

# Απλή αρμονική ταλάντωση και στροφική κίνηση

## Γενική «μεθοδολογία»...

Υπάρχουν προβλήματα που ένα σώμα  $\Sigma$  από ένα σύστημα, εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και ένα άλλο σώμα στροφική κίνηση-ταλάντωση, με τις δύο αυτές κινήσεις να αλληλοεπηρεάζονται ή το κέντρο μάζας ενός σώματος (π.χ δίσκου) να εκτελεί γραμμική αρμονική ταλάντωση και ο δίσκος στο σύνολό του στροφική κίνηση -στροφική ταλάντωση. Συνήθως στο κεφάλαιο των ταλαντώσεων που προηγείται της μελέτης του στερεού, θεωρούμε το αμελητέα τη ροπή αδράνειας του στερεού και λύνουμε το πρόβλημα με αυτή την παραδοχή...( πολλές φορές λέμε ότι αγνοείται η στροφική κίνηση που δεν είναι σωστό...). Η ακρίβεια όμως απαιτεί να μην γίνεται αυτή η προσέγγιση και τότε σε γενικές γραμμές ακολουθούμε την παρακάτω φορμαλιστική διαδικασία που παλιά την βαφτίσαμε μεθοδολογία... και την είχαμε ως τυφλοσούρτη.

**1ο βήμα:** προσδιορίζουμε τη θέση ισορροπίας του ταλαντωτή. Στην κατάσταση της ισορροπίας όλο το σύστημα ισορροπεί και ισχύουν οι σχέσεις, για το σώμα-ταλαντωτή  $\Sigma \vec{F} = 0$ , για δε το σώμα που κάνει στροφική κίνηση (π.χ τροχαλία)  $\Sigma \tau = 0$  ως προς τον άξονα περιστροφής του.

**2ο βήμα:** Ορίζουμε άξονα ταλάντωσης για τον ταλαντωτή. Θεωρούμε τον ταλαντωτή σε μια τυχαία απομάκρυνση  $x > 0$  η οποία προτιμάμε να είναι θετική, θεωρώντας επίσης ότι εκείνη τη στιγμή ο ταλαντωτής έχει θετική φορά κίνησης  $v > 0$ .

**3ο βήμα:** Προσδιορίζουμε τη σχέση μεταξύ της επιτάχυνσης  $\vec{a}$  του ταλαντωτή και της γωνιακής επιτάχυνσης  $\alpha_{\gamma\omega\nu}$  του σώματος που εκτελεί στροφική κίνηση. Αυτό συνήθως ( όπως στο παρακάτω παράδειγμα) στηρίζεται στη λογική ότι η ταχύτητα του σώματος ισούται με την ταχύτητα του νήματος και αυτή με την γραμμική ταχύτητα του περιφέρεας που είναι τυλιγμένο το νήμα  $v_{\Sigma} = v_{\gamma\pi\alpha\mu} = \omega r \Rightarrow \frac{dv_{\Sigma}}{dt} = \frac{d(\omega r)}{dt} \Rightarrow$

$$\frac{dv_{\Sigma}}{dt} = \frac{rd\omega}{dt} \Rightarrow a = r\alpha_{\gamma\omega\nu}$$

**4ο βήμα:** Γράφουμε τις εξισώσεις κίνησης για τον ταλαντωτή  $\Sigma F = ma$  και την στροφική κίνηση  $\Sigma \tau = I\alpha_{\gamma\omega\nu}$ . Για το λόγο αυτό θεωρούμε θετική φορά κίνησης αυτή της ταχύτητας του ταλαντωτή και θετική φορά στροφής αυτής της γωνιακής ταχύτητας του στερεού. Συνδυάζουμε τις



ανωτέρω εξισώσεις λαμβάνοντας υπόψη την  $a = f(a_{\gamma\omega\nu})$  και τα αποτελέσματα από τις εξισώσεις ισορροπίας. Έτσι προσπαθούμε να καταλήξουμε σε μια σχέση της επιτάχυνσης  $a$  του ταλαντωτή με την απομάκρυνσή του  $x$ ,  $a = f(x)$  η οποία θα είναι της μορφής  $a = -\text{σταθ} \cdot x$ . Στην συνέχεια θέτουμε την  $a = f(x)$  στη σχέση  $\Sigma F = ma$  για να καταλήξουμε στην  $\Sigma F = -Dx$ .

