarrow\frac{1}{3}Mg=M_2g$

$\Rightarrow\boxed{M_2=\frac{M}{3}}$ Άρα σωστή η πρόταση (β)

9.31



Σώμα α: $\Sigma F_y = M_2 a \Rightarrow$

$F' - M_2 g = M_2 a$ (1)

Τροχαλία

$\Sigma \tau = I \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow Fr - F'r = \frac{1}{2} M r^2 \frac{a}{r}$

$\Rightarrow F - F' = \frac{1}{2} M a$ (2)

(1)+(2) $\Rightarrow F - M_2 g = (M_2 + \frac{M}{2}) a$ (3)

Υδροστατικά σημαίνει $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F + N - M_2 g = 0$

$\Rightarrow F = M_2 g - N \xrightarrow{(3)} M_2 g - N - M_1 g = (M_1 + \frac{M}{2}) a$

$\frac{M_2 = 11{,}05M}{M_1 = 10M} \rightarrow 11{,}05 \cdot g - N - 10Mg = (10M + 0{,}5M) a$

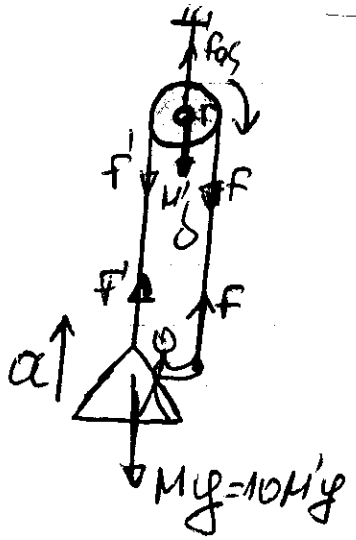
$\rightarrow 1{,}05Mg - N = 10{,}5Ma \Rightarrow N = 1{,}05Mg - 10{,}5Ma \geq 0$

$\Rightarrow -10{,}5Ma \geq -1{,}05Mg \Rightarrow a \leq 0{,}1g$

Άρα $a_{max} = 0{,}1g$

Σωστό το πρόταση (δ)

9.32



Εξίσωση - ποσοδ'

$\Sigma F_y = Ma \Rightarrow$

$F' + f - Mg = Ma \quad (1)$

Τροχαλία

$\Sigma\tau = I\alpha_{\gamma\omega} \Rightarrow fr - f'r = \frac{1}{2}M'r^2\frac{a}{r}$

$\Rightarrow f - f' = \frac{1}{2}M'a \quad (2)$

$(1)+(2) \Rightarrow 2f - Mg = Ma + \frac{M'}{2}a \xrightarrow[a=0,4g]{M=10M'}$

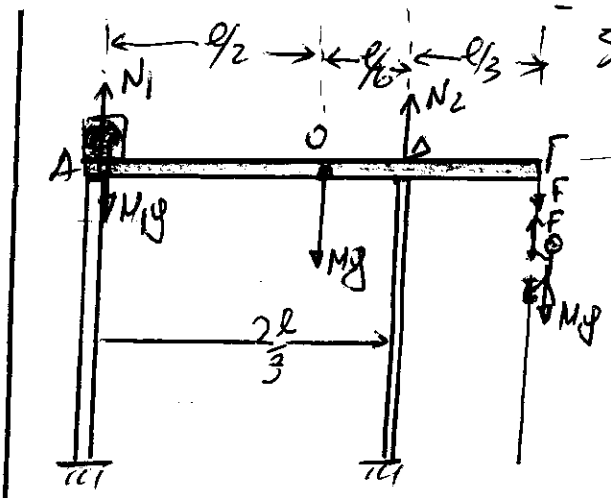
$\Rightarrow 2f = 10M'g + 10M'0,4g + 0,5M'\cdot 0,4g$

$\Rightarrow 2f = 10M'g + 4M'g + 0,2M'g = 14,2M'g$

$\Rightarrow f = 7,1M'g = 7,1\frac{M}{10}g \Rightarrow \boxed{f = 0,71Mg}$

Δεσμεύω η' πρόταση (γ)

9.33



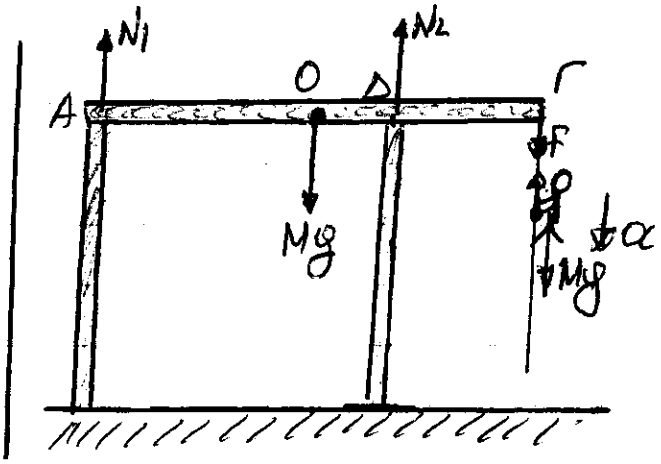
α) Ισορροπία ανθρώπου
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F = Mg$
Ισορροπία σανίδας
$\Sigma \tau(\Delta) = 0 \Rightarrow$
$N_1(\Theta\Delta) + F(\Delta\Sigma) = Mg(A\Delta) + Mg(O\Delta) \Rightarrow$
$\Rightarrow N_1 \frac{2\ell}{3} + Mg\frac{\ell}{3} = Mg\frac{2\ell}{3} + Mg\frac{\ell}{6} \Rightarrow 4N_1 + 2Mg = 4Mg + Mg \Rightarrow$

$\Rightarrow 4N_1 = 4Mg - Mg \Rightarrow N_1 = \frac{4Mg - Mg}{4}$ (1) Προφανώς για να μην χάνεται η επαφή στο Α πρέπει $N_1 > 0$

(1) $\Rightarrow 4Mg - Mg > 0 \rightarrow \boxed{M > \frac{M}{4}}$

Άρα δωσίτη η πρόταση (β) α.2

β) Κίνηση ανθρώπου
$\Sigma F_y = Ma \Rightarrow Mg - F = Ma$
$\Rightarrow F = Mg - Ma$



Ισορροπία σανίδας
$\Sigma\tau(\Delta) = 0 \Rightarrow$
$N_1(A\Delta) + F(\Gamma\Delta) = Mg(O\Delta) \Rightarrow$
$\Rightarrow N_1\frac{2\ell}{3} + (Mg - Ma)\frac{\ell}{3} = Mg\frac{\ell}{6} \Rightarrow 4N_1 + 2Mg - 2Ma = Mg$
$\Rightarrow 4N_1 = 2Ma - Mg \Rightarrow$

$\Rightarrow N_1 = \frac{2Ma - Mg}{4}$ (1)

Για να μην απογειωθεί η σανίδα πρέπει $N_1 > 0$
Από τη σχέση (1) φαίνεται ότι όσο πιο μεγάλη είναι η επιτάχυνση α, τόσο πιο μεγάλη είναι η δύναμη στήριξης N_1, άρα τόσο πιο δύσκολη γίνεται η απογείωση. ΑΝΤΙΘΕΤΑ όσο πιο μικρή

μένει η $\vec{a}$ τόσο μεγαλύτερο η N_1 και τόσο πλησιάζουμε ώστε την ανατροπή

Άρα σωστή η πρόταση (β) | β.2

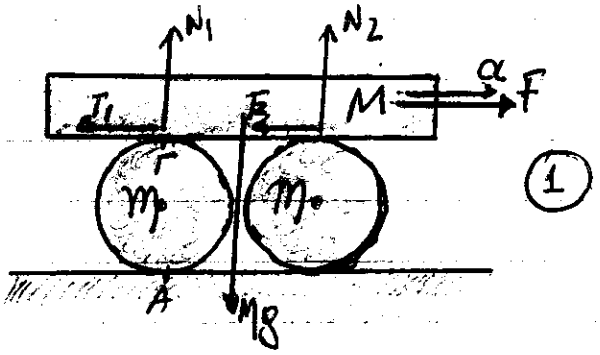
Γ) Προφανώς $N_1 > 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} 2Mα - Mg > 0 \Rightarrow α > \frac{g}{2}$ (*)

$$\left.\begin{aligned} H &= \tfrac{1}{2} a t^2 \\ v &= at \end{aligned}\right\} \Rightarrow v^2 = 2aH \Rightarrow a = \frac{v^2}{2H} \xrightarrow{(*)}$$

$$\Rightarrow \frac{v^2}{2H} > \frac{g}{2} \Rightarrow v^2 > gH \Rightarrow v > \sqrt{gH}$$

$$\Rightarrow v > \sqrt{10\,m/s^2 \cdot 0{,}4\,m} \Rightarrow \boxed{v > 8\,m/s}$$

9.34



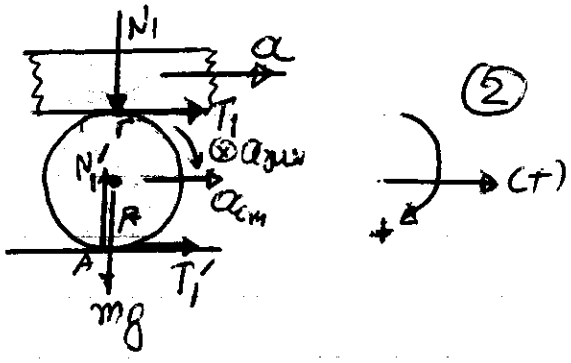
Ο τροχός κυλίεται χωρίς ολίσθηση

$v_A = 0 \Rightarrow v_{cm} - \omega R = 0 \Rightarrow v_{cm} = \omega R$

$\Rightarrow \alpha_{cm} = R\alpha_{\gamma\omega}$ (εξ. 3)

Το ψάρι δεν ολισθαίνει πάνω στον τροχό $\Rightarrow v = v_r = \omega R + v_{cm} \Rightarrow v = 2v_{cm}$

$\Rightarrow \alpha = 2\alpha_{cm}$ (1)



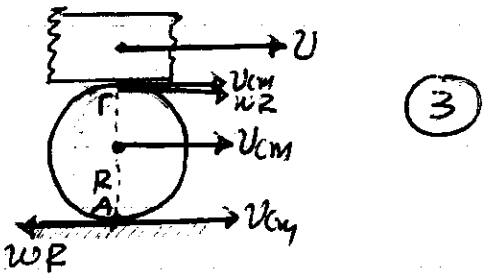
Από το εξ. 1 για το ψάρι

$\Sigma F_x = M\alpha \Rightarrow F - T_1 - T_2 = M\alpha$ (2)

Από το εξ. 2 για το κορμό δένδρου

$\Sigma F_x = m\alpha_{cm} \Rightarrow T_1 + T_1' = m\alpha_{cm}$ (3)

$\Sigma \tau = I\alpha_{\gamma\omega} \Rightarrow T_1 R - T_1' R = \frac{1}{2} m R^2 \frac{\alpha_{cm}}{R}$



$\Rightarrow T_1 - T_1' = \frac{1}{2} m\alpha_{cm}$ (4)

$(3)+(4) \Rightarrow 2T_1 = \frac{3}{2} m\alpha_{cm} \Rightarrow$

$\Rightarrow T_1 = \frac{3}{4} m\alpha_{cm}$. Ομοίως $T_2 = \frac{3}{4} m\alpha_{cm}$

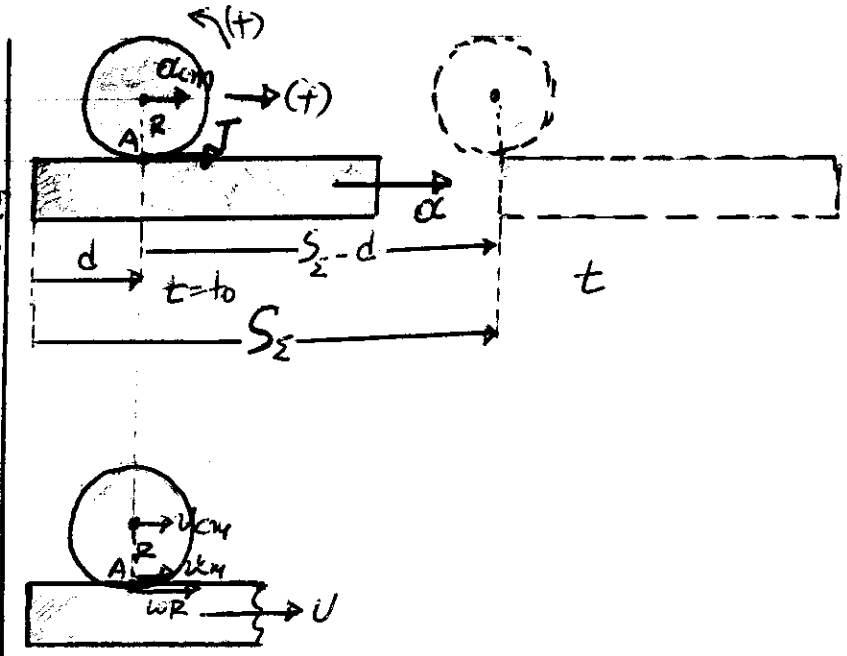
$(2) \Rightarrow F - \frac{3}{4} m\alpha_{cm} - \frac{3}{4} m\alpha_{cm} = M\alpha \overset{(1)}{\Rightarrow} F - \frac{6}{4} m\frac{\alpha}{2} = M\alpha$

$\Rightarrow F = \frac{3}{4} m\alpha + M\alpha \Rightarrow F = \frac{3m+4M}{4}\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{4F}{3m+4M}$

$\overset{m = M/3}{\Rightarrow} \alpha = \frac{4F}{3\frac{M}{3} + 4M} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{4F}{5M}}$

Άρα σωστή η πρόταση (δ)

9.35



Αφού η σανίδα επιταχύνεται, οκόλιμ τείνει να φύγει προς τα πίσω άρα δέχεται στατική τριβή προς τα εμπρός.

Η τριβή αυτή του δίνει γωνιακή επιτάχυνση με a_{cm} και στροφική κίνηση με $a_{\gamma\omega\nu}$.

$$\Sigma F_x = M a_{cm} \Rightarrow T = M a_{cm} \Rightarrow a_{cm} = \frac{T}{M}$$

$$\Sigma \tau = I \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T \cdot R = \frac{1}{2} M R^2 \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{2T}{MR}$$

$$\Rightarrow \frac{a_{cm}}{\alpha_{\gamma\omega\nu}} = \frac{R}{2} \Rightarrow \boxed{2a_{cm} = R\alpha_{\gamma\omega\nu}} \quad (1)$$

Ο κύλινδρος (όμως δεν ολισθαίνει στη σανίδα) πρέπει να έχει την ίδια ταχύτητα στο σημείο επαφής του Α με τη σανίδα $v_{cm} + \omega R = v \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{dv_{cm}}{dt} + \frac{d(\omega R)}{dt} = \frac{dv}{dt} \Rightarrow a_{cm} + R\alpha_{\gamma\omega\nu} = \alpha \xrightarrow{(1)} 3a_{cm} = \alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{a_{cm} = \frac{\alpha}{3}}, \quad T = M a_{cm} \Rightarrow T = M\frac{\alpha}{3} \Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{3} M\alpha}$$

Μέσα στο χρόνο t (βλ. σχήμα) που ο κύλινδρος έφτασε στο πίσω μέρος της σανίδας ...

Σανίδα: $S_\Sigma = \frac{1}{2} a \cdot t^2$

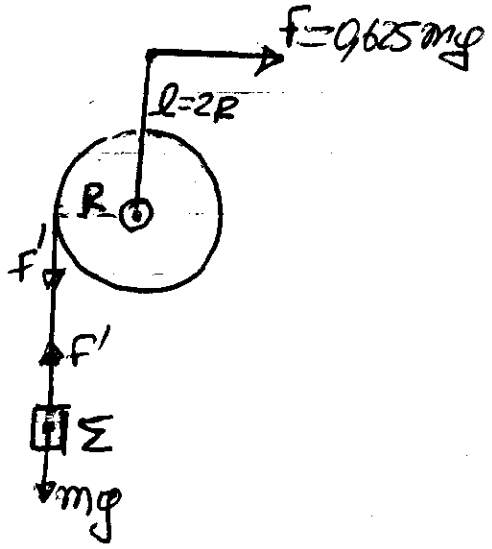
Κύλινδρος: $S_\Sigma - d = \frac{1}{2} a_{cm} t^2$

$$\Rightarrow d = \frac{1}{2}(a - a_{cm})t^2 \Rightarrow d = \frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{\alpha}{3}\right)t^2$$

$$\Rightarrow d = \frac{1}{3} a t^2 \Rightarrow \boxed{t = \sqrt{3d/a}}$$

Άρα <u>α - Σωστή</u>, β - λάθος, <u>γ - Σωστή</u>

9.36



Η προσφερόμενη στο βαρούλκο ενέργεια οφείλεται στο έργο της δύναμης F διαδρομής του σημείου εφαρμογής της δύναμης (κ=σταθ, αφού ν=σταθ)

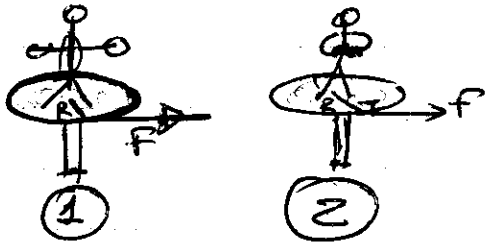
Απόδοση % του βαρούλκου

$$\alpha = \frac{\text{Ωφέλιμη}}{\text{Προσφερόμενη}} \cdot 100\% = \frac{mgH}{W_F} \cdot 100\% = \frac{mgH}{Fl \cdot \Delta\varphi} 100\%$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{mg \cdot S_{\pi\lambda\epsilon}}{Fl \cdot \Delta\varphi} 100\% = \frac{mgR\Delta\varphi}{0{,}625mg2R \cdot \Delta\varphi} 100\% = \frac{mg}{1{,}25mg} 100\% = 80\%$$

$\Rightarrow \alpha = 80\%$ άρα σωστή η πρόταση (γ)

9.37



- Παραπάνω για τις δυνάμεις δράσεις ίδιες $I_1 > I_2$

- $\Delta K = W_{ολ} \Rightarrow K - K_{αρχ}^{0} = W_F \Rightarrow K = FR\Delta\varphi = F\Delta S_{περ} = F\ell_{συμπ}$
$\Rightarrow K = F\ell_{συμπ}$ (1)

- $\left.\begin{matrix} K = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2 \\ L = I\omega \end{matrix}\right\} \Rightarrow K = \frac{1}{2} I \left(\frac{L}{I}\right)^2 \Rightarrow K = \frac{L^2}{2I} \Rightarrow L = \sqrt{2IK}$ (2)

- $\Sigma\tau = I\alpha_{γων} \Rightarrow FR = I\alpha_{γων} \Rightarrow \alpha_{γων} = \frac{FR}{I}$

$\Delta\varphi = \frac{1}{2}\alpha_{γων} t^2 \Rightarrow \frac{\ell}{R} = \frac{1}{2}\alpha_{γων} t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{2\ell}{R \cdot \alpha_{γων}} \Rightarrow t^2 = \frac{2\ell}{R \cdot \frac{FR}{I}}$

$\Rightarrow t^2 = \frac{2\ell I}{FR^2} \Rightarrow t = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2\ell}{F} I}$ (3) π.χ. $\frac{\Delta L}{\Delta t} = FR = \sigma\alpha\theta \Rightarrow L = FRt \Rightarrow t = \frac{L}{FR}$

Με βάση τα παραπάνω έχουμε

α) (1) $\Rightarrow$ $\boxed{K_1 = K_2 = F\ell_{συμπ}}$ Άρα η πρόταση (α) είναι λάθος

β) (2) ...

$\left.\begin{matrix} L_1 = \sqrt{2I_1 K_1} \\ L_2 = \sqrt{2I_2 K_2} \end{matrix}\right\} \xrightarrow{K_1 = K_2} \frac{L_1}{L_2} = \sqrt{\frac{I_1}{I_2}} \xrightarrow{I_1 > I_2} \boxed{L_1 > L_2}$

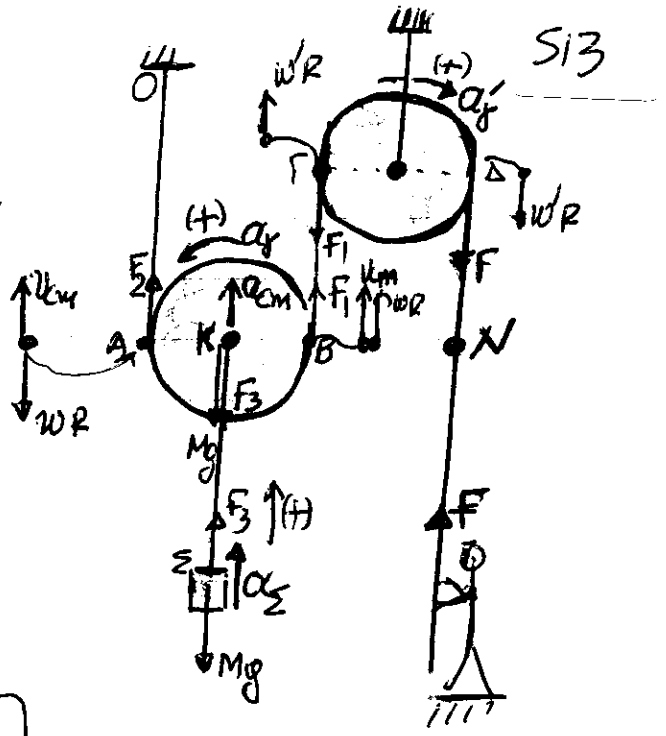
Άρα η πρόταση (β) είναι σωστή

γ) (3) ...

$\left.\begin{matrix} t_1 = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2\ell}{F} I_1} \\ t_2 = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2\ell}{F} I_2} \end{matrix}\right\} \frac{t_1}{t_2} = \sqrt{\frac{I_1}{I_2}} \xrightarrow{I_1 > I_2} \boxed{t_1 > t_2}$

Άρα η πρόταση (γ) είναι λάθος

9.38



1ο βήμα: Σχέση επιτρόχιων και επιταχύνσεων

- $U_\Sigma = U_{cm} \Rightarrow \frac{dU_\Sigma}{dt} = \frac{dU_{cm}}{dt} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\alpha_\Sigma = \alpha_{cm}}$

- $U_A = U_{\pi\rho\sigma\kappa\upsilon\lambda} = U_0 = 0$

$\Rightarrow \omega R - U_{cm} = 0 \Rightarrow U_{cm} = \omega R$

$\Rightarrow \frac{dU_{cm}}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} \Rightarrow \boxed{\alpha_{cm} = R\alpha_\gamma}$

- $U_B = U_{\pi\rho\sigma\kappa\upsilon\lambda} = U_\Gamma \Rightarrow U_{cm} + \omega R = \omega' R \Rightarrow 2U_{cm} = \omega' R \Rightarrow$

$\frac{d(2U_{cm})}{dt} = \frac{d(\omega' R)}{dt} \Rightarrow 2\frac{dU_{cm}}{dt} = R\frac{d\omega'}{dt} \Rightarrow \boxed{2\alpha_{cm} = R\alpha'_\gamma}$

- $U_N = U_\Delta = \omega' R \Rightarrow a_N = R\alpha'_{\gamma\omega} \Rightarrow \boxed{a_N = 2\alpha_{cm}}$

2ο βήμα: Υπολογισμός της F

- Μεταφορική: $\Sigma C = I\alpha_{\gamma\omega}' \Rightarrow FR - F_1 R = \frac{1}{2}MR^2\frac{2\alpha_{cm}}{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow F - F_1 = M\alpha_{cm} \Rightarrow \underline{2F - 2F_1 = 2M\alpha_{cm}}$ (1)

- Κινητή τροχαλία:

$\Sigma C = I\alpha_{\gamma\omega} \Rightarrow F_1 R - F_2 R = \frac{1}{2}MR^2\frac{\alpha_{cm}}{R} \Rightarrow \underline{F_1 - F_2 = \frac{1}{2}M\alpha_{cm}}$ (2)

$\Sigma F_y = M\alpha_{cm} \Rightarrow \underline{F_1 + F_2 - F_3 - Mg = M\alpha_{cm}}$ (3)

- Σώμα (Σ): $\Sigma F_y = M\alpha_{cm} \Rightarrow \underline{F_3 - Mg = M\alpha_{cm}}$ (4)

(1) + (2) + (3) + (4) $\Rightarrow$

$2F - 2Mg = 4{,}5M\alpha_{cm} \Rightarrow 2F = 2Mg + 4{,}5M\frac{g}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2F = 3{,}5Mg \Rightarrow \boxed{F = 1{,}75Mg}$

3ο βήμα: Μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της F

$a_{cm} = 2\,a_{cm}$ ... όταν το σώμα (Σ) ανέβει ύψος Η σε χρόνο t : $H = \frac{1}{2} a_{cm} t^2$ τότε το σημείο Μ κατέρχεται ύψος

$S = \frac{1}{2} a_M t^2 = \frac{1}{2} 2 a_{cm} t^2 = \dots = 2H$

Άρα $W_F = F \cdot S = 1{,}75 Mg \cdot 2H \Rightarrow \boxed{W_F = 3{,}5 Mg H}$

Άρα σωστή η πρόταση (δ)

Παρατήρηση: Το έργο της F ... η προσφερόμενη από τον άνθρωπο ενέργεια ... ξοδεύτηκε για την ενέργεια που αποθηκεύτηκε το σύστημα.

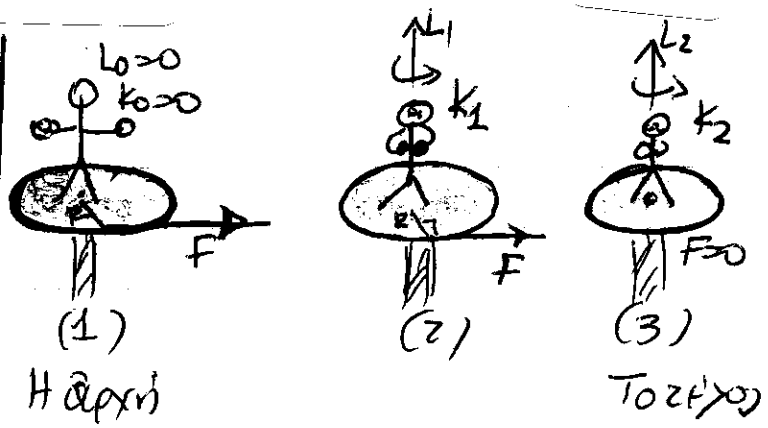
$E_{προσ} = W_F$ {

- Κινητική (στροφική) αξίνητης τροχαλίας $K_1 = \frac{1}{2} I \omega'^2$
- Κινητική μεταφοράς τροχαλίας $K_2 = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{cm}^2$
- Δυναμική μεταφοράς τροχαλίας $U_2 = Mg H$
- Κινητική σώματος: $K_3 = \frac{1}{2} M v_{cm}^2$
- Δυναμική σώματος: $U = Mg H$

Αν συνδυαστούν οι ενέργειες αυτές έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα

9.39

Στη στροφική κίνηση η κινητική ενέργεια και επ η στροφορμή δίνεται αντίστοιχα με $K=\frac{L^2}{2I}$



- Θ.Μ.Κ.Ε από την (1) έως την (2)

$\Delta K = W_{ol} \Rightarrow K_1 - 0 = W_F \Rightarrow \frac{L_1^2}{2I_1} = F \cdot R\Delta\varphi_1 \Rightarrow \frac{L_1^2}{2I_1} = F \cdot \Delta S_1 = F \cdot 0{,}64\ell$

$\Rightarrow \frac{L_1^2}{2I_1} = 0{,}64 F\ell \quad (1)$

- Θ.Μ.Κ.Ε από την (1) έως το τέλος (3) ... που εξισώνεται με το νήπιο.

$\Delta K = W_{ol} \Rightarrow K_2 - 0 = W_F \Rightarrow \frac{L_2^2}{2I_2} = F \cdot R\Delta\varphi = F\Delta S = F\ell$

$\Rightarrow \frac{L_2^2}{2I_2} = F\ell \quad (2)$

$\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow \frac{L_2^2/2I_2}{L_1^2/2I_1} = \frac{F\ell}{0{,}64F\ell} \Rightarrow \frac{L_2^2 \cdot I_1}{L_1^2 I_2} = \frac{1}{0{,}64} \Rightarrow \frac{L_2^2}{L_1^2}\frac{I_1}{0{,}81 I_1} = \frac{1}{0{,}64}$

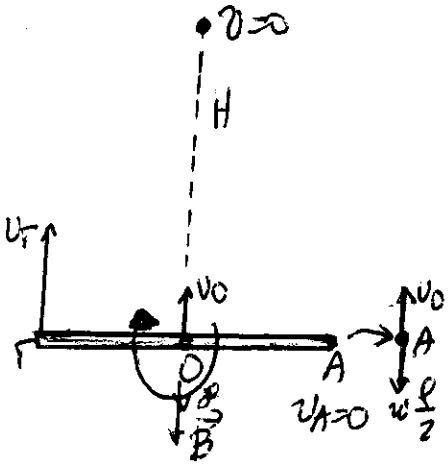
$\Rightarrow \frac{L_2}{L_1} \cdot \frac{1}{0{,}9} = \frac{1}{0{,}8} \Rightarrow \frac{L_2}{L_1} = \frac{9}{8} \Rightarrow \boxed{L_2 = \frac{9}{8} L_1}$

Άρα σωστή η σχέση (γ)

9.40

(2) Οι δυνάμεις κατά τη βολή δίνεται από μοναδική δύναμη το βάρος που έχει σταθερή κατεύθυνση

- Κατά κάθετη θέση προς τα πάνω
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -Mg = Ma_{cm} \Rightarrow a_{cm} = -g$
- Στροφική κίνηση γύρω από ελεύθερο σημείο το δεξιό που διέρχεται από το κ.μ. δηλαδή $\Sigma\tau_{(O)} = 0$ η κίνηση αυτή είναι ομαλή στροφική με $\omega =$ σταθερό και $T = \frac{2\pi}{\omega}$ σταθερή.

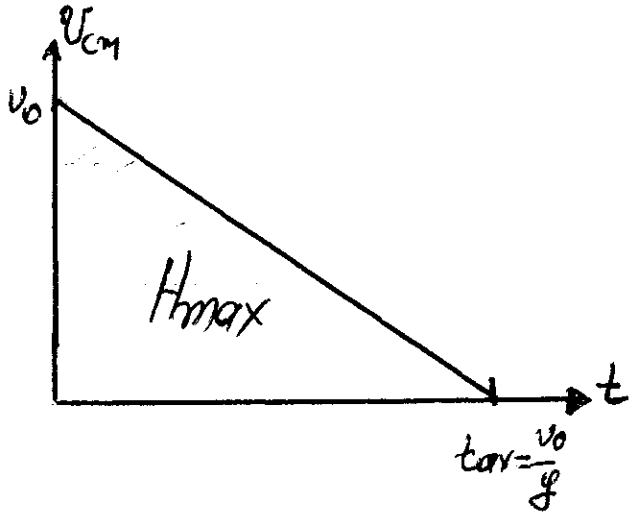


Επειδή $v_A = 0 \Rightarrow v_0 - \omega \frac{\ell}{2} = 0 \Rightarrow v_0 = \omega \frac{\ell}{2}$ (1)

$v_{cm} = v_0 - a_{cm} t = v_0 - g t \xrightarrow[\text{ύψους}]{\text{στο}} 0 = v_0 - g t_{στρ} \Rightarrow t_{στρ} = \frac{v_0}{g}$ (2)

Ακόμα $t_{στρ} = \frac{N}{2} T = \frac{N}{2} \frac{2\pi}{\omega} = \frac{N\pi}{\omega}$ (3)

(2) (3) $\Rightarrow \frac{v_0}{g} = \frac{N\pi}{\omega} \xrightarrow{(1)} \frac{\omega \ell}{g \cdot 2} = \frac{N\pi}{\omega} \Rightarrow \boxed{\omega^2 = \frac{2gN\pi}{\ell}}$ (4)



$H_{max} = \frac{1}{2} \frac{v_0}{g} v_0 = \frac{v_0^2}{2g} \xrightarrow{(1)}$

$H = \frac{\omega^2 \ell^2}{8g} \xrightarrow{(4)}$

$H = \frac{2gN\pi \ell^2}{8g\ell} \Rightarrow \boxed{H = \frac{N\pi\ell}{4}}$

Άρα σωστή η σχέση (γ) / α 3

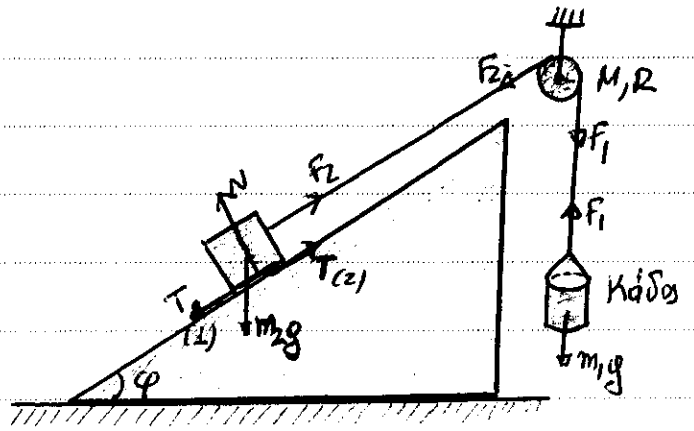
$E = K_{μετ} + K_{στρ} = \frac{1}{2} M v_0^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 = \frac{1}{2} M v_0^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{12} M \ell^2 \omega^2$

$\Rightarrow E = \frac{1}{2} M v_0^2 + \frac{1}{24} M \ell^2 \omega^2 = \frac{1}{2} M v_0^2 + \frac{1}{6} M \left(\frac{\ell}{2}\omega\right)^2 = \frac{1}{2} M v_0^2 + \frac{1}{6} M v_0^2$

$\Rightarrow E = \frac{2}{3} M v_0^2 = \frac{2}{3} M \cdot [2gH] \Rightarrow \boxed{E = \frac{4}{3} Mg H}$

Άρα σωστή η σχέση (γ) / β 3

9.41



Τροχαλία $M=3kg$ $R=0,10m$

Σ: $m_2=5kg$ $\mu=0,5$

A) ... Αν η πάνω επιφάνεια είναι προς τον κάδο η κατεύθυνση της τριβής είναι η (1).

