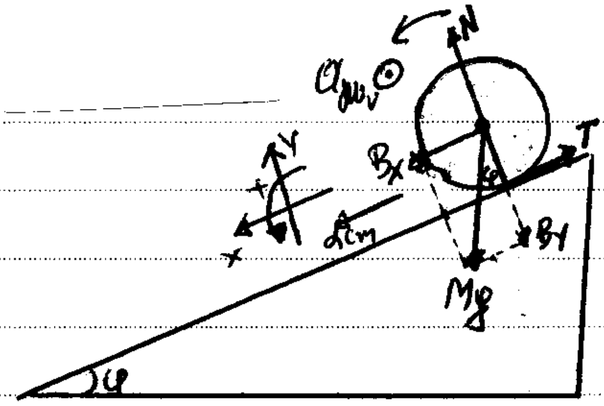
9.75



α) $\Sigma F_x = M a_{cm} \Rightarrow B_x - T = M a_{cm}$

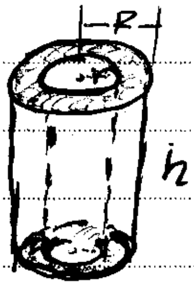
$\Rightarrow Mg\eta\mu\varphi - T = M a_{cm}$ (1)

$\Sigma \tau = I a_{γων} \Rightarrow T \cdot R = \frac{1}{2} M R^2 \cdot \frac{a_{cm}}{R}$

$\Rightarrow T = \frac{1}{2} M a_{cm}$ (2) , (1)+(2) $\Rightarrow Mg\eta\mu\varphi = \frac{3}{2} M a_{cm} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{cm} = \frac{2}{3} g \eta\mu\varphi \Rightarrow a_{cm} = \frac{2}{3} \cdot 10 \cdot 0{,}705 \Rightarrow \boxed{a_{cm} = 4{,}7 m/s^2}$ ✓

β) $I_{κοίλου} + I'_{\substack{σχήματος \\ που αφαιρείται}} = I_{συνόλου}$



$\Rightarrow I_K + I' = I_{ΣΥΝ}$ (3)

$I_{ΣΥΝ} = \frac{1}{2} M R^2$ (4)

$I' = \frac{1}{2} M' r^2$, όπου M' η μάζα του σχήματος που θα αφαιρεθεί

$\frac{M'}{M} = \frac{V' \cdot \rho}{V \cdot \rho} = \frac{\pi r^2 h}{\pi R^2 h} = \frac{r^2}{R^2} \Rightarrow M' = M \frac{r^2}{R^2}$ | ρ = πυκνότητα

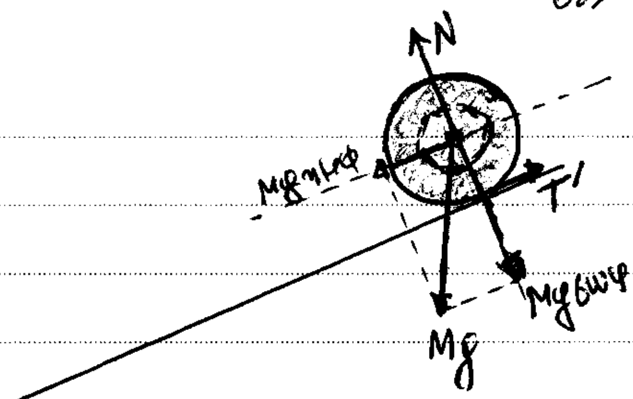
άρα $I' = \frac{1}{2} M \frac{r^2}{R^2} r^2 \Rightarrow I' = \frac{1}{2} M \frac{r^4}{R^2}$ (5)

(3), (4), (5) $\Rightarrow I_K + \frac{1}{2} M \frac{r^4}{R^2} = \frac{1}{2} M R^2 \Rightarrow I_K = \frac{1}{2} M R^2 - \frac{1}{2} M \frac{r^4}{R^2}$

$\Rightarrow I_K = \frac{1}{2} M \frac{R^4 - r^4}{R^2} \Rightarrow I_K = \frac{1}{2} M \cdot \frac{R^4 - (R/2)^4}{R^2} \Rightarrow I_K = \frac{1}{2} M \frac{15 R^4}{16 R^2}$

$\Rightarrow \boxed{I_K = \frac{15}{32} M R^2} \xRightarrow{SI} I_K = \frac{15}{32} \cdot 6{,}4 \cdot 0{,}04 \Rightarrow \boxed{I_K = 0{,}12 kg m^2}$ ✓

γ)



προσοχή!