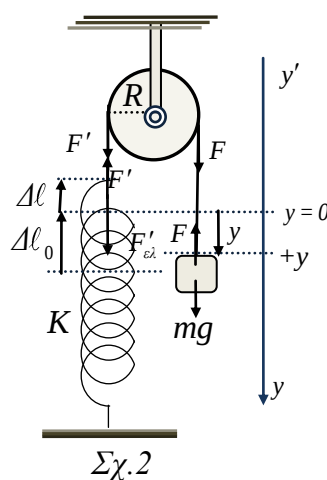
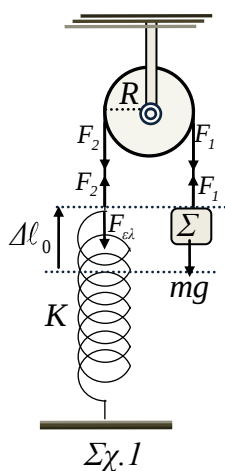
### Βασική εφαρμογή.

Στο σχήμα η τροχαλία έχει ροπή αδράνειας  $I$ , το σώμα  $\Sigma$  έχει μάζα  $m$  και όλο το σύστημα ισορροπεί. Απομακρύνουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας και το αφήνουμε ελεύθερο. Θα δείξουμε ότι εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

#### Μελέτη- Επεξεργασία:

Προσδιορισμός της θέσης ισορροπίας που έστω ότι το ελατήριο έχει στατική παραμόρφωση  $\Delta\ell_0$  (σχήμα 1).

$$\left. \begin{array}{l} \text{Σώμα } \Sigma : \Sigma F_y = 0 \Rightarrow mg - F_1 = 0 \Rightarrow mg = F_1 \\ \text{Τροχαλία: } \Sigma \tau = 0 \Rightarrow F_1 R - F_2 R = 0 \Rightarrow F_1 = F_2 \\ \text{Ελατήριο: } F_2 = F_{ελ} \Rightarrow F_2 = K\Delta\ell_0 \end{array} \right\} \Rightarrow mg = K\Delta\ell_0 \quad (1)$$



Θεωρούμε το σώμα  $\Sigma$  σε τυχαία απομάκρυνση  $y$  (ας υποθέσουμε θετική) και έστω ότι έχει θετική φορά κίνησης (προς τα κάτω), όπως θετική θεωρείται και η φορά περιστροφής της τροχαλίας.

Προσδιορίζουμε τη σχέση μεταξύ της επιτάχυνσης  $\vec{a}$  του ταλαντωτή και της γωνιακής επιτάχυνσης  $a_{\gamma\omega\nu}$  του σώματος που εκτελεί στροφική κίνηση. Αυτό στηρίζεται στη λογική ότι η ταχύτητα του σώματος ισούται με την ταχύτητα του νήματος και αυτή με την γραμμική ταχύτητα του περιφέρεας που είναι τυλιγμένο το νήμα  $v_{\Sigma} = v_{\gamma\omega\nu} = \omega R \Rightarrow \frac{dv_{\Sigma}}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} \Rightarrow \frac{dv_{\Sigma}}{dt} = \frac{R d\omega}{dt} \Rightarrow a = R a_{\gamma\omega\nu}$

Γράφουμε τις εξισώσεις κίνησης για τον ταλαντωτή  $\Sigma F = ma$  και την στροφική κίνηση  $\Sigma \tau = I a_{\gamma\omega\nu}$ .

Σώμα Σ :  $\Sigma F_y = ma \Rightarrow mg - F = ma \quad (2).$

Τροχαλία:  $\Sigma \tau = I a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow FR - F'R = I \frac{a}{R} \Rightarrow F - F' = I \frac{a}{R^2} \quad (3)$

Ελατήριο:  $F' = F'_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow F' = K(\Delta\ell_0 + \Delta\ell) \quad (4)$

$(1) + (2) + (3) \Rightarrow mg - K(\Delta\ell_0 + \Delta\ell) = ma + I \frac{a}{R^2} \xrightarrow{(1)} -K\Delta\ell = \frac{mR^2 + I}{R^2} a \xrightarrow{\Delta\ell = y}$

$a = -\frac{KR^2}{mR^2 + I} y \quad (5)$

Επανερχόμενοι στη σχέση  $\Sigma F_y = ma \xrightarrow{(5)} \boxed{\Sigma F_y = -\frac{KmR^2}{mR^2 + I} y} \Rightarrow \boxed{\Sigma F_y = -Dy}.$

Αυτό σημαίνει ότι το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς  $\boxed{D = \frac{KmR^2}{mR^2 + I}}$  και κυκλική συχνότητα ταλάντωσης  $\omega_{\omega\lambda} = \sqrt{\frac{D}{m}}.$

✚ Αν Α το πλάτος της ταλάντωσης οι χρονικές εξισώσεις απομάκρυνσης και ταχύτητας του σώματος θα είναι  $y = A\eta\mu(\omega_{\omega\lambda}t + \theta_0)$  και  $v_{\Sigma} = \omega_{\omega\lambda} A \sigma\upsilon\nu(\omega_{\omega\lambda}t + \theta_0)$  με την αρχική φάση  $\theta_0$  να ορίζεται από τις αρχικές συνθήκες.

✚ Αν θεωρούσαμε αμελητέα την ροπή αδράνειας της τροχαλίας τότε  $\boxed{\Sigma F_y = -Ky}$  όποτε  $\boxed{D = K}.$

✚ Παρατηρείστε ότι όση είναι η μετατόπιση του σώματος Σ, τόση είναι και αυξομείωση της παραμόρφωσης του ελατηρίου.

✚ Η ταχύτητα του νήματος είναι παντού ίδια. Έτσι η ταχύτητα του σώματος Σ και η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής  $\omega$  της τροχαλίας συνδέονται με τη σχέση:  $v_{\nu\eta\mu\alpha\tau\omicron\varsigma} = \text{ίδια} \Rightarrow v_{\Sigma} = v_{\gamma\rho\alpha\mu} = \omega R \Rightarrow \omega = \frac{v_{\Sigma}}{R} \Rightarrow \omega = \frac{\omega_{\omega\lambda} A}{R} \sigma\upsilon\nu(\omega_{\omega\lambda}t + \theta_0) \Rightarrow$

$\omega = \omega_{\max} \sigma\upsilon\nu(\omega_{\omega\lambda}t + \theta_0) \text{ με } \omega_{\max} = \frac{\omega_{\omega\lambda} A}{R}$

**Παρατηρούμε ότι η γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας είναι αρμονική συνάρτηση του χρόνου.**

Η απομάκρυνση  $y$  του σώματος Σ από την θέση ισορροπίας του, είναι όσο κατέβηκε το νήμα και επειδή αυτό δεν ολισθαίνει στην τροχαλία, τόσο είναι και το μήκος που διέγραψε ένα σημείο της περιφέρειας...  $y = \Delta s_{\text{περιφέρειας}} = R\varphi$  όπου  $\varphi$  η "γωνιακή - στροφική" μετατόπιση της

τροχαλίας ...  $\varphi = \frac{y}{R} \Rightarrow \varphi = \frac{A}{R} \eta\mu(\omega_{\omega\lambda}t + \theta_0) \Rightarrow \varphi = \varphi_{\max} \eta\mu(\omega_{\omega\lambda}t + \theta_0)$  με

$\varphi_{\max} = \frac{A}{R}.$

**Παρατηρούμε ότι η γωνιακή -στροφική απομάκρυνση της τροχαλίας είναι αρμονική συνάρτηση του χρόνου.**



Για την ασκούμενη ροπή στην τροχαλία έχουμε  $\Sigma \tau = I a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \Sigma \tau = I \frac{\alpha}{R}$

$$\Rightarrow \Sigma \tau = -\frac{I}{R} \frac{KR^2}{(mR^2 + I)} y \Rightarrow \Sigma \tau = -\frac{IKR^2}{mR^2 + I} \frac{y}{R} \xrightarrow{\frac{y}{R} = \varphi} \Sigma \tau = -\frac{IKR^2}{mR^2 + I} \varphi$$

$$\Rightarrow \Sigma \tau = -D^* \varphi \text{ με } D^* = \frac{IKR^2}{mR^2 + I} = \text{σταθ.}$$

Παρατηρούμε ότι η ασκούμενη στην τροχαλία ροπή είναι ανάλογη της στροφικής απομάκρυνσης και τείνει να φέρει την τροχαλία στη αρχική της θέση... **Ροπή επαναφοράς.**

✚ Από όλα αυτά φαίνεται ότι και η τροχαλία γράφει μια στροφική αρμονική ταλάντωση με "σταθεράς επαναφοράς"

$$D^* = \frac{IKR^2}{mR^2 + I} = \text{σταθ.}$$

**Περισσότερα μπορείτε να δείτε στα βιβλία μου:**

**1. "Σύνθετα Θέματα Φυσικής Θετικής Γ' Λυκείου ...**

**2. "Θέματα Φυσικής Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης" Γ' Λυκείου .**

**3. Φυσική Θετικής και Τεχνολογικής κατεύθυνσης 2ο τεύχος**