Κάδος Κ: $\Sigma F_y=0 \Rightarrow F_1=m_1 g$, τροχαλία $\Sigma\tau=0 \Rightarrow F_1 R=F_2 R \Rightarrow F_1=F_2$

Σώμα Σ: $\Sigma F_x=0 \Rightarrow F_2=T+m_2 g\eta\mu\varphi$ ... $m_1 g=T+m_2 g\eta\mu\varphi \Rightarrow T=m_1 g-m_2 g\eta\mu\varphi$

Η τριβή είναι στατική $T\le \mu N \Rightarrow m_1 g-m_2 g\eta\mu\varphi \le \mu m_2 g\sigma\upsilon\nu\varphi$

$\Rightarrow m_1 \le m_2(\eta\mu\varphi+\mu\sigma\upsilon\nu\varphi) \Rightarrow m_1 \le 5kg(0,6+0,5\cdot 0,8) \Rightarrow m_1 \le 5kg$ (1)

... Αν η πάνω επιφάνεια είναι προς το σώμα Σ η κατεύθυνση της τριβής είναι η (2) ... οπότε

$\left.\begin{array}{l} \Sigma: m_2 g\eta\mu\varphi = F_2+T \\ K: F_1=m_1 g \end{array}\right\} \Rightarrow m_2 g\eta\mu\varphi = m_1 g+T$ κ' $T=m_2 g\eta\mu\varphi-m_1 g$

Τροχαλία: $\Sigma\tau=0 \Rightarrow F_1 R=F_2 R$

Στατική ... $T\le \mu N \Rightarrow m_2 g\eta\mu\varphi-m_1 g \le \mu m_2 g\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow$

$m_2 g\eta\mu\varphi-\mu m_2 g\sigma\upsilon\nu\varphi \le m_1 g$ κ' $m_1 \ge m_2(\eta\mu\varphi-\mu\sigma\upsilon\nu\varphi)$

$\Rightarrow m_1 \ge 5(0,6-0,5\cdot 0,8) \Rightarrow m_1 \ge 1kg$ (2)

Από (1), (2) $\Rightarrow$ $1kg \le m_1 \le 5kg$

B.1) Για την τροχαλία: $\Sigma\tau=I\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \Sigma\tau=\frac{1}{2}MR^2\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \Sigma\tau=\frac{1}{2}3\cdot 0,1^2\cdot 8$

$\Rightarrow \Sigma\tau=0,12N\cdot m$

B.2) Για τον κάδο $\alpha_K=\alpha_{\varepsilon,\tau\rho o\chi}=R\alpha_{\gamma\omega\nu}=0,1\cdot 8=0,8 m/s^2$

Επίσης $\alpha_\Sigma=\alpha_K=0,8 m/s^2$

$\left.\begin{array}{l} \text{Κάδος}: \Sigma F_y=m_1'\alpha_K \Rightarrow m_1 g-F_1=m_1'\alpha_K \\ \text{Τροχαλία}: \Sigma\tau=I\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow F_1 R-F_2 R=\frac{1}{2}MR^2\frac{\alpha_K}{R} \Rightarrow F_1-F_2=\frac{1}{2}M\alpha_K \\ \text{Σώμα}: \Sigma F_x=M_2\alpha_\Sigma \Rightarrow F_2-T-m_2 g\eta\mu\varphi=m_2\alpha_K \end{array}\right\} \Rightarrow$

$T=\mu N=\mu m_2 g\sigma\upsilon\nu\varphi=20N$

$m_1' g - T - m_2 g \cdot \eta + \varphi = (m_1' + \frac{M}{2} + m_2) a_K \Rightarrow 10m_1' - 20 - 30 = (m_1' + \frac{3}{2} + 5) 0,8$

$\Rightarrow 9,2 m_1' = 55,2 \Rightarrow m_1' = 6\,kg$

B-3)

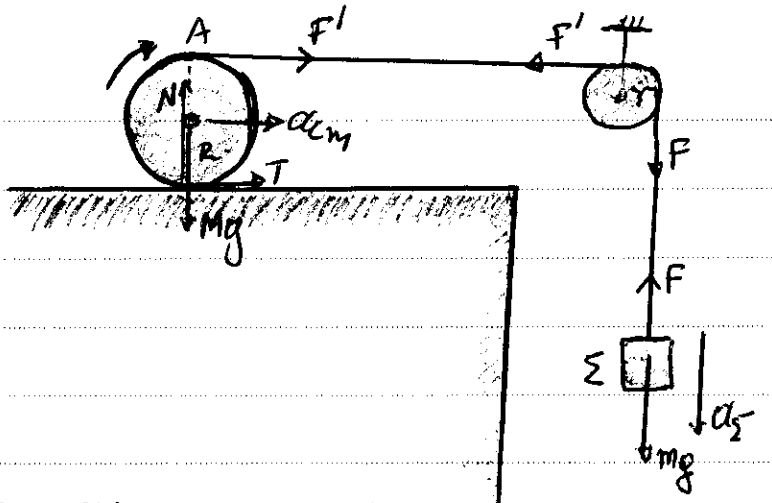
Κιβδος: $m_1' g - F_1 = m_1' a_K \Rightarrow F_1 = 55,2\,N$

τροχαλία $F_1 - f_2 = \frac{1}{2} M a_K \Rightarrow 55,2 - f_2 = \frac{1}{2} 3 \cdot 0,8 \Rightarrow f_2 = 54N$

B-4) $H = \frac{1}{2} a_K t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2H}{a_K}} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot 64}{0,8}} \Rightarrow t = 1s$

$\omega = a_{\gamma\omega\nu} t \Rightarrow \omega = 8 \frac{rad}{s}$

9.42



Δίσκος Δ : $M = 2\,kg$ $R = 0,1\,m$

Τροχαλία $r = 4\,cm$, $|\Gamma| = 0,06\,m$

Σώμα Σ : $m = 0,5\,kg$

$v_{\text{σώματος}} = v_{\text{νήματος}} = v_{\substack{\text{γραμμική} \\ \text{τροχαλίας}}} = v_{\text{δίσκου, A}}$

$\Rightarrow v_Σ = \omega_{τρox} \cdot r = \omega R + v_{cm} \xrightarrow[\text{κύλιση χωρίς ολίσθηση}]{v_{cm} = \omega R} v_Σ = r\omega_{τρox} = 2v_{cm} = 2\omega R$

$\Rightarrow \frac{dv_Σ}{dt} = r \cdot \frac{d\omega_{τρox}}{dt} = 2\frac{dv_{cm}}{dt} = 2R\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow a_Σ = r\,a_{\substack{\text{γων} \\ \text{τρox}}} = 2a_{cm} = 2R\alpha_{\text{γων}}$

Σώμα Σ : $\Sigma F_y = m a_Σ \Rightarrow mg - F = m \cdot 2a_{cm}$

Τροχαλία : $\Sigma \tau = I_{τρox}\,\alpha_{\substack{\text{γων} \\ \text{τρox}}} \Rightarrow Fr - F'r - |\Gamma| = 0$ ή $F - F' - \frac{|\Gamma|}{r} = 0$

Δίσκος : $\Sigma F_x = M a_{cm} \Rightarrow F' + T = M a_{cm}$

: $\Sigma \tau = I\,\alpha_{\text{γων}} \Rightarrow F'R - T'R = \frac{1}{2}MR^2\frac{a_{cm}}{R} \Rightarrow F' - T' = \frac{1}{2}MR\,a_{cm}$

$\Rightarrow$

$2mg - 2F = 4m a_{cm}$ (1)

$2F - 2F' - 2\frac{|\Gamma|}{r} = 0$ (2)

$F' + T = M a_{cm}$ (3)

$F' - T = \frac{1}{2} M a_{cm}$ (4)

$\overset{(+)}{\Rightarrow} 2mg - 2\frac{|\Gamma|}{r} = (4m + 1,5M)\,a_{cm} \Rightarrow$

$2 \cdot 0,5 \cdot 10 - 2\frac{0,06}{0,04} = (4 \cdot 0,5 + 1,5 \cdot 2) \cdot a_{cm}$

$\Rightarrow 7 = 9\,a_{cm} \Rightarrow a_{cm} = 1,4\,m/s^2$

A.1) $a_{cm} = 1,4\,m/s^2$ $\quad a_Σ = 2a_{cm} \Rightarrow a_Σ = 2,8\,m/s^2$

A.2) $\alpha_{\text{γων}} = \frac{a_{cm}}{R} \Rightarrow \alpha_{\text{γων}} = \frac{1,4\,m/s^2}{0,1\,m} \Rightarrow \alpha_{\text{γων}} = 14\,\frac{rad}{s^2}$

B) (1) $\Rightarrow mg - F = 2m a_{cm} \Rightarrow F = m(g - 2a_{cm}) \Rightarrow F = 0,5(10 - 3,8)$

$\Rightarrow F = 3,6\,N$

(2) $\Rightarrow F - F' - \frac{|\Gamma|}{r} = 0 \Rightarrow 3,6 - F' - \frac{0,06}{0,04} = 0 \Rightarrow F' = 2,1\,N$

$(3) \Rightarrow F' + T = M a_{cm} \Rightarrow 2,1 + T = 2 \cdot 1,4 \Rightarrow T = 0,7\,N$

Γ.1) $H = \frac{1}{2} a_\Sigma t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2H}{a_\Sigma}} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,35}{2,8}} \Rightarrow t = 0,5\,s$

$v_{cm} = a_{cm} t = 1,4 \cdot 0,5 \Rightarrow v_{cm} = 0,7\,m/s$

Γ.2) $\Delta S_{\text{νήμα}} = R \Delta\varphi = R \frac{1}{2} a_{\gamma\omega\nu} t^2 = 0,1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 0,5^2 \Rightarrow \Delta S_{\text{νήμα}} = 17,5\,cm$

ή $\Delta S_{\text{νήμα}} = 0,175\,m$

Γ.3) $v_{\substack{\text{γραμμική} \\ \text{τροχαλία}}} = v_\Sigma = a_\Sigma t = 2,8\,m/s^2 \cdot 0,5\,s = 1,4\,m/s$

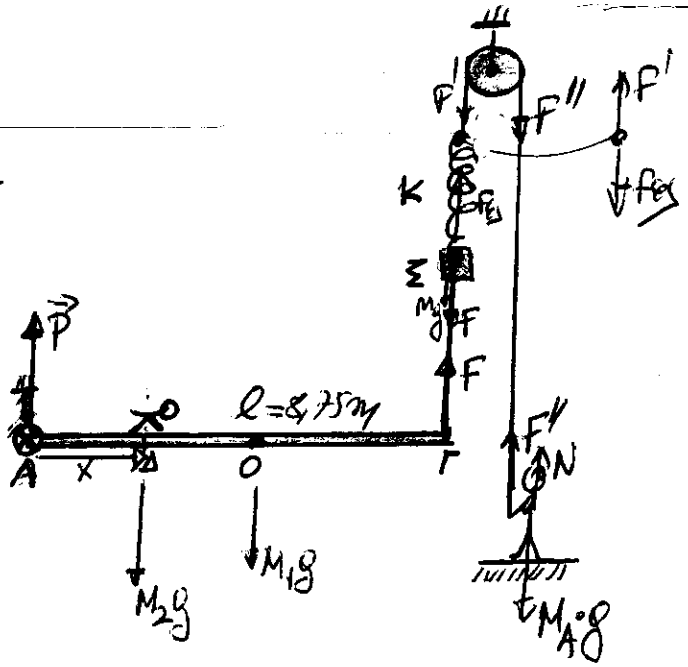
$v_{\text{σε,τροχ}} = \omega r \Rightarrow \omega = \frac{v_{\text{σε,τροχ}}}{r} = \frac{1,4\,m/s}{0,04\,m} \Rightarrow \omega = 35\,\frac{rad}{s}$

... και διαφορετικά ...

$a_\Sigma = r a_{\substack{\gamma\omega\nu \\ \text{τροχ}}} \Rightarrow a_{\substack{\gamma\omega\nu \\ \text{τροχ}}} = \frac{a_\Sigma}{r} \Rightarrow a_{\substack{\gamma\omega\nu \\ \text{τροχ}}} = \frac{2,8\,m/s^2}{0,04\,m} \Rightarrow a_{\substack{\gamma\omega\nu \\ \text{τροχ}}} = 70\,rad/s^2$

$\omega = a_{\substack{\gamma\omega\nu \\ \text{τροχ}}} \cdot t \Rightarrow \omega = 70 \cdot 0,5 \Rightarrow \omega = 35\,\frac{rad}{s}$

9.43



Α) Άφού η ταχύτητα (ΑΓ) ισορροπεί έχουμε $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow P+F=(M_1+M_2)g$

$\Rightarrow P+F=700N$ (1)

$\Sigma\tau_{(\Gamma)}=0 \Rightarrow P\,l = M_2 g(l-x)+M_1 g\frac{l}{2}$

$\Rightarrow Pl = M_2 gl - M_2 gx + M_1 g\frac{l}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow P = M_2 g - \frac{M_2 g}{l}x + \frac{M_1 g}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow P = 400 + \frac{300}{8} - \frac{400}{8,75}x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{P = 550 - \frac{400}{8,75}x \quad (SI)} \quad \checkmark$$

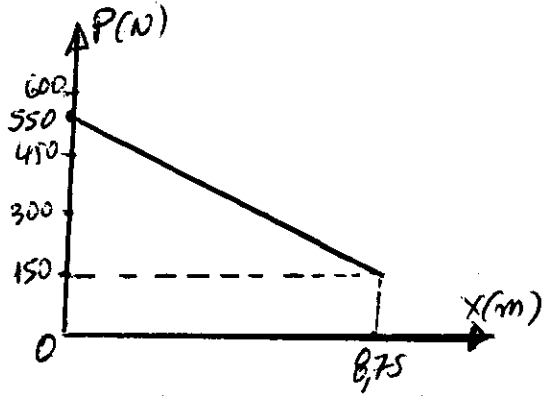
Για $x=0 \Rightarrow P=550N$

$x=8,75m \Rightarrow P=150N$

Β) $\overset{(1)\Rightarrow}{F+P=700} \Rightarrow$

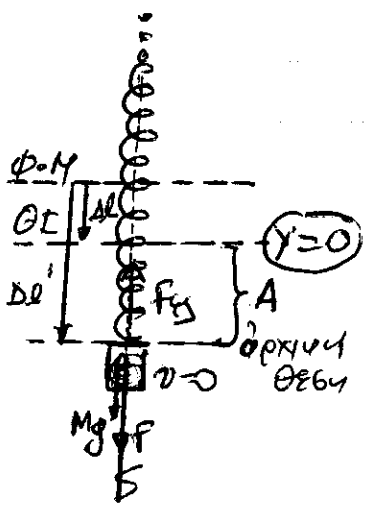
$F+550-\frac{400}{8,75}x=700 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{F=150+\frac{400}{8,75}x}$$



Όταν ισορροπεί το νήμα εσωτερικά (ε) δεν έχει ταχύτητα και θα αρχίσει ταλάντωση γύρω από τη θέση ισορροπίας ... γι' αυτό το Α ... όπου αρχίζει έμεινη ίση σε μέγεθος από τη θέση ισορροπίας

- Η θέση ισορροπίας του ταλαντωτή προσδιορίζεται από την σχέση $\Sigma F_y=0 \Rightarrow$ $F_{ελ}=mg \Rightarrow K\Delta l = Mg$ (2)
- Η θέση του σώματος (Σ) όπου αρχίζει η ταλάντωση προσδιορίζεται από την σχέση $\Sigma F_y=0 \Rightarrow F+Mg=K\Delta l'$ (3) Το πλάτος ταλάντωσης είναι



$A = \Delta\ell' - \Delta\ell \xrightarrow{(1),(2)} A = \frac{F+Mg}{k} - \frac{Mg}{k} \Rightarrow A = \frac{F}{k}$ (4)

$\Rightarrow A = \frac{150 + \frac{400}{8,75}x}{1000} \Rightarrow \boxed{A = 0,15 + \frac{94}{8,75}x}$ (SI) ✓

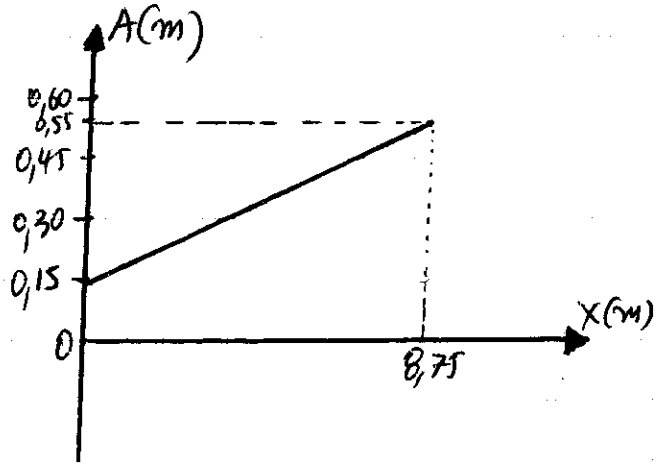
$x = 0 \Rightarrow A = 0,15\,m$

$x = 8,75 \Rightarrow A = 0,55\,m$

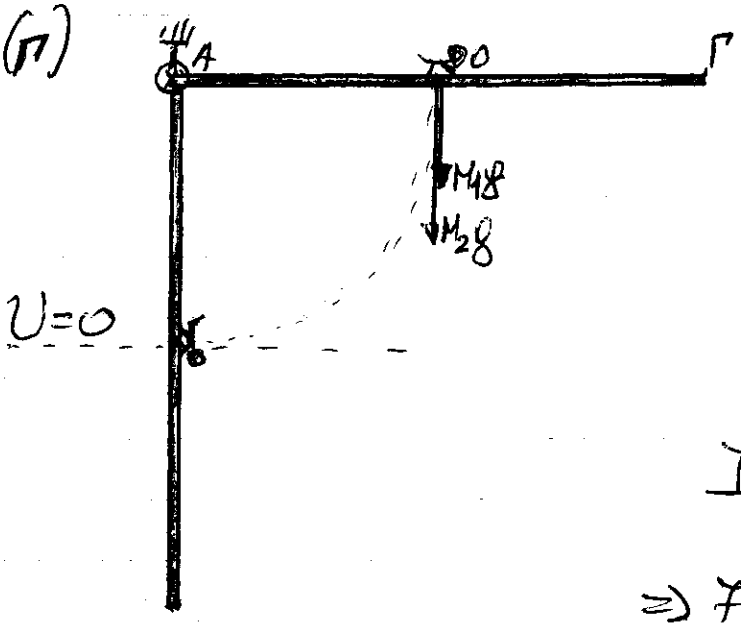
B.2)

Απ'όπι φαίνεται από τη σχέση (4) το πλάτος ταλάντωσης του (Σ) είναι ανάλογο με την δύναμη F ώστε η (Θ).

(... το F είναι ανεξάρτητο από το χρόνο ...)



(Γ)



Ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς το σημείο περιστροφής

$I = \frac{1}{3}M_1\ell^2 + M_2(\frac{\ell}{2})^2 \Rightarrow$

$I = \frac{1}{3}\cdot 30\ell^2 + 40\frac{\ell^2}{4} \Rightarrow I = 20\ell^2$ (SI)

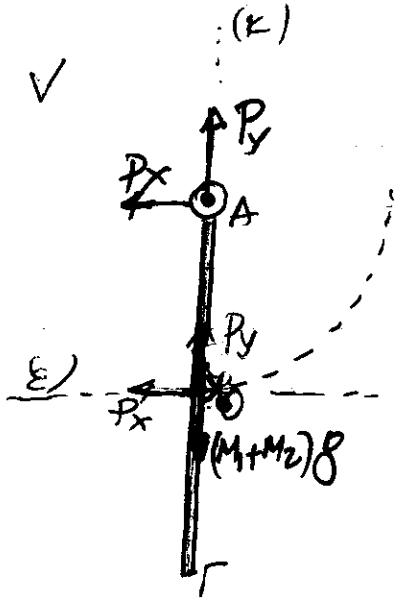
$\Sigma\tau_A = I\cdot\alpha_{\gamma\omega v} \Rightarrow M_0 g\frac{\ell}{2} = 20\cdot\ell^2\cdot\alpha_{\gamma\omega v}$

$\Rightarrow 70\cdot 10\frac{1}{2} = 20\cdot 8,75\cdot\alpha_{\gamma\omega v}$

$\Rightarrow 350 = 175\cdot\alpha_{\gamma\omega v} \Rightarrow \boxed{\alpha_{\gamma\omega v} = 2\ rad/s^2}$ ✓

Δ.1) $E_{\mu\eta\chi} = \sigma\tau\alpha\theta \Rightarrow M_0 g\frac{\ell}{2} = \frac{1}{2}I\omega^2 \Rightarrow M_0 g\cdot\ell = 20\ell^2\cdot\omega^2$

$\Rightarrow 700 = 20 \cdot 8{,}75 \cdot \omega^2 \Rightarrow \omega^2 = 4 \Rightarrow \boxed{\omega = 2\,rad/s}$ ✓



Δ.2) Για τον υπολογισμό της δύναμης της άρθρωσης χωρίζουμε την ράβδο στο σημείο που βρίσκεται το Κ.Μ του συστήματος (μέσον του τμήματος ΑΓ)

Η ράβδος είναι προφανώς κυκλική ακριβώς γ.

Για τη μεταφορική κίνηση θεωρούμε όλη τη μάζα συγκεντρωμένη στο ΚΜ άρα η κίνηση του ΚΜ είναι κυκλική η οποία δίνεται από τον "αξονικό" P_y και τον επικεντρικό P_x

Για τον αξονικό άξονα γράφουμε: $\Sigma \vec{F}_K = m\vec{a}_K \Rightarrow$

$\Rightarrow P_y - (M_1+M_2)g = (M_1+M_2)\omega^2 r \Rightarrow P_y = (M_1+M_2)g + (M_1+M_2)\omega^2 \frac{\ell}{2}$

$\Rightarrow P_y = 200 + 20 \cdot 4 \cdot \frac{8\ell}{2} \Rightarrow P_y = 1925\,N$

Για τον επικεντρικό άξονα έχουμε: $\Sigma \vec{F}_{\varepsilon\varphi} = m_{\alpha\kappa}\vec{a}_\varepsilon \Rightarrow$

$P_x = m_{\alpha\kappa}\frac{dv}{dt} = m_{\alpha\kappa}\frac{d(\omega r)}{dt} = m_{\alpha\kappa} r \frac{d\omega}{dt} = m_{\alpha\kappa} r \alpha_{\gamma\omega\nu}$

$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\Sigma \tau_\omega}{I} = 0$

$\Rightarrow P_x = 0$

άρα $P = P_y \Rightarrow P = 1925\,N$ ✓

Ε) ... Διατήρηση στροφορμής ...

$L_{αρχ} = L_{τελ} \Rightarrow I_{ολικ}\cdot\omega = I_{σαν}\,\omega' \Rightarrow 20\ell^2\omega = 10\ell^2\omega' \Rightarrow \omega' = 2\omega$

$\Rightarrow \boxed{\omega' = 4\,rad/s}$ ✓

Σ2). Από το αρχικό σχήμα του σελίδας (1) ...

$$F' = F_{ελ} = Mg + F \Rightarrow F' = Mg + 150 + \frac{400}{8,75}x \Rightarrow F' = 175 + \frac{400}{8,75}x$$

Υοοροθήκα προχθές) $\Sigma\tau = 0 \Rightarrow \dots F'' = f'$

Υοοροθήκα ανθρ που $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F'' + N - M_A g = 0 \Rightarrow N = M_A g - F''$

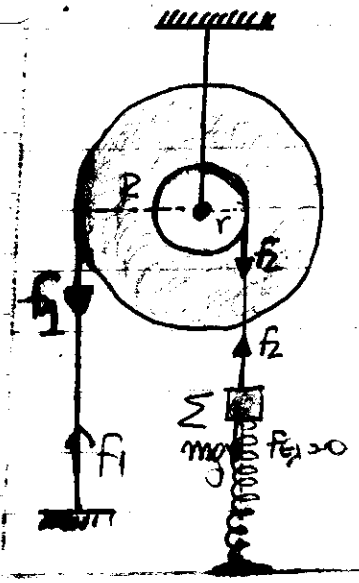
$$\Rightarrow N = 10M_A - 175 - \frac{400}{8,75}x$$ Σε κάθε περίπτωση πρέπει $N > 0$

$$\Rightarrow 10M_A > 175 + \frac{400}{8,75}x \Rightarrow M_A > 17,5 + \frac{40}{8,75}x \quad | \forall x \text{ όρος κοντά στο } x = \ell$$

$$\Rightarrow M_A > 17,5 + \frac{40}{8,75} \cdot 8,75 \Rightarrow \boxed{M_A > 57,5\ kg}$$

V

9.44



Α) Ισορροπία τροχαλίας

$\Sigma\tau = 0 \Rightarrow F_1 R = F_2 r \Rightarrow F_1 \cdot 10cm = F_2 \cdot 4cm$

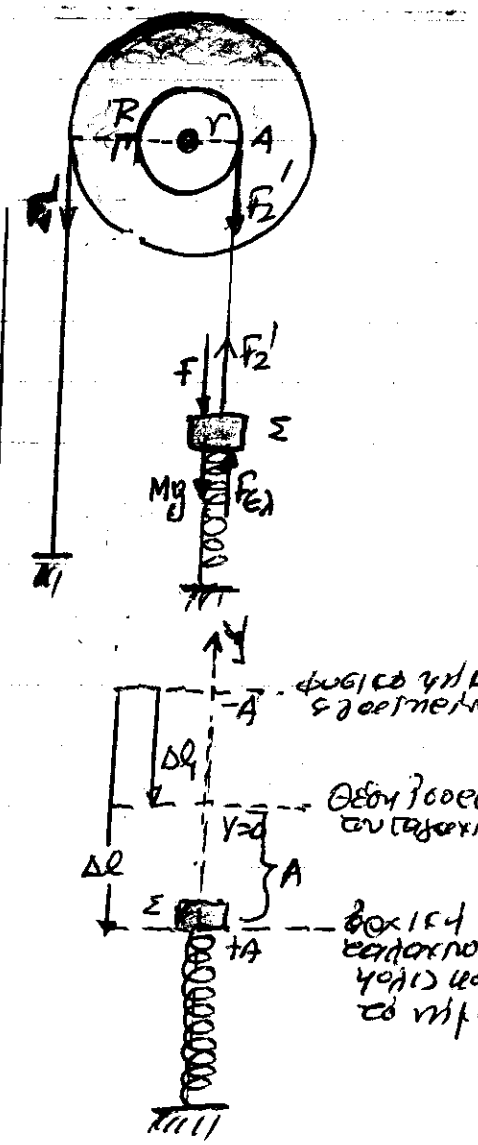
$\Rightarrow F_1 = 0{,}4 F_2$

Ισορροπία σώματος (Σ): $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_2 = mg \Rightarrow F_2 = 25\,N$

άρα $F_1 = 0{,}4 \cdot 25N \Rightarrow F_1 = 10N$

Νόμος Hooke: $F_1 = 200\Delta L \Rightarrow \Delta L = \frac{10}{200} m \Rightarrow \Delta L = 0{,}05m$

ή $\Delta L = 5cm$.



Β) Αφού το σώμα (Σ) ισορρόπησε νοητά $\Delta y = 20cm$, η τροχαλία στρέφεται νοητά $\Delta\varphi$ και περιφερειακά έχουμε $\Delta y = \Delta S_A = r\Delta\varphi$. Το ελατήριο επιμηκύνεται αλλά η περιβόλ. τείνει να διπλώνεται ⇒ επιμήκυνση νοητά $\Delta L' = \Delta S_1 = R\Delta\varphi$

άρα: $\frac{\Delta y}{\Delta L'} = \frac{r\Delta\varphi}{R\Delta\varphi} = \frac{r}{R} \Rightarrow \Delta L' = \frac{R\Delta y}{r} \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta L' = 50cm$. Τώρα το ελατήριο επιμηκύνεται κατά $\Delta L_1 = 55cm$ και ασκεί δύναμη $F_1' = 200\Delta L_1 = 200 \cdot 0{,}55 \Rightarrow F_1' = 110N$

Ισορροπία τροχαλίας: $\Sigma\tau = 0 \Rightarrow F_1' R = F_2' r$

$\Rightarrow F_2' = \frac{F_1' R}{r} \Rightarrow F_2' = \frac{110N \cdot 10cm}{4cm}$

Ισορροπία σώματος (Σ): $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow$

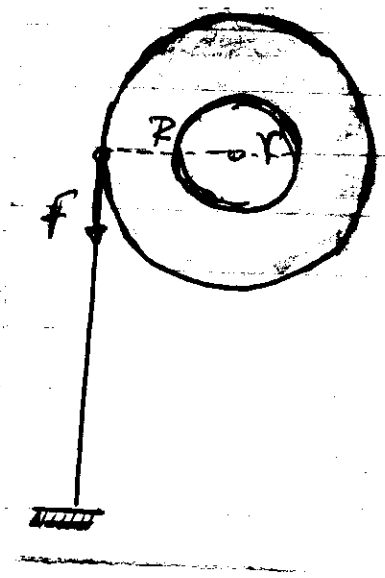
$F + mg = F_2' + F_{\varepsilon 1} \Rightarrow \boxed{F = 300N}$

Γ) Θέση ισορροπίας ταλάντωσης

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow mg + k\Delta l \Rightarrow 25 = 250\Delta l$

$\Rightarrow \Delta l = 0{,}10m$. Το πλάτος της ΑΑΤ είναι $A = 10cm$ και η αφετηρία

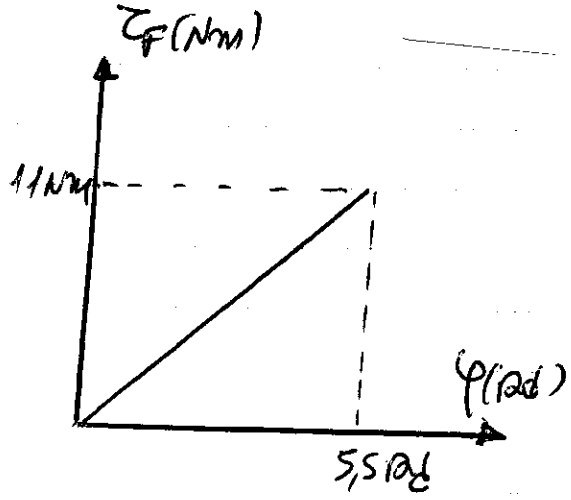
του σώματος (Σ) στην θέση ισορροπίας της πλάστιγγας
(...όπου έχει $v=0$) αφού η θέση ισορροπίας
$A = \Delta\ell - \Delta\ell_1 = \Delta y - \Delta\ell_1 \Rightarrow \boxed{A = 0{,}10\,m}$
$D = K = m\omega^2 \Rightarrow \omega = 10\ rad/s$
$y = A\eta\mu(\omega t + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow y = 0{,}1\eta\mu(10t + \frac{\pi}{2})$
$v = \omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow v = 1\sigma\upsilon\nu(10t + \frac{\pi}{2})$
$\frac{dK}{dt} = \Sigma F v = -Dy\,v = -Ky\,v \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -250 \cdot 0{,}1\eta\mu(10t+\pi/2) \cdot 1\sigma\upsilon\nu(10t+\pi/2) \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{dK}{dt} = -12{,}5\eta\mu(20t+\pi)$
άρα $\left(\frac{dK}{dt}\right)_{max} = 12{,}5\,J/s$



Δ) Μόλις ισορροπεί το σώμα η δύναμη που δέχεται το ελατήριο στην τελική θέση είναι $F = F_1' = 110\,N$
$\Sigma\tau = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow F \cdot R = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega} = \frac{FR}{I}$
$\Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{110N \cdot 0{,}10m}{0{,}022\,kgm^2} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = 550\ rad/s^2$

Ε) $W_F = U_{\text{ελαστικής τελική}} - U_{\text{ελαστικής αρχική}} \Rightarrow$ ....
$\Rightarrow W_F = \frac{1}{2}200\Delta L_{\tau\epsilon\lambda}^2 - \frac{1}{2}200\Delta L_{\alpha\rho\chi}^2 \Rightarrow W_F = \frac{1}{2}200\,0{,}55^2$
$\Rightarrow \boxed{W_F = 30{,}25\,J}$ .... και διαφορετικά ...

$\left.\begin{array}{l} \tau_F = F \cdot R = 200\Delta L \cdot R = 20\Delta L \\ \Delta L = \Delta S_{\pi\lambda\epsilon} = R\varphi = 0{,}1\varphi \end{array}\right\} \tau_F = 20 \cdot 0{,}1\varphi \Rightarrow \boxed{\tau_F = 2\varphi\ (SI)}$
Αρχικά $\varphi = \frac{\Delta S}{R} = \frac{\Delta y}{R} = \frac{0{,}55}{0{,}1} = 5{,}5\,rad$
Αν κάνουμε την γραφική παράσταση της $\tau_F = 2\varphi$



$W_F = Εμβαδόν(\tau_F, \varphi) \Rightarrow$

$W_F = \frac{1}{2} \cdot 5,5 \cdot 11 \Rightarrow \boxed{W_F = 30,25 J}$

3ο) $\Delta K = W_F \Rightarrow K_{τελ} - K_{αρχ}^{0} = W_F$

$\Rightarrow \frac{1}{2} I\omega^2 = W_F \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 0,2 \omega^2 = 30,25$

$\Rightarrow \boxed{\omega = 55 rad/s}$

Άρα ένα σημείο της περιφέρειάς έχει ταχύτητα

$v = \omega R \Rightarrow \boxed{v = 5,5 m/s}$

4) $\frac{dK}{dt} = -\tau_F \omega_1 = -\tau_F \omega_1 \quad (1)$

$W_F = \Delta K = \frac{1}{2} 200 \Delta L_1^2 - \frac{1}{2} 200 \Delta L_2'^2 = \frac{1}{2} I \omega_1^2$

$\Rightarrow 200(\Delta L_1^2 - \Delta L_2'^2) = 0,02 \omega_1^2 \Rightarrow 200(55^2 - \Delta L_2'^2) = 0,02 \cdot 33^2$

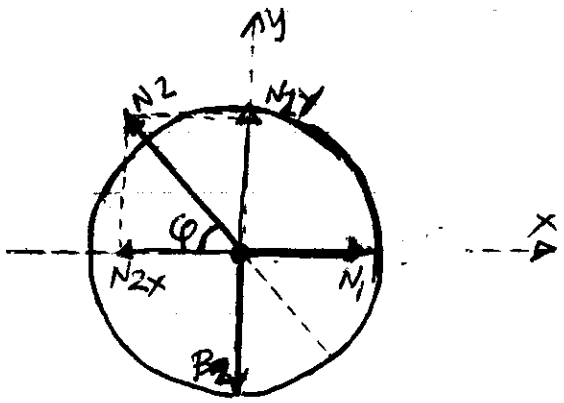
$\Rightarrow \Delta L_2' = 0,44 m$

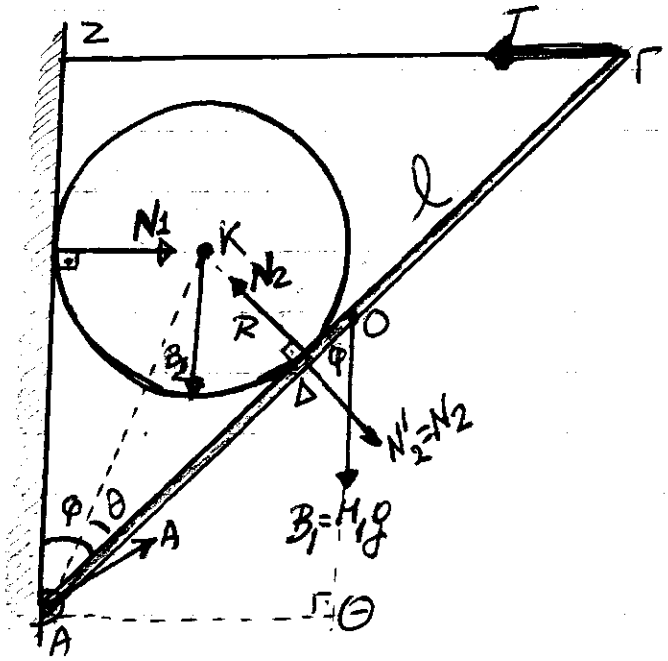
$F_{ελατ} = 200 \Delta L_2' = 88 N$

$\tau_F = FR = 88 \cdot 0,1 = 8,8 N$

$(1) \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -\tau_F \omega_1 \Rightarrow \boxed{\frac{dK}{dt} = 290,4 J/s}$

9.45





Α) Ισορροπία κυλίνδρου

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_1 = N_{2x} \Rightarrow N_1 = N_2 \sigma\upsilon\nu\varphi$ } $N_1 = N_2 \sigma\upsilon\nu\varphi$ }

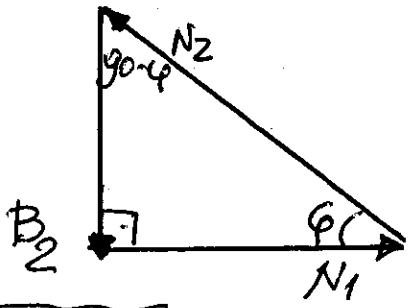
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_{2y} = B_2 \Rightarrow N_2 \eta\mu\varphi = m_2 g$ } $m_2 g = N_2 \eta\mu\varphi$ } $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{N_1}{m_2 g} = \frac{\sigma\upsilon\nu\varphi}{\eta\mu\varphi}$ ή $N_1 = \frac{N_2 g}{\varepsilon\varphi\varphi} \Rightarrow N_1 = \frac{10\sqrt{3}\,kg \cdot 10\,m/s^2}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \boxed{N_1 = 100\,N}$ $N_2 = \frac{N_2 g}{\eta\mu\varphi} \Rightarrow N_2 = \frac{10\sqrt{3}\,kg\,10\,m/s^2}{\sqrt{3}/2}$

$\Rightarrow \boxed{N_2 = 200\,N}$

πολύ πιο απλά ... με το δυναμοπολύγωνο ...



$\frac{N_1}{\eta\mu(90-\varphi)} = \frac{N_2}{\eta\mu 90} = \frac{B_2}{\eta\mu\varphi} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{N_1}{\sigma\upsilon\nu\varphi} = \frac{N_2}{1} = \frac{N_2 g}{\eta\mu\varphi}$

$\boxed{N_2 = \frac{N_2 g}{\eta\mu\varphi}}$ Και $N_1 = N_2 g \frac{\sigma\upsilon\nu\varphi}{\eta\mu\varphi} \Rightarrow \boxed{N_1 = \frac{N_2 g}{\varepsilon\varphi\varphi}}$

Β) Από την ισορροπία του σφαίρας έχουμε
$\Sigma\tau(A)=0 \Rightarrow \tau_T+\tau_{B_1}+\tau_{N_2'}+\tau_A=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow T\cdot(AZ)-M_1g(A\Theta)-N_2'\cdot(A\Delta)=0 \quad (1)$

$AZ=\sigma\upsilon\nu\varphi=2\frac{1}{2}=1m$

$A\Theta=\frac{\sigma}{2}\eta\mu\varphi=\frac{2}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}m$

$\varepsilon\varphi\theta=\frac{K\Delta}{A\Delta} \Rightarrow A\Delta=\frac{K\Delta}{\varepsilon\varphi\theta}=\frac{R}{\varepsilon\varphi\varphi/2} \Rightarrow (A\Delta)=\frac{0,2}{\varepsilon\varphi 30}=\frac{0,2}{\sqrt{3}/3}$

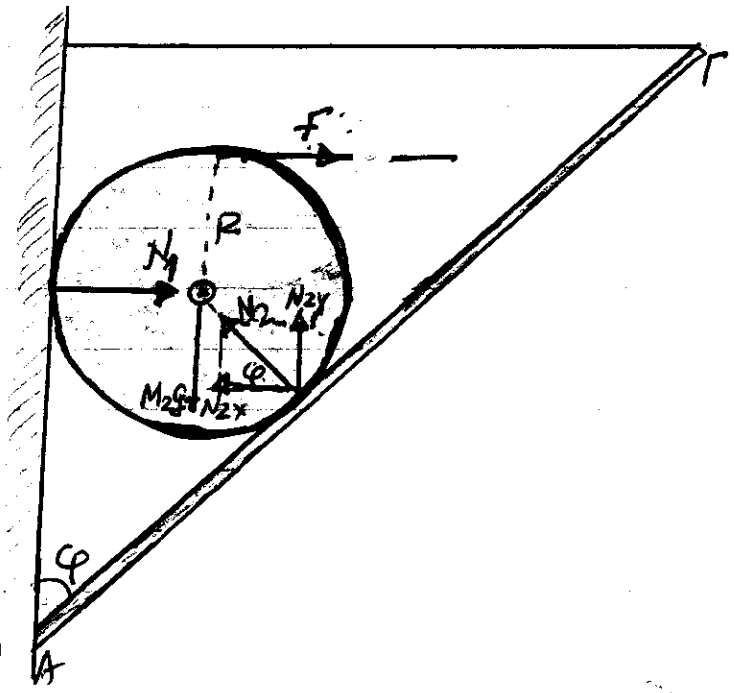
$\Rightarrow (A\Delta)=\frac{0,6}{\sqrt{3}}=\frac{0,6\sqrt{3}}{3} \Rightarrow (A\Delta)=0,2\sqrt{3}\,m$

$(1) \overset{\Sigma F}{\Rightarrow} T\cdot 1=M_1\cdot 10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+200\cdot 0,2\sqrt{3} \Rightarrow T=5M_1\sqrt{3}+40\sqrt{3}$

Προφανώς πρέπει $T\le T_{\theta\varepsilon} \Rightarrow 5M_1\sqrt{3}+40\sqrt{3}\le 80\sqrt{3}$
$\Rightarrow 5M_1\sqrt{3}\le 40\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{M_1\le 8kg}$

Γ) Αφού ο κύλινδρος δεν επιταχύνεται
$\Sigma F_x=0 \Rightarrow N_{2x}=N_1+F$
$\Rightarrow N_2\sigma\upsilon\nu\varphi=N_1+F \quad (2)$
$\Sigma F_y=0 \Rightarrow N_{2y}=M_2g$
$\Rightarrow N_2\eta\mu\varphi=M_2g \Rightarrow$
$\Rightarrow N_2=\frac{M_2g}{\eta\mu\varphi} \Rightarrow N_2=200N$

$(3) \Rightarrow N_1=N_2\sigma\upsilon\nu\varphi-F$



Για να μη χαθεί η επαφή τροχού πρέπει $N_1\ge 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow N_2\sigma\upsilon\nu\varphi-F\ge 0 \Rightarrow -F\ge -N_2\sigma\upsilon\nu\varphi$ ή $F\le N_2\sigma\upsilon\nu\varphi$
$\Rightarrow F\le 200\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{F\le 100N}$

Δ) Με δύναμη $F=40N$ ο μολύβδος αποκτά γύρω στροφικού κέντρου. Εξαιτίας της ροπής που δημιουργεί η F.

$$\frac{dL}{dt}=\Sigma\tau=\tau_F=FR=40N\cdot 0,2m \Rightarrow \frac{dL}{dt}=8\ (SI)=\text{σταθ}$$

$$\Rightarrow \frac{L-L_0}{t-t_0}=8\ (SI) \xrightarrow[t_0=0]{L_0=0} L=8t \xrightarrow{t=4s} \boxed{L=32kg\frac{m^2}{s}}$$

$$K=\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}I\left(\frac{L}{I}\right)^2 \Rightarrow K=\frac{L^2}{2I} \Rightarrow K=\frac{32^2}{2\cdot 4}J \Rightarrow$$

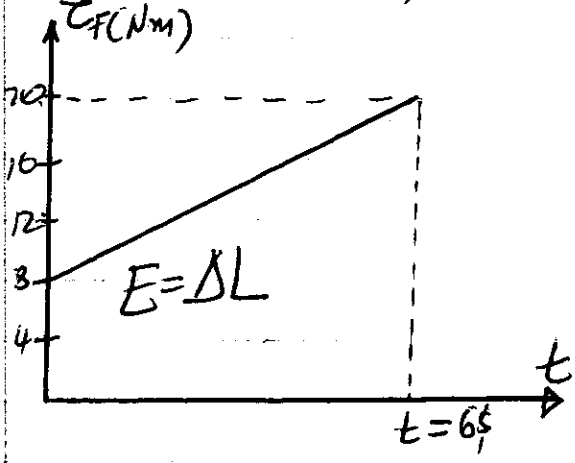
$$\Rightarrow \boxed{K=128J}$$

Ε) $F=F_0+10t \Rightarrow F=40+10t\ (SI)$

Ο μολύβδος αποκτά στροφική έως ότου ενώ βρίσκεται στο τοίχο δηλ. όσο $F\le 100N$

$$\Rightarrow 40+10t\le 100 \Rightarrow 10t\le 60 \Rightarrow \boxed{t\le 6s}$$

$$\tau_F=FR=(40+10t)0,2 \Rightarrow \tau_F=8+2t\ (SI) \qquad t\le 6s$$



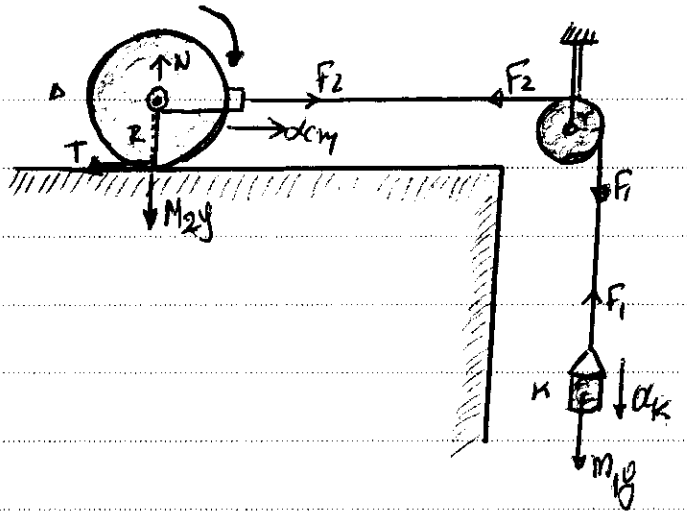
Το εμβαδόν δίνει τη μεταβολή της στροφορμής (ΔL)

$$\Delta L=E=\frac{8+20}{2}\cdot 6 \Rightarrow \Delta L=84kg\frac{m^2}{s}$$

$$\Rightarrow L-L_0=84 \Rightarrow \boxed{L=84kg\frac{m^2}{s}}$$

$$K=\frac{L^2}{2I} \Rightarrow K=\frac{84^2}{2\cdot 0,4} \rightsquigarrow \boxed{K=8820J}$$

9.46



Τροχαλία : $M=1kg$, $r=0,05m$, $I=\frac{1}{2}Mr^2$

Δίσκος : $m_2=2kg$, $R=0,10m$, $I_2=\frac{1}{2}m_2R^2$

Κάδος : $m_1=1,5kg$

Α.1) $a_K=a_{\epsilon\varphi\alpha\pi}=r\underset{\text{τροχ}}{\alpha_{\gamma\omega\nu}}=a_{cm}=R\underset{\text{δίσκου}}{\alpha'_{\gamma\omega\nu}}$

$K:\ \Sigma F_y=m_1a \Rightarrow m_1g-F_1=m_1a_K \quad (1)$

Τροχαλία: $\Sigma\tau=I\underset{\text{τροχ}}{\alpha_{\gamma\omega\nu}} \Rightarrow F_1r-F_2r=\frac{1}{2}Mr^2\frac{a_K}{r} \Rightarrow F_1-F_2=\frac{1}{2}Ma_K \quad (2)$

Δίσκος: $\Sigma F_x=m_2a_{cm} \Rightarrow F_2-T=m_2a_K \quad (3)$

$\Sigma\tau=I_2\underset{\text{δίσκ}}{\alpha'_{\gamma\omega\nu}} \Rightarrow T\cdot R=\frac{1}{2}m_2R^2\frac{a_{cm}}{R} \Rightarrow T=\frac{1}{2}m_2a_K \quad (4)$

$(1)+(2)+(3)+(4) \Rightarrow m_1g=\left(m_1+\frac{M}{2}+m_2+\frac{m_2}{2}\right)a_K \Rightarrow 1,5\cdot10=\left(1,5+\frac{1}{2}+2+\frac{2}{2}\right)a_K$

$\Rightarrow 15=5a_K \Rightarrow a_K=3\frac{m}{s^2}$ και $a_{cm}=3m/s^2$

Α.2) Τροχαλία: $\alpha_{\gamma\omega\nu}=\frac{a_K}{r}=\frac{3m/s^2}{0,05m} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu}=60\,rad/s^2$

Δίσκος: $\alpha'_{\gamma\omega\nu}=\frac{a_{cm}}{R}=\frac{3m/s^2}{0,1} \Rightarrow \alpha'_{\gamma\omega\nu}=30\frac{rad}{s^2}$

Β-1) $\omega=\alpha'_{\gamma\omega\nu}t \Rightarrow 18=30t \Rightarrow t=0,6s$

$H=\frac{1}{2}a_Kt^2=\frac{1}{2}3\cdot0,6^2=\frac{1}{2}\cdot3\cdot0,36 \Rightarrow H=0,54m$

Β-2) $\underset{\text{τροχ}}{\omega'}=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t=60\frac{rad}{s^2}\cdot0,6s \Rightarrow \underset{\varphi}{\omega'}=36\frac{rad}{s}$

Γ) $(4) \Rightarrow T=\frac{1}{2}m_2a_K=\frac{1}{2}\cdot2\cdot3 \Rightarrow T=3N$

Δ) $\Sigma\tau_{\text{τροχαλία}}=I\alpha_{\gamma\omega\nu}=\frac{1}{2}Mr^2\alpha_{\gamma\omega\nu}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot(0,05)^2\cdot60 \Rightarrow \Sigma\tau_{\text{τροχαλία}}=0,075Nm$

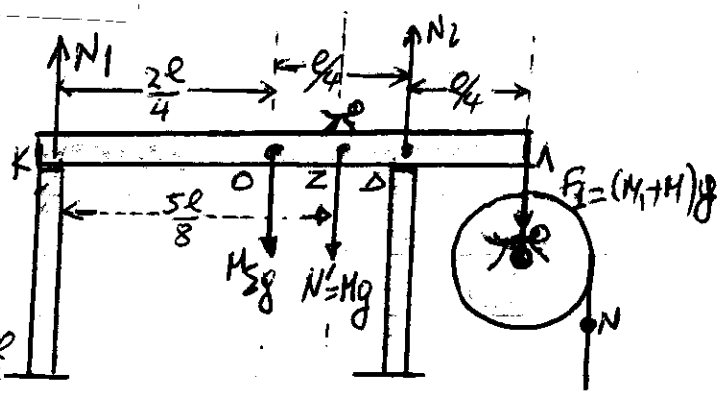
Ε) Α.1) $\cdots\ m_1g=\left(m_1+\frac{M}{2}+1,5m_2\right)a_K \Rightarrow a_K=\frac{m_1g}{m_1+0,5M+1,5m_2}$, $T=\frac{1}{2}m_2a_K \Rightarrow$

$\Rightarrow T_2=\frac{1}{2}m_2\frac{m_1g}{m_1+0,5M+1,5m_2} \Rightarrow T_2=\frac{0,5m_1m_2g}{m_1+0,5M+1,5m_2}$

$T\le\mu N \Rightarrow \frac{0,5m_1m_2g}{m_1+0,5M+1,5m_2}\le\mu m_2g \Rightarrow \frac{0,5m_1\cdot\cancel{2}}{m_1+0,5\cdot1+1,5\cdot2}\le0,3\cdot\cancel{2} \Rightarrow m_1\le5,25kg$

9.47

A) Αφού η σανίδα ισορροπεί θα ισχύει $\Sigma F_y = 0$ και $\Sigma \tau_{(\Delta)} = 0$



$\Rightarrow N_1(K\Delta) + F_1(\Lambda\Delta) = M_\Sigma g(O\Delta) + Mg(Z\Delta)$

$\Rightarrow N_1 \frac{3\ell}{4} + (M_1+M)g\frac{\ell}{4} = M_\Sigma g \frac{\ell}{4} + Mg\frac{5\ell}{4}$

$\Rightarrow 3N_1 + (M_1+M)g = M_\Sigma g + 0{,}5Mg \Rightarrow 3N_1 = M_\Sigma g + 0{,}5Mg - M_1 g - Mg$

$\Rightarrow 3N_1 = M_\Sigma g - M_1 g - 0{,}5Mg \Rightarrow N_1 = \frac{M_\Sigma g - M_1 g - 0{,}5Mg}{3}$

Προφανώς για να μην ανατρέπεται η σανίδα $N_1 > 0$

$\Rightarrow M_\Sigma g - M_1 g - 0{,}5Mg > 0 \Rightarrow M_\Sigma > M_1 + 0{,}5M \Rightarrow M_\Sigma > 10kg + 0{,}5 \cdot 45kg$

$\Rightarrow M_\Sigma > 32{,}5kg$

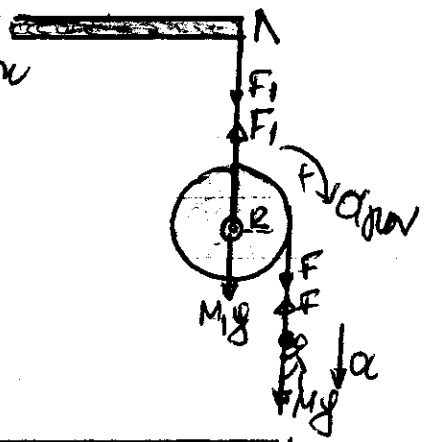
Τώρα αν παρατηρήσουμε $\Sigma\tau_{(K)} > 0$, θα δούμε ότι $N_2 > 0$ για οποιαδήποτε τιμή της μάζας M_Σ.

Άρα η ανατροπή μπορεί να γίνει μόνο γύρω από το Δ με σχοινί που περνάει από το K για να μην γίνει αυτό πρέπει $\boxed{M_\Sigma > 32{,}5kg}$ ✓

B) Αριστερά (A): $\Sigma F_y = Ma \Rightarrow Mg - F = Ma$ (1)

Τροχαλία: $\Sigma\tau = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow FR - |\tau_T| = I\alpha_{\gamma\omega\nu}$

$\Rightarrow FR - |\tau_T| = \frac{1}{2}M_1R^2\frac{a}{R} \Rightarrow F - \frac{|\tau_T|}{R} = \frac{1}{2}M_1 a$ (2)



(1)+(2) $\Rightarrow Mg - \frac{|\tau_T|}{R} = \left(M + \frac{M_1}{2}\right)a$

$\Rightarrow 45 \cdot 10 - \frac{5}{0{,}1} = \left(45 + \frac{10}{2}\right)a$

$\Rightarrow a = 8\,m/s^2$ και $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{a}{R} \Rightarrow \boxed{\alpha_{\gamma\omega\nu} = 80\,rad/s^2}$ ✓

(Η σχέση $a=R\omega_{\text{στρ}}$ ... δείχνει ξεκάθαρα - διαισθητικά)

Γ) $(1) \Rightarrow F = M(g-a) = 45kg \cdot 2 m/s^2 \Rightarrow F = 90N$

Επειδή η τροχαλία δεν περιστρέφεται $\Sigma\tau_{(y)} = 0$

$\Rightarrow F_1 - F - M_1 g = 0 \Rightarrow F_1 = 90N + 10kg \cdot 10 m/s^2 \Rightarrow \underline{F_1 = 190N}$

Για να ισορροπεί η ράβδος που την αντιπροσωπεύει (συνιστάται να την χαράξετε στην επαφή στο Κ ... $N_1 > 0$) πρέπει να ισχύει $\Sigma\tau = 0$ ως προς οποιοδήποτε σημείο, άρα μπορεί να είναι και το (Δ):

$\Sigma\tau_{(\Delta)} = 0 \Rightarrow N_1 \frac{3\ell}{4} + F_1 \frac{\ell}{4} = M_\Sigma g \frac{\ell}{4} + Mg \frac{95\ell}{4}$

$\Rightarrow 3N_1 + F_1 = M_\Sigma g + 95Mg \Rightarrow \underline{3N_1 + 190 = 10M_\Sigma + 225}$

$\Rightarrow M_\Sigma = \frac{3N_1 - 35}{10} > 32{,}5 \Rightarrow 3N_1 - 35 > 325$

$\Rightarrow 3N_1 > 360 \Rightarrow N_1 > 120N$ θετική και αποφασιστική

η σανίδα δεν ανατρέπεται

$\hookrightarrow 3N_1 = 10M_\Sigma + 35 \Rightarrow N_1 > 0 \quad \forall M_\Sigma > 0$

Δ) Η τροχαλία έχει το σημαντικό να φθάσει στο δάπεδο επιτρέπει στροφική επιταχυνόμενη κίνηση και στη συνέχεια δημιουργεί στροφική επιβραδυνόμενη κίνηση. Μέχρι το σημείο να φθάσει στο έδαφος απαιτείται χρόνος $S = \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow 16 = \frac{1}{2} 8 t^2$

$\Rightarrow \boxed{t_1 = 2s}$ και έως εκείνο τη περιφέρεια της τροχαλίας διαγράφει αριθμό όσο το μήκος μιας

που ξεπερνάει $S=16m$

1η φάση κίνησης του βλήματος ... μέχρι το σημείο που αφήνει το σώμα.

$\Delta K_{\text{βλήμα}} = W_{\Sigma F} \Rightarrow K-0 = W_F + W_T \Rightarrow K = F \cdot R\Delta\varphi - |T|\Delta\varphi$

$\Rightarrow K = (F \cdot R - |T|)\cdot \frac{S}{R} \Rightarrow K = (90N \cdot 0,1m - 5N/m)\cdot \frac{S}{0,1}$

$\Rightarrow \underline{K = 40S}$ (SI) για $\underline{0 \le S \le 16m}$

Για $S=16m \Rightarrow K_1 = 640J$

2η φάση κίνησης του βλήματος ... έως ακραία θέση

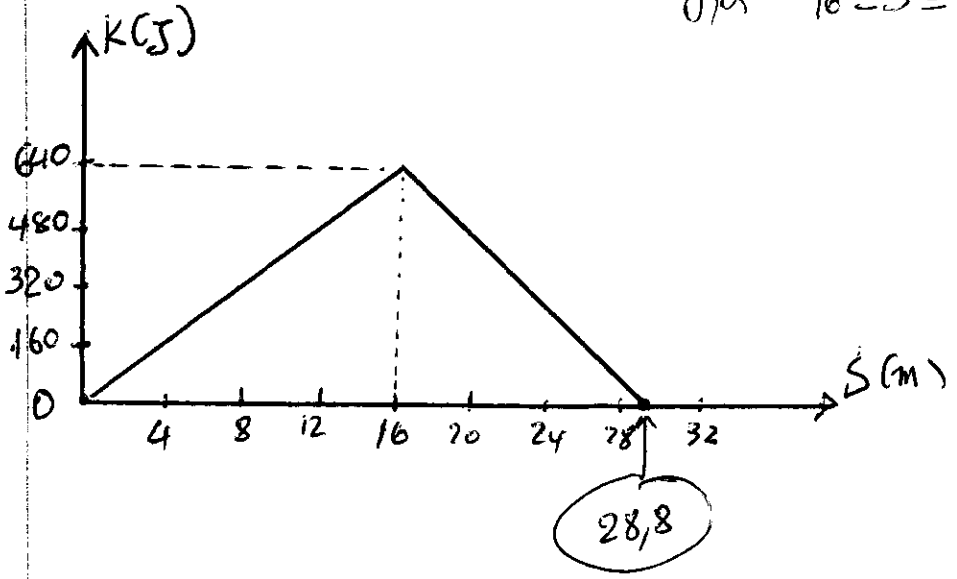
$\Delta K_{\text{βλήμα}} = W_{\Sigma F} \Rightarrow K - K_1 = W_T \Rightarrow K - K_1 = -|T|\Delta\varphi$

$\Rightarrow K - K_1 = -|T| \cdot \frac{\Delta S}{R} \overset{S_1}{\Rightarrow} K - 640 = -5\frac{S-16}{0,1}$

$\Rightarrow \underline{K = 640 - 50(S-16)}$ (SI) ✓

Στο τέλος $K=0 \Rightarrow S-16 = 12,8 \Rightarrow \underline{S = 28,8m}$

δηλ $16 \le S \le 28,8m$



Ε) 1η φάση κίνησης του τροχαλίας

$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau = I \cdot \alpha_{\gamma\omega} = \frac{1}{2} M R^2 \alpha_{\gamma\omega} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 0{,}1^2 \cdot 80 = 4\ kg\,m^2/s$

ή

$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau = F \cdot R - |T_E| = 90 \cdot 0{,}1 - 5 = 4\ kg\,m^2/s^2 = \sigma\tau\alpha\theta$

$\Rightarrow \frac{\Delta L}{\Delta t} = 4 \Rightarrow \frac{L - L_0}{t - t_0} = 4 \xrightarrow[t_0 = 0]{L_0 = 0} \boxed{L = 4t}$ (SI)

για $0 \le t \le 2\,s$

για $t = t_1 = 2\,s \Rightarrow L = 8\ kg\,m^2/s$

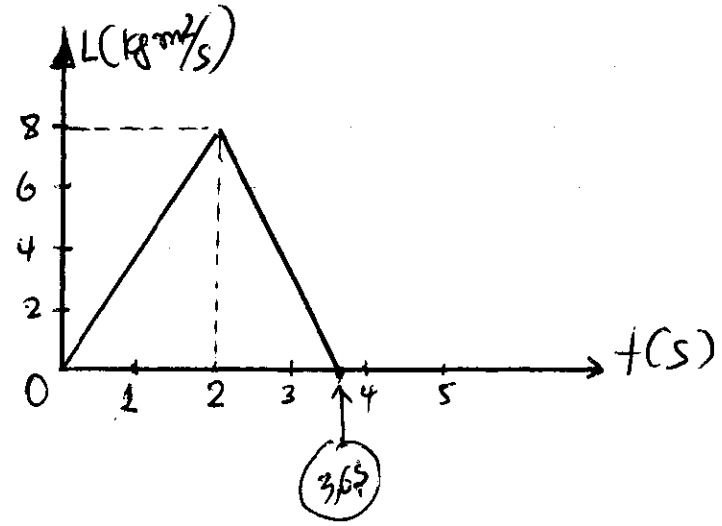
2η φάση κίνησης του τροχαλίου

$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau = -|T| = -5\ kg\,m^2/s^2 = \sigma\tau\alpha\theta$

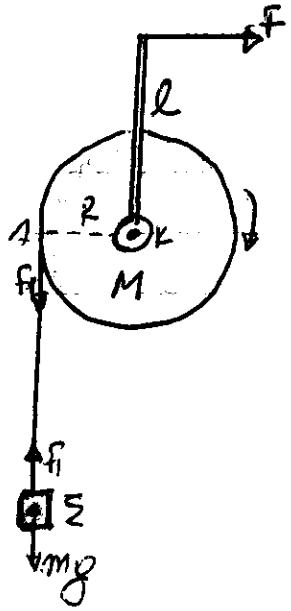
$\Rightarrow \frac{L - L_1}{t - t_1} = -5 \Rightarrow L - L_1 = -5(t - t_1) \Rightarrow \boxed{L = 8 - 5(t-2)}$ (SI)

Στο τέλος $L = 0 \Rightarrow t - 2 = 1{,}6 \Rightarrow t = 3{,}6\,s$ δηλ

$2 \le t \le 3{,}6\,s$



9.48



α) $P_{προσ} = \frac{dW_F}{dt} = \frac{\tau_F d\varphi}{dt} = \tau_F \omega = F l \omega$

$P_{απωλ} = \frac{|dW_T|}{dt} = \frac{|\tau_T| d\varphi}{dt} = |\tau_T| \omega$ (1)

$P_{απωλ} = \frac{18}{100} P_{προσ} = \frac{18}{100} 500W \Rightarrow P_{απωλ} = 90W$

Υπολογισμός παντού $\Rightarrow$

$v_\Sigma = v_{σημείου\,A} = \omega R \Rightarrow \omega = \frac{v_\Sigma}{R} \Rightarrow \omega = 5 rad/s$

$\hookrightarrow a_\Sigma = R \alpha_{γων}$

(1) $P_{απωλ} = |\tau_T| \omega \Rightarrow |\tau_T| = \frac{P_{απωλ}}{\omega} \Rightarrow |\tau_T| = \frac{90W}{5 rad/s} \Rightarrow |\tau_T| = 18 Nm$

$\Rightarrow \boxed{\tau_T = -18 Nm}$

β) $P_{προσ} = F l \omega \Rightarrow F = \frac{P_{προσ}}{l\omega} = \frac{500W}{0,5m \cdot 5 rad/s} \Rightarrow \boxed{F = 200N}$

γ) Κύλινδρος: $\Sigma\tau = I \alpha_{γων} \Rightarrow Fl - f_1 R - |\tau_T| = \frac{1}{2} MR^2 \frac{a_\Sigma}{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow F\frac{l}{R} - f_1 - \frac{|\tau_T|}{R} = \frac{1}{2} M a_\Sigma$ (2)

Σώμα (Σ): $\Sigma F_y = m a_\Sigma \Rightarrow f_1 - mg = m a_\Sigma$ (3)

(2)+(3) $\Rightarrow F\frac{l}{R} - mg\frac{|\tau_T|}{R} = (m + \frac{M}{2}) a_\Sigma \xrightarrow{(S.I.)} \ldots$

$a_\Sigma = 0,2 m/s^2$ και $\alpha_{γων} = \frac{a_\Sigma}{R} \Rightarrow \boxed{\alpha_{γων} = 1 \frac{rad}{s^2}}$

δ-1) $\left(\frac{dL}{dt}\right)_{εξ} = \Sigma\tau_{εξωτ} = Fl - |\tau_T| - mgR = 200 \cdot 0,5 - 18 - 40 \cdot 10 \cdot 0,2$

$\Rightarrow \left(\frac{dL}{dt}\right)_{εξ} = 2 kg m^2/s^2 = σταθ \Rightarrow \frac{L - L_0}{t - t_0} = 2 \xrightarrow[t_0 = 0]{L_0 = 0} L = 2t$ (S.I.)