- Το σύνολο του κυλίνδρου μάζας M εκτελεί μεταφορική κίνηση (και τα δύο τμήματα)
- Το κομμάτι που αφαιρέθηκε και ξανά τοποθετήθηκε ξανά (το εσωτερικό τμήμα) δεν μπορεί να κάνει στροφική κίνηση γιατί δεν ασκείται ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής. Οι μόνες δυνάμεις που μπορούσαν να ασκούν ροπή είναι οι τριβές, αλλά λόγω λειότητας δεν υπάρχουν (*)
- Το κοίλο τμήμα εκτελεί και στροφική κίνηση λόγω της ροπής της T'

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma F_x = M a_{cm}' \Rightarrow Mg\eta\mu\varphi - T' = M a_{cm}' \\ \Sigma \tau = I_K \cdot a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T' R = I_K \frac{a_{cm}'}{R} \\ a_{cm}' = R a_{\gamma\omega\nu} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} Mg\eta\mu\varphi - T' = M a_{cm}' \\ T' = \frac{I_K}{R^2} a_{cm}' \end{array}$$

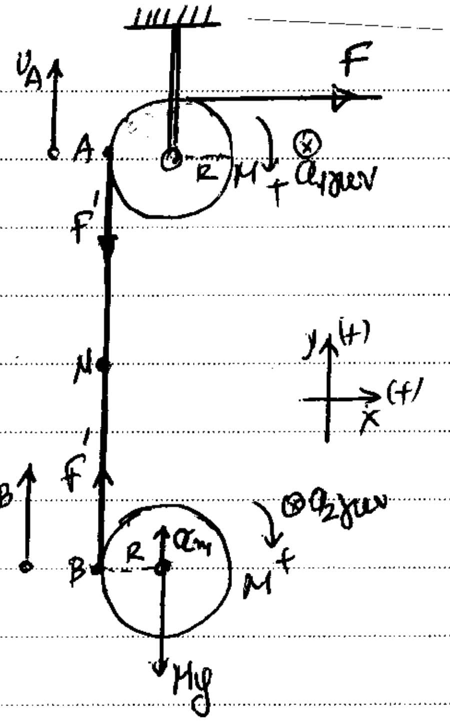
$$\Rightarrow Mg\eta\mu\varphi = \left(M + \frac{I_K}{R^2}\right) a_{cm}' \overset{SI}{\Rightarrow} 6{,}4 \cdot 10 \cdot 0{,}705 = \left(6{,}4 + \frac{0{,}12}{0{,}04}\right) a_{cm}'$$

$$\Rightarrow a_{cm}' = 4{,}8\ m/s^2 \ \checkmark \quad \wedge \quad a_{\gamma\omega\nu}' = 12\ rad/s^2 \checkmark$$

δ) $$\frac{K_{\mu\varepsilon\tau}}{K_{\sigma\tau\rho}} = \frac{\frac{1}{2} M v_{cm}^2}{\frac{1}{2} I_K \omega^2} = \frac{M \cdot v_{cm}^2}{I_K \cdot \omega^2} = \frac{M R^2}{I_K} = \frac{6{,}4 \cdot 0{,}04}{0{,}12} = \frac{6{,}4 \cdot 4}{12} = \frac{6{,}4}{3} = \frac{64}{30}$$

$$\Rightarrow \frac{K_{\mu\varepsilon\tau}}{K_{\sigma\tau\rho}} = \frac{32}{15} \checkmark$$

9.76



α) Υπηλαρος πάντα ίδια ⇒

$$\Rightarrow \upsilon_A = \upsilon_B \Rightarrow \omega_1 R = \omega_2 R + \upsilon_{cm}$$

$$\Rightarrow R\alpha_{1\gamma\omega\nu} = R\alpha_{2\gamma\omega\nu} + \alpha_{cm} \quad (1)$$

Τροχαλία: $\Sigma\tau = I_{cm}\,\alpha_{1\gamma\omega\nu} \Rightarrow FR - F'R = \frac{1}{2}MR^2\alpha_{1\gamma\omega\nu}$

$$\Rightarrow F - F' = \frac{1}{2}MR\,\alpha_{1\gamma\omega\nu} \Rightarrow R\alpha_{1\gamma\omega\nu} = \frac{2(F-F')}{M} \quad (2)$$

Δίσκος: $\Sigma F_y = M\alpha_{cm} \Rightarrow F' - Mg = M\alpha_{cm}$

$$\Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{F' - Mg}{M} \quad (3)$$

$$\Sigma\tau = I_{\delta\iota\sigma}\,\alpha_{2\gamma\omega\nu} \Rightarrow F'R = \frac{1}{2}MR^2\alpha_{2\gamma\omega\nu} \Rightarrow F' = \frac{1}{2}MR\,\alpha_{2\gamma\omega\nu}$$

$$\Rightarrow \alpha_{2\gamma\omega\nu} = