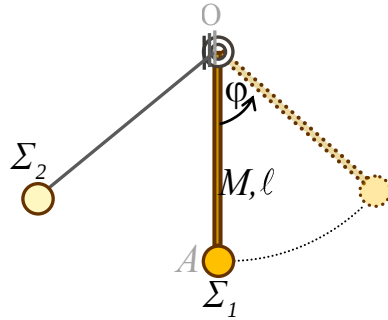


Σύστημα σε στροφική κίνηση-Δύναμη και ρυθμός μεταβολής στροφορμής και κινητικής ενέργειας μέλους του συστήματος.

Ένα στερεό (Σ) αποτελείται από μια ομογενή ράβδο ΟΑ μήκους $\ell = 1,2\text{m}$ και μάζας $M = 2\text{Kg}$ η οποία στο άκρο της Α έχει κολλημένο ένα σφαιρίδιο (Σ_1) μάζας $m_1 = 1\text{Kg}$. Το άλλο άκρο Ο της ράβδου είναι αρθρωμένο έτσι ώστε να μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα. Το σύστημα αρχικά ηρεμεί με την ράβδο σε κατακόρυφη θέση. Ένα εκκρεμές μήκους $\ell = 1,2\text{m}$ είναι δεμένο στο σημείο Ο και φέρει στο άλλο άκρο του σφαιρίδιο (Σ_2). Το εκκρεμές εκτρέπεται και βάλλεται από κατάλληλη θέση ώστε το σφαιρίδιο (Σ_2) να κτυπάει με ορμή $p = \frac{10}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ κεντρικά το σφαιρίδιο (Σ_1) και μετά να ανακλάται έχοντας το 25% της κινητικής ενέργειας που είχε πριν την κρούση.



α) Να υπολογίσετε την γωνιακή ταχύτητα του στερεού (Σ) αμέσως μετά την κρούση.

Όταν η ράβδος έχει αποκλίνει από την αρχική της θέση κατά $\varphi = 37^\circ$ ($\eta\mu\varphi = 0,6$ $\sigma\upsilon\nu\varphi = 0,8$) να βρείτε:

β) τη γωνιακή επιτάχυνση και τη γωνιακή ταχύτητα του στερεού (Σ),

γ) το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής τόσο για την ράβδο όσο και το σφαιρίδιο (Σ_1),

δ) το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας τόσο για την ράβδο όσο και το σφαιρίδιο (Σ_1),

ε) Τη δύναμη που ασκεί η ράβδος στο σφαιρίδιο.

Δίνονται:

✚ η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής

$$I_p = \frac{1}{3} M \ell^2$$

✚ τα σφαιρίδια να θεωρηθούν ως υλικά σημεία

✚ $g = 10\text{ms}^{-2}$

Απάντηση

α) Ροπή αδράνειας στερεού ως προς τον άξονα περιστροφής $I = \frac{1}{3}M\ell^2 + m_1\ell^2 \Rightarrow I = \frac{1}{3}2 \cdot 1,2^2 + 1 \cdot 1,2^2 \Rightarrow$

$$I = 2,4 \text{ Kg m}^2$$

Διατήρηση ορμής συστήματος αμέσως πριν και αμέσως μετά την κρούση.

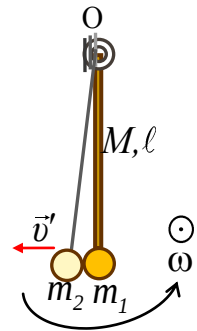
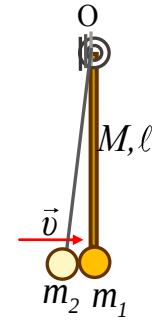
$$L_{\pi\rho\nu} = L_{\mu\epsilon\tau\acute{\alpha}} \Rightarrow m_2 v \ell = -m_2 v' \ell + I \omega \quad (1)$$

$$\text{Για το σφαιρίδιο } \Sigma_2 \text{ δίνεται } K_{\mu\epsilon\tau\acute{\alpha}} = \frac{25}{100} K_{\pi\rho\nu} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m_2 v'^2 = \frac{25}{100} \frac{1}{2} m_2 v^2 \Rightarrow v' = \frac{v}{2} \xrightarrow{(1)}$$

$$m_2 v \ell = -m_2 \frac{v}{2} \ell + I \omega \Rightarrow p \ell = -\frac{p}{2} \ell + I \omega \Rightarrow 1,5 p \ell = I \omega$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{1,5 p \ell}{I} \Rightarrow \omega = \frac{1,5 \frac{10}{3} 1,2}{2,4} \Rightarrow \boxed{\omega = 2,5 \text{ rad / s}}$$



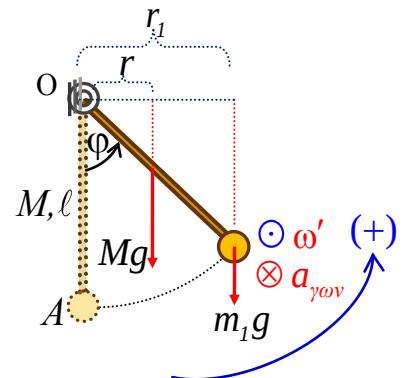
β) $\Sigma \tau = I \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow -Mg \frac{\ell}{2} \eta\mu\varphi - m_1 g \ell \eta\mu\varphi = I \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow$

$$\boxed{\alpha_{\gamma\omega\nu} = -6 \text{ rad / s}^2}$$

$$\Delta K = W_{o\lambda} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} I \omega'^2 - \frac{1}{2} I \omega^2 = -Mg \frac{\ell}{2} (1 - \sigma\upsilon\nu\varphi) - m_1 g \ell (1 - \sigma\upsilon\nu\varphi)$$

$$\Rightarrow \dots \boxed{\omega' = 1,5 \text{ rad / s}}$$



γ)

$$\text{Στροφορμή σφαιριδίου : } L_{\sigma} = m_1 v \ell \Rightarrow L_{\sigma} = m_1 \omega \ell^2$$

Ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του σφαιριδίου:

$$\frac{dL_{\sigma}}{dt} = \frac{d(m_1 \omega \ell^2)}{dt} \Rightarrow \frac{dL_{\sigma}}{dt} = m_1 \ell^2 \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \frac{dL_{\sigma}}{dt} = m_1 \ell^2 \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow$$

$$\frac{dL_{\sigma}}{dt} = 1 \text{ kg} (1,2 \text{ m})^2 (-6 \text{ rad / s}^2) \Rightarrow \boxed{\frac{dL_{\sigma}}{dt} = -8,64 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}}$$

$$\text{Στροφορμή ράβδου : } L_{\rho} = I_{\rho} \omega$$

Ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της ράβδου:

$$\frac{dL_{\rho}}{dt} = \frac{d(I_{\rho} \omega)}{dt} \Rightarrow \frac{dL_{\rho}}{dt} = I_{\rho} \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \frac{dL_{\rho}}{dt} = \frac{1}{3} M \ell^2 \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow$$

$$\frac{dL_{\rho}}{dt} = \frac{1}{3} 2 \text{ kg} (1,2 \text{ m})^2 (-6 \text{ rad / s}^2) \Rightarrow \boxed{\frac{dL_{\rho}}{dt} = -5,76 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}}$$

δ) Κινητική ενέργεια σφαιριδίου: $K_{\sigma} = \frac{1}{2} m_I v^2 \Rightarrow K_{\sigma} = \frac{1}{2} m_I (\omega \ell)^2 \Rightarrow$
 $K_{\sigma} = \frac{1}{2} m_I \ell^2 \omega^2$

Ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σφαιριδίου:

$$\frac{dK_{\sigma}}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{2} m_I \ell^2 \omega^2\right)}{dt} \Rightarrow \frac{dK_{\sigma}}{dt} = \frac{1}{2} m_I \ell^2 \frac{d(\omega^2)}{dt} \Rightarrow \frac{dK_{\sigma}}{dt} = \frac{1}{2} m_I \ell^2 2\omega \frac{d\omega}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dK_{\sigma}}{dt} = m_I \ell^2 \omega \alpha_{\gamma\omega\omega} \Rightarrow \boxed{\frac{dK_{\sigma}}{dt} = -12,96 \frac{J}{s}}$$

Και διαφορετικά $\frac{dK_{\sigma}}{dt} = \Sigma \tau_{\sigma} \omega = I_{\sigma} \alpha_{\gamma\omega\omega} \omega \Rightarrow \frac{dK_{\sigma}}{dt} = m_I \ell^2 \alpha_{\gamma\omega\omega} \omega \dots$

Ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της ράβδου:

$$\frac{dK_{\rho}}{dt} = \Sigma \tau_{\rho} \omega \Rightarrow \frac{dK_{\rho}}{dt} = I_{\rho} \alpha_{\gamma\omega\omega} \omega \Rightarrow \frac{dK_{\rho}}{dt} = \frac{1}{3} M \ell^2 \alpha_{\gamma\omega\omega} \omega \xrightarrow{S.I.}$$

$$\frac{dK_{\rho}}{dt} = \frac{1}{3} 2,1,2^2 (-6) \cdot 1,5 \Rightarrow \boxed{\frac{dK_{\rho}}{dt} = -8,64 \frac{J}{s}}$$

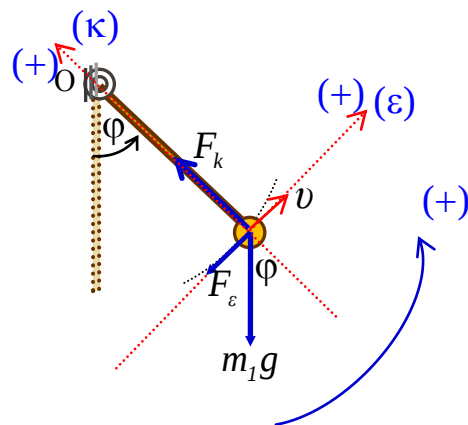
ε) Το σφαιρίδιο Σ_2 ως υλικό σημείο εκτελεί κυκλική κίνηση ακτίνας ℓ κέντρο Ο και δέχεται το βάρος του $m_I g$ και την δύναμη F από τη ράβδο. Αναλύουμε τις δυνάμεις αυτές σε δύο άξονες, τον ακτινικό (κ) και τον εφαπτομενικό (ε).

Για τον ακτινικό άξονα έχουμε:

$$\Sigma F_k = m_I a_k \Rightarrow$$

$$F_k - m_I g \sin \varphi = m_I \omega^2 \ell \Rightarrow$$

$$F_k = m_I g \sin \varphi + m_I \omega^2 \ell \dots \boxed{F_k = 10,7N}$$



Για τον εφαπτομενικό άξονα έχουμε: $\Sigma F_{\epsilon} = m_I a_{\epsilon} \Rightarrow \Sigma F_{\epsilon} = m_I \frac{dv}{dt} \Rightarrow$

$$\Sigma F_{\epsilon} = m_I \frac{d(\omega \ell)}{dt} \Rightarrow \Sigma F_{\epsilon} = m_I \ell \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \Sigma F_{\epsilon} = m_I \ell \alpha_{\gamma\omega\omega} \Rightarrow$$

$$-F_{\epsilon} - m \ell g \eta \mu \varphi = m_I \ell \alpha_{\gamma\omega\omega} \Rightarrow -F_{\epsilon} - m \ell g \eta \mu \varphi = m_I \ell \alpha_{\gamma\omega\omega} \xrightarrow{S.I.}$$

$$-F_{\epsilon} - 1Kg \cdot (10m / s^2) \cdot 0,6 = 1kg \cdot 1,2m \cdot (-6rad / s^2) \Rightarrow \boxed{F_{\epsilon} = 1,2N}$$

$$F = \sqrt{F_k^2 + F_{\epsilon}^2} \Rightarrow \boxed{F = 10,77N}$$

Σχόλιο: Στα (γ) και (δ) ερωτήματα στην μεταβολή της στροφορμής και της κινητικής ενέργειας του σφαιριδίου ή της ράβδου γίνεται το παρακάτω λάθος . Γράφουμε (πχ για το σφαιρίδιο) $\frac{dL_{\sigma}}{dt} = \Sigma \tau_{\sigma}$ και ως μοναδική ροπή δεχόμαστε μόνο τη ροπή του βάρους του ενώ υπάρχει και η ροπή από τη δύναμη F που ασκεί η ράβδος στο σφαιρίδιο.