$v = a_\Sigma t_1 \Rightarrow 1 = 0,2 t_1 \Rightarrow t_1 = 5s$ άρα $L = 2t \Rightarrow \boxed{L = 10 kg m^2/s}$

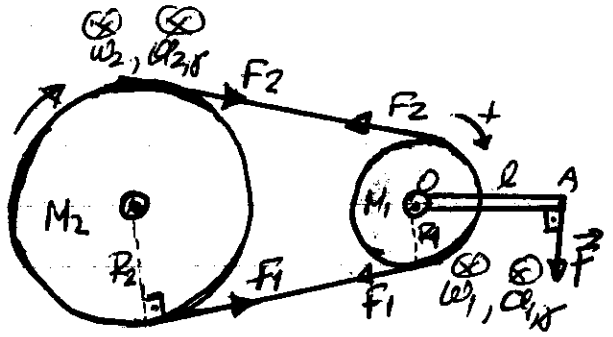
δ-2) (3) $\ldots f_1 = m(g + a_\Sigma) \Rightarrow f_1 = 40kg \cdot (10 m/s^2 + 0,2 m/s^2) \Rightarrow \boxed{f_1 = 408N}$

Για τον κύλινδρο του βαρούλκου που εκτελεί δροφητική κίνηση

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma\tau \cdot \omega = [Fl - F_1 R - I_\varphi \ddot{\varphi}]\omega \xrightarrow{\Sigma F} \dots \frac{dK}{dt} = 2T_1$$

9.49

α) Ο τροχός έχει περιστροφική κίνηση, άρα
$v = \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$
$\Rightarrow \omega_1 R_1 = \omega_2 2R_1$
$\Rightarrow \omega_1 = 2\omega_2$ και $\alpha_{1,\gamma\omega} = 2\alpha_{2,\gamma\omega}$



$I_1 = \frac{1}{2} M_1 R_1^2 = \frac{1}{2} 8\,kg\,(0{,}1m)^2 \Rightarrow I_1 = 25\cdot 10^{-2}\,kgm^2$
$I_2 = \frac{1}{2} M_2 R_2^2 = \frac{1}{2} 20\,kg\,(0{,}2m)^2 \Rightarrow I_2 = 40\cdot 10^{-2}\,kgm^2$
Τη χρονική στιγμή t_1 ο καθένας δίσκος έχει κινητική ενέργεια.
$K_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2$ και $K_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2$

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{I_1}{I_2}\cdot\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 = \frac{2{,}5\cdot 10^{-2}}{40\cdot 10^{-2}}\cdot\left(\frac{2\omega_2}{\omega_2}\right)^2 \Rightarrow \frac{K_1}{K_2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{K_2 = 4K_1} \quad (1)$$

Η ενέργεια που προσφέρθηκε στο σύστημα είναι
$E = K_1 + K_2 \Rightarrow E = K_1 + 4K_1 = 5K_1 \Rightarrow K_1 = \frac{E}{5} = \frac{625J}{5}$

$\Rightarrow \boxed{K_1 = 125J}$ και $\boxed{K_2 = 500J}$

β) Εφαρμόζουμε το 2ο Θεμελιώδες Νόμο του Νεύτωνα για κάθε δίσκο

(M_1, R_1): $\Sigma\tau = I_1 \alpha_{1\gamma} \Rightarrow Fl + F_1 R_1 - F_2 R_1 = I_1 \alpha_{1\gamma}$
(M_2, R_2): $\Sigma\tau = I_2 \alpha_{2\gamma} \Rightarrow F_2 R_2 - F_1 R_2 = I_2 \alpha_{2\gamma}$
$\Big\}$ $\alpha_{1\gamma} = 2\alpha_{2\gamma}$

$\times R_2$ $\quad Fl R_2 + F_1 R_1 R_2 - F_2 R_1 R_2 = I_1 R_2 2\cdot\alpha_{2\gamma}$
$\times R_1$ $\quad F_2 R_2 R_1 - F_1 R_2 R_1 = I_2 R_1 \alpha_{2\gamma}$
$\Big\}+$

$$Fl R_2 = (2I_1 R_2 + I_2 R_1)\alpha_{2\gamma} \Rightarrow \alpha_{2\gamma} = \frac{Fl R_2}{2I_1 R_2 + I_2 R_1}$$

S.I →

$$\alpha_{2\gamma} = \frac{12,5 \cdot 0,2 \cdot 0,2}{2 \cdot 2,5 \cdot 10^{-2} \cdot 0,2 + 40 \cdot 10^{-2} \cdot 0,1} \Rightarrow \alpha_{2\gamma} = \frac{0,5}{5 \cdot 10^{-2}} \Rightarrow \boxed{\alpha_{2\gamma} = 10 \, rad/s^2}$$

$$\alpha_{1\gamma} = 2\alpha_{2\gamma} \Rightarrow \boxed{\alpha_{1\gamma} = 20 \, rad/s^2}$$

δ) Δίσκος (M_1, R_1): $\frac{dL_1}{dt} = \Sigma\tau = I_1 \alpha_{1\gamma} \Rightarrow \frac{dL_1}{dt} = 2,5 \cdot 10^{-2} \, kg m^2 \cdot 20 \, rad/s^2$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dL_1}{dt} = 0,5 \, kg m^2/s^2}$$

Δίσκος (M_2, R_2): $\frac{dL_2}{dt} = \Sigma\tau = I_2 \alpha_{2\gamma} \Rightarrow \frac{dL_2}{dt} = 40 \cdot 10^{-2} \, kg m^2 \cdot 10 \, rad/s^2$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dL_2}{dt} = 4 \, kg m^2/s^2}$$

δ) Υπολογισμός του χρονικού στιγμού t_1:

$K_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 \Rightarrow 125 = \frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 10^{-2} \cdot \omega_1^2 \Rightarrow \omega_1 = 100 \, rad/s \wedge \omega_2 = 50 \, rad/s$

$\omega_1 = \alpha_{1\gamma} \cdot t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{\omega_1}{\alpha_{1\gamma}} = \frac{100 \, rad/s}{20 \, rad/s^2} \Rightarrow \boxed{t_1 = 5 \, s}$

$\frac{dL_1}{dt} = 0,5 = \sigma\tau\alpha\theta \Rightarrow \frac{L_1 - L_{10}}{t - t_0} = 0,5 \Rightarrow \frac{L_1 - 0}{t - 0} = 0,5 \Rightarrow L_1 = 0,5t \, (SI)$

$\xrightarrow{t = t_1 = 5s} \boxed{L_1 = 2,5 \, kg m^2/s}$

ισχύει διότι φερικοί $L_1 = I_1 \omega_1 \overset{SI}{=} 2,5 \cdot 10^{-2} \cdot 100 \Rightarrow$

$\Rightarrow L_1 = 2,5 \, kg m^2/s$

$\frac{dL_2}{dt} = 4 = \sigma\tau\alpha\theta \Rightarrow \frac{L_2 - L_{20}}{t - t_0} = 4 \Rightarrow \frac{L_2 - 0}{t - 0} = 4 \Rightarrow L_2 = 4t \, (SI)$

$\xrightarrow{t = t_1 = 5s} \boxed{L_2 = 20 \, kg m^2/s}$ ...σ'... $L_2 = I_2 \omega_2$

$\Rightarrow L_2 = I_2 \cdot \frac{\omega_1}{2} = 40 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{100}{2} \Rightarrow L_2 = 20 \, kg m^2/s$

E) Disco (ω_1, R_1): $\frac{dk_1}{dt} = \Sigma\tau \cdot \omega_1 = 0{,}5\,Nm \cdot 100\,rad/s \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dk_1}{dt} = 50\,J/s}$$

Disco (ω_2, R_2): $\frac{dk_2}{dt} = \Sigma\tau \cdot \omega_2 = 4\,Nm \cdot 50\,rad/s$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dk_2}{dt} = 200\,J/s}$$

...

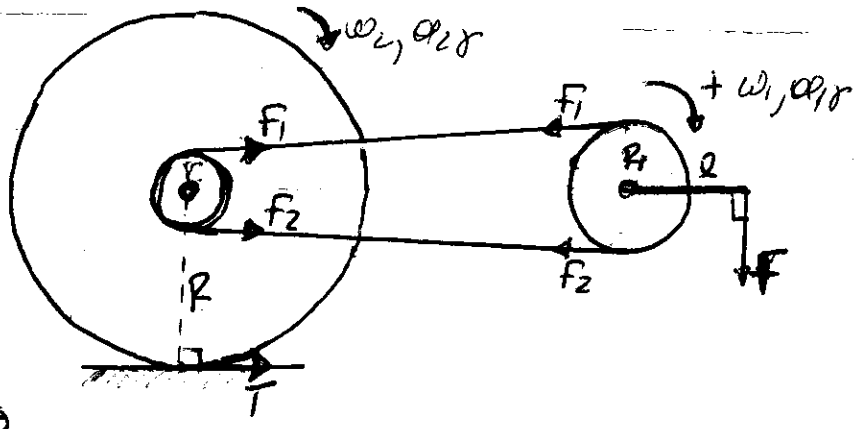
$\frac{dk_1}{dt} = \Sigma\tau\,\omega_1 = \Sigma\tau \cdot \alpha_{1\gamma} \cdot t = 0{,}5 \cdot 20\,t \Rightarrow \frac{dk_1}{dt} = 10t$ (SI)

$\xrightarrow{t = t_1 = 5s}$ $\frac{dk_1}{dt} = 50\,J/s$

$\frac{dk_2}{dt} = \Sigma\tau\,\omega_1 = \Sigma\tau \cdot \alpha_{2\gamma}\,t = 4 \cdot 10\,t \Rightarrow \frac{dk_2}{dt} = 40t$ (SI)

$\xrightarrow{t = t_1 = 5s}$ $\frac{dk_2}{dt} = 200\,J/s$

9.50



Α) Ισορροπία δίσκου

$\Sigma C = 0 \Rightarrow F\cdot\ell + F_2 R_1 - F_1 R_1 = 0$

$\Rightarrow F\cdot\ell = (F_1 - F_2)R_1$ (1)

Ισορροπία τροχού:

$\Sigma C = 0 \Rightarrow F_1 r - F_2 r - T R = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow T\cdot R = (F_1 - F_2) r$ (2). Από (1), (2) $\Rightarrow \frac{F\ell}{T\cdot R} = \frac{(F_1-F_2)R_1}{(F_1-F_2)r} \Rightarrow$

$\Rightarrow F = \frac{R_1 R}{\ell r} T \Rightarrow T = F\frac{\ell r}{R_1 R}$. Για την τριβή T ισχύουν:

$T \le \mu_s N \Rightarrow T \le 0{,}2 \cdot 30\,kg \cdot 10\,m/s^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow T \le 60\,N$

Άρα $F \le \frac{10cm\cdot 30cm}{15cm\cdot 40cm}\cdot 60N \Rightarrow \boxed{F \le 300N}$

$T \le 60 \Rightarrow F\frac{\ell r}{R_1 R} \le 60 \Rightarrow F\cdot\frac{9\cdot 4}{10\cdot 30} \le 60 \Rightarrow F \le 300N$

Β) Η ισχύς της δύναμης F είναι $P = \frac{dW_F}{dt} = \frac{\tau_F\, d\varphi_1}{dt} = F\ell\omega_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow P = F\ell\cdot\alpha_{1\gamma} t$ (3)

$K_1 = \frac{1}{2} I_1 \cdot \omega_1^2 \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{2K_1}{I_1}} = \sqrt{\frac{2\cdot 1{,}8\,J}{9{,}5\cdot 10^{-2}\,kgm^2}} \Rightarrow \omega_1 = 12\,rad/s$

$\omega_1 = \alpha_{1\gamma} t \xrightarrow[SI]{t=1=5s} 12 = \alpha_{1\gamma}\cdot 5 \Rightarrow \boxed{\alpha_{1\gamma} = 2{,}4\,rad/s^2}$ (*)

Γ) (3) $\Rightarrow P = F\ell\alpha_{1\gamma} t$

$P = 1{,}44\,t$ (SI) $\Big\} \Rightarrow F\ell\cdot\alpha_{1\gamma} = 1{,}44 \Rightarrow F\cdot 0{,}15\cdot 2{,}4 = 1{,}44$

$\Rightarrow \boxed{F = 400N}$

Δ) $W_T = \tau_f\cdot\Delta\varphi_2 = -T\cdot R\cdot\Delta\varphi_2$ (4)

(*) Ο τροχός έχει ακτίνα των δίσκο τροχαλία

$\therefore v = \omega_1 R_1 = \omega_2 r \Rightarrow R_1\alpha_{1\gamma} = r\cdot\alpha_{2\gamma} \Rightarrow \alpha_{2\gamma} = \frac{R_1}{r}\alpha_{1\gamma}$

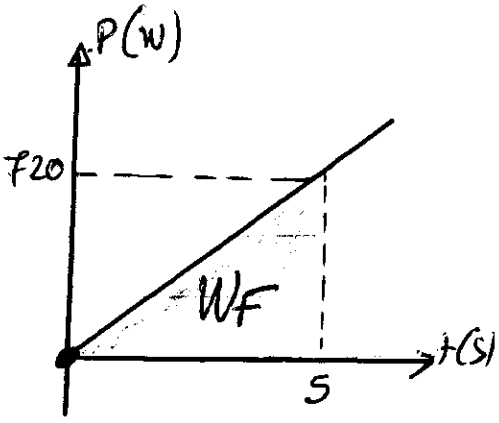
$\Rightarrow \alpha_{2\gamma} = \frac{10cm}{4cm}\alpha_{1\gamma} \Rightarrow \alpha_{2\gamma} = 2{,}5\alpha_{1\gamma} \Rightarrow \boxed{\alpha_{2\gamma} = 6\,rad/s^2}$

$\Delta\varphi_2 = \frac{1}{2}\alpha_{2\gamma} t^2 \xrightarrow{t=t_1=5s} \Delta\varphi_2 = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 5^2 \Rightarrow \Delta\varphi_2 = 75\,rad$

$(4) \Rightarrow W_T = -60N\cdot 0{,}3m\cdot 75\,rad \Rightarrow \boxed{W_T = -1350J}$

Ε) Στο διάστημα $[0, t_1=5s]$ στο σώμα προσφέρεται σταθερό μέτρο μεταβλητής δύναμης F

$W_F = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot F20 \Rightarrow \boxed{W_F = 1800J}$



... και διαφορετικά

$W_F = F\ell\cdot\Delta\varphi_1 = F\ell\cdot\frac{1}{2}\alpha_{1\gamma} t^2$

$\Rightarrow W_F = 400\cdot 0{,}15\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5^2 \Rightarrow W_F = 1800J$

Προφανώς $E_{\pi\rho o\sigma} = W_F = K_1 + K_2 + |W_T|$

$\Rightarrow 1800 = 1{,}8 + K_2 + 1350 \Rightarrow K_2 = 448{,}2J.$

$K_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2$ (5) . Και όμως $\omega_2 = \alpha_{2\gamma} t = 6\cdot 5 = 30\,rad/s$

$(5) \Rightarrow I_2 = \frac{2K_2}{\omega_2^2} \Rightarrow I_2 = \frac{2\cdot 448{,}2}{900} \Rightarrow I_2 = 0{,}996\,kgm^2$ ή

$\boxed{I = 99{,}6\cdot 10^{-2}\,kgm^2}$

ΣΤ) Δίσκος: $\Sigma\mathcal{T} = I_1\alpha_{1\gamma} \Rightarrow F\ell + F_2R_1 - F_1R_1 = I_1\alpha_{1\gamma}$ $\Rightarrow$

Η ροπή των νημάτων στο δίσκο είναι:
$\mathcal{T}_1 = F_2R_1 - F_1R_1$

$\Rightarrow F\ell + \mathcal{T}_1 = I_1\alpha_{1\gamma} \Rightarrow 400\cdot 0{,}15 + \mathcal{T}_1 = 0{,}5\cdot 10^{-2}\cdot 3{,}4$

$\Rightarrow \mathcal{T}_1 = 6\cdot 10^{-2} - 600 \Rightarrow \boxed{\mathcal{T}_1 = -59{,}94\,Nm}$

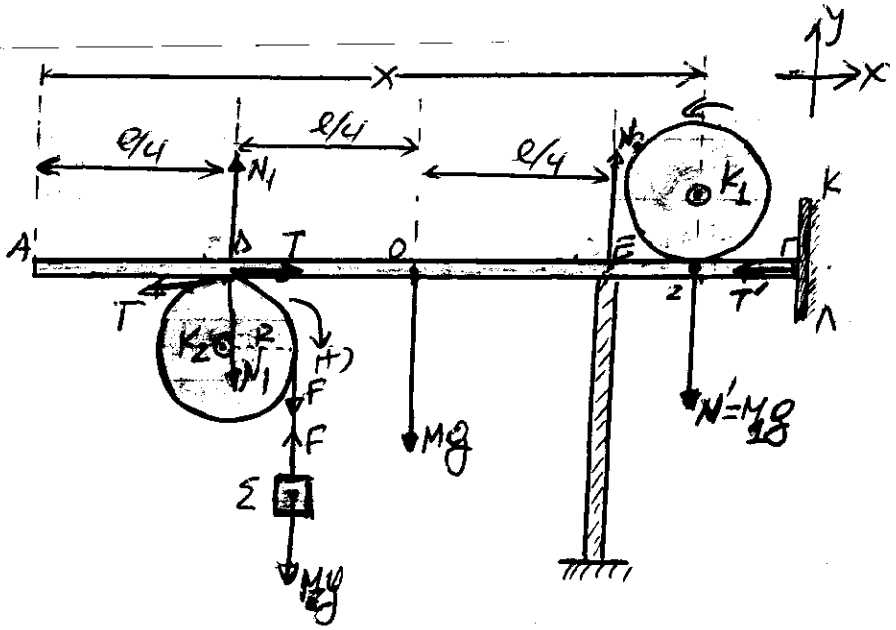
Τροχός: $\Sigma \tau = I_2 \alpha_{2\gamma} \Rightarrow F_1 r - F_2 r - T \cdot R = I_2 \alpha_{2\gamma}$
Η ροπή του ζεύγους δύο δίσκο ερχεται...
$\tau_2 = F_1 r - F_2 r$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \tau_2 - T \cdot R = I_2 \alpha_{2\gamma} \Rightarrow \tau_2 = T \cdot R + I_2 \alpha_{2\gamma} \Rightarrow$

$\Rightarrow \tau_2 = 60 \cdot 0{,}3 + 99{,}6 \cdot 10^{-2} \cdot 6 \Rightarrow \boxed{\tau_2 = 23{,}976 \, Nm}$

9.51

$M = 20\,kg$
$M_1 = 40\,kg$
$M_2 = 10\,kg$
$M_3 = 15\,kg$
$l = 8\,m$
$\mu = 0,5$.



Α) Ισορροπία ράβδου

$\Sigma\tau_{(\Delta)} = 0 \Rightarrow N_1 g\left(x - \frac{l}{4}\right) + Mg\frac{l}{4} = N_2\frac{2l}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow 400(x-2) + 200\cdot 2 = N_2 \cdot 4 \Rightarrow N_2 = 100(x-2) + 100 \Rightarrow N_2 = 100x - 100\ (S.I.)$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_1 + N_2 = Mg + M_1 g \Rightarrow N_1 + 100x - 100 = 600 \Rightarrow N_1 = 700 - 100x\ (S.I.)$

Για να μην αναποδίζεται η ράβδος πρέπει $N_1 > 0$ και $N_2 > 0$ (δεν μας ενδιαφέρει τον επαφή με τα βιτσιλάκια...)

$N_1 > 0 \Rightarrow 700 - 100x > 0 \Rightarrow -100x > -700 \Rightarrow x < 7\,m$

$N_2 > 0 \Rightarrow 100x - 100 > 0 \Rightarrow 100x > 100 \Rightarrow x > 1\,m$

Άρα η ράβδος δεν θα πέσει όταν ο κύλινδος K_1 βρίσκεται στην περιοχή: $\boxed{1\,m < x < 7\,m}$

Β) Όταν φύγουμε ελεύθερο το σώμα (Σ) ο κύλινδος K_2 έχει τάση προς τα δεξιά (+) άρα δέχεται από τη ράβδο δύναμη τριβής T προς τα αριστερά. Προφανώς και ο κύλινδος δίνει στη ράβδο δύναμη T αντίθετη παντού. Η δύναμη αυτή T που δέχεται στη ράβδο την φτιάχνει προς τα δεξιά και από το σωλήνα δέχεται δύναμη T'. Προφανώς η ράβδος θα αρχίσει στο (Κλ)

την αντίθετη της T'.

Η τιμή T που δέχεται ο κύλινδρος K_2 -εφ' όσον ισορροπεί- είναι ίση με την ελάχιστη τιμή που δέχεται το νήμα, δηλαδή $T = \psi N_1 = 0{,}5(700 - 100x) \Rightarrow T = 350 - 50x$ (SI)

Ο κύλινδρος K_2 αφήνεται εφαπτόμενος στο $x = 7\,m$.

Για $x = 7\,m \Rightarrow T = 0$ ... (άρα ο κύλινδρος K_2 άρχιζει να ισορροπεί εφαπτόμενος στο όριο)

Υδροστατικά είναι φανερό ότι για $x'x$: $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T = T'$

$\Rightarrow T' = 350 - 50x \xrightarrow{x=4\,m}$ $\boxed{T' = 150\,N}$

... Πάμε τώρα όπως είχαμε πει στο σημείο Γ.

Γ) Σώμα (Σ): $\Sigma F_y = M_\Sigma a_\Sigma \Rightarrow$

$\Rightarrow M_\Sigma g - F = M_\Sigma a_\Sigma$ (1)

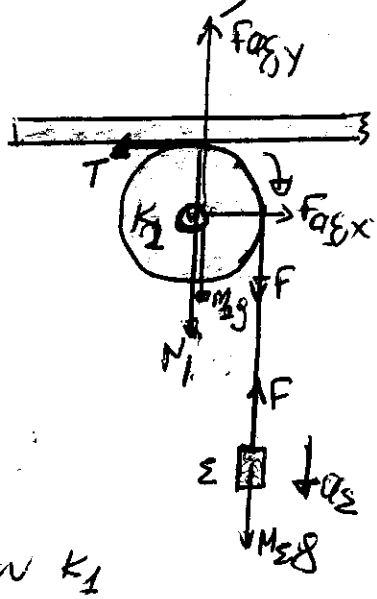
Κύλινδρος (K_2): $\Sigma \tau = I \alpha_{\gamma\omega}$

$\Rightarrow F \cdot R - TR = \frac{1}{2} M_2 R^2 \frac{a_\Sigma}{R} \Rightarrow F - T = \frac{1}{2} M_2 a_\Sigma$ (2)

(1)+(2) $\Rightarrow M_\Sigma g - T = \left(M_\Sigma + \frac{M_2}{2}\right) a_\Sigma \Rightarrow$

$\Rightarrow 150 - (350 - 50x) = 200 a_\Sigma \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{a_\Sigma = 2{,}5x - 10}$ (SI)



x = είναι η θέση του κυλίνδρου K_1 στον άξονα Ax (με $x = 0$ στη θέση A)

Προφανώς $x = x_{\alpha\rho\chi} + vt$ // $x_{\alpha\rho\chi} = 7\,m$, $v = v_{cm} = -0{,}3\,m/s$

... $x = 7 - 0{,}3t$ (SI) $\xrightarrow{(3)}$ $a_\Sigma = 2{,}5(7 - 0{,}3t) - 10 \Rightarrow$

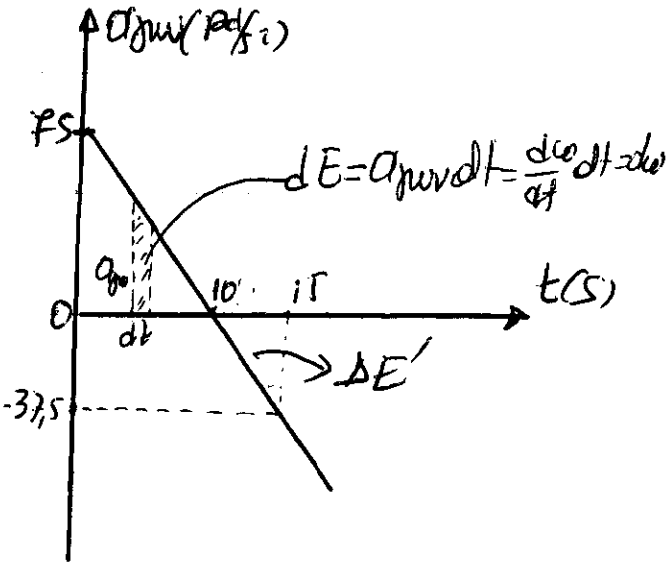
$\Rightarrow a_\Sigma = 7{,}5 - 0{,}75t$ (SI) και $\alpha_{\gamma\omega} = \frac{a_\Sigma}{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_{\gamma\omega} = 75 - 7{,}5t$ (SI)

Η κίνηση του κυλίνδρου K_2 είναι επιταχυνόμενη (με φορά προς τα κάτω) έως ότου $\alpha_{\gamma\omega} = 0$

διαφορά έως ότου $75 - 7,5t = 0 \Rightarrow \boxed{t_1 = 10\,s}$

Το εμβαδόν της $\alpha_{\gamma\omega\nu} = f(t)$ δίνει την μεταβολή του ω
Άρα ισχύει για 10 s
$\Delta\omega = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 75 = 375\,(SI)$



$\Rightarrow \omega - \omega_{\alpha\rho\chi} = 375 \xrightarrow{\omega_{\alpha\rho\chi}=0}$

$\omega_{max} = 375\ rad/s$

K_{max} (κυλίνδρου K_2) $= \frac{1}{2} I \omega_{max}^2 = \frac{1}{2} M_2 R^2 \omega_{max}^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 0,1^2 \cdot 375^2$

$\Rightarrow \boxed{K_{max} = 703,25\,J}$

Δ) Όταν ο κύλινδρος K_1 είναι στη θέση $x = 7 - 4,5 \Rightarrow x = 2,5\,m$
η σχετική θέση είναι $x = 7 - 0,3t \Rightarrow 2,5 = 7 - 0,3t$
$\Rightarrow 0,3t = 4,5 \Rightarrow t_2 = 15\,s$

Εκείνη τη στιγμή $\alpha_{\gamma\omega\nu} = 75 - 7,5 \cdot 15 \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega} = -37,5\ rad/s^2$

$$\Delta E' = \Delta W = \frac{1}{2} \cdot (15-10)(-37,5) \Rightarrow$$

$W' - W_{max} = -93,75\ rad/s \Rightarrow \omega' = 375 - 93,75 \Rightarrow \boxed{\omega' = 281,25\ rad/s}$

αλλά $U_5 = U_{\sigma\varphi\alpha\iota\rho} = \omega' R \Rightarrow \boxed{U_5 = 28,125\ m/s}$

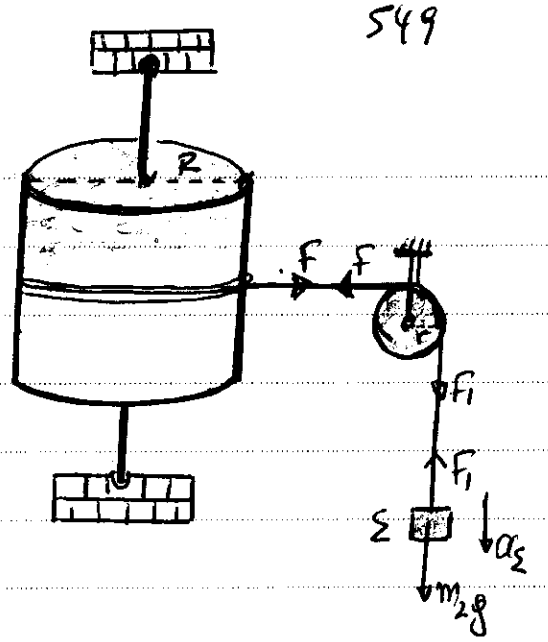
$L_{ΕΞΩΤ} = I\omega' + M_5 U_5 R = \frac{1}{2} M_2 R^2 \omega' + M_5 U_5 R \Rightarrow$

$\Rightarrow L_{ΕΞΩΤ} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 0,1^2 \cdot 281,25 + 15 \cdot 28,125 \cdot 0,1 \Rightarrow L_{ΕΞΩ} = 56,25\ J\ m^2/s$

$$\left(\frac{dL}{dt}\right)_{\substack{\text{κοίλης σφαίρας} \\ (K_2)}} = \Sigma\tau_{ext} = I \cdot \alpha_{γων} = \frac{1}{2} M_2 R^2 \cdot \alpha_{γων} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dL}{dt} = \frac{1}{2} \cdot 100{,}1^2 (-37{,}5) \Rightarrow \frac{dL}{dt} = -1{,}8 \text{ FT kg m}^2/\text{s}^2$$

9.52



Κύλινδρος: $M=2kg$, $R=0,2m$, $\ell=8m$

Τροχαλία: m_1, r

Σώμα Σ: $m_2=1kg$

Αρχικά: Σ: $\Sigma F_y = m_2 a_\Sigma \Rightarrow m_2 g - F_1 = m_2 a_\Sigma$ (1)

Τροχαλία: $\Sigma \tau = I_1 \alpha_{\gamma\omega,τροχ} \Rightarrow F_1 r - F r = \frac{1}{2} m_1 r^2 \alpha_{\gamma\omega,τροχ}$ (2)

$U_\Sigma = U_{\text{γραμμικό τροχαλίας}} = U_{\text{γραμμικό κυλίνδρου}} \Rightarrow U_\Sigma = \omega_{τρ} r = \omega_{κυλ} R$

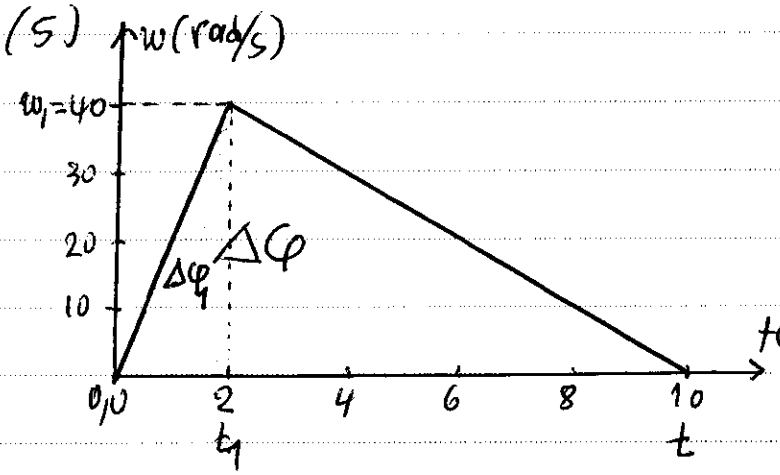
$\Rightarrow a_\Sigma = r\alpha_{\gamma\omega,τρ} = R\alpha_{\gamma\omega,κυλ}$ ... (2) $\Rightarrow F_1 - F_1 = \frac{1}{2} m_1 a_\Sigma$ (2')

Κύλινδρος: $\Sigma \tau = I \alpha_{\gamma\omega,κυλ} \Rightarrow F \cdot R - |\tau| = \frac{1}{2} M R^2 \frac{a_\Sigma}{R} \Rightarrow F - \frac{|\tau|}{R} = \frac{1}{2} M a_\Sigma$ (3)

(1)+(2)+(3) $\Rightarrow m_2 g - \frac{|\tau|}{R} = \left(+ \frac{m_1}{2} + \frac{M}{2} \right) a_\Sigma$ (4)

... και αφού το νήμα ... εξακατέλιγε τον κύλινδρο ...

$\Sigma \tau = I \alpha'_{\gamma\omega} \Rightarrow -|\tau| = \frac{1}{2} M R^2 \alpha'_{\gamma\omega,κυλ}$ (5)



A) $\Delta\varphi = N_{ολ} \cdot 2\pi = \frac{100}{\pi} 2\pi = 200 rad$

$\Delta\varphi = \frac{1}{2} t \cdot \omega_1 \Rightarrow 200 = \frac{1}{2} 10 \omega_1$

$\Rightarrow \omega_1 = 40 rad/s$

$\ell = \Delta S_{\text{περιφέρεια κυλίνδρου}} = R \Delta\varphi_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta\varphi_1 = \frac{\ell}{R} = \frac{8m}{0,2} \Rightarrow \Delta\varphi_1 = 40 rad$

$\Delta\varphi_1 = \frac{1}{2} t_1 \cdot \omega_1 \Rightarrow 40 = \frac{1}{2} t_1 \cdot 40 \Rightarrow t_1 = 2s$

... και διαφορετικά ... $\omega_1^2 = 2\alpha_{\gamma\omega,κυλ} \Delta\varphi_1 \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega,κυλ} = \frac{\omega_1^2}{2\Delta\varphi} = \frac{40^2}{2 \cdot 40} = 20 \frac{rad}{s}$

$\omega_1 = \alpha_{\gamma\omega} t_1 \Rightarrow 40 = 20 t_1 \Rightarrow t_1 = 2s$

B.1) $t \in [0,2)$ s $\quad \alpha_{\text{μον}}_{\text{κυλ}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{40}{2} = 20 \text{ rad/s} \Rightarrow \alpha_{\text{μον}}_{\text{κυλ}} = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

$t \in (2,10]$ s $\quad \alpha'_{\text{μον}}_{\text{κυλ}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = -\frac{40}{8} \Rightarrow \alpha'_{\text{μον}} = -5 \text{ rad/s}^2$

Γ) (5) $\quad -|\tau_T| = \frac{1}{2} M R^2 \alpha'_{\text{μον}}_{\text{κυλ}} \Rightarrow -|\tau_T| = \frac{1}{2} 2 \cdot 0{,}2^2 \cdot (-5 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}) \Rightarrow |\tau_T| = 0{,}2 \text{ Nm}$

$\Rightarrow \tau_T = -0{,}2 \text{ Nm}$

Δ) $\quad \alpha_\Sigma = R \alpha_{\text{μον}}_{\text{κυλ}} \Rightarrow \alpha_\Sigma = 0{,}2 \cdot 20 \Rightarrow \alpha_\Sigma = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

$(4) \Rightarrow m_2 g - \frac{|\tau_T|}{R} = (m_2 + \frac{m_1}{2} + \frac{M}{2}) \alpha_\Sigma \Rightarrow 10 - \frac{0{,}2}{0{,}2} = (1 + \frac{m_1}{2} + \frac{2}{2}) \cdot 4$

$\Rightarrow 9 = (1 + 0{,}5 m_1 + 1) 4 \Rightarrow m_1 = 0{,}5 \text{ kg}$

Ε) $(3) \Rightarrow F - \frac{|\tau_T|}{R} = \frac{1}{2} M \alpha_\Sigma \Rightarrow F - \frac{0{,}2}{0{,}2} = \frac{1}{2} 2 \cdot 4 \Rightarrow F = 5 \text{ N}$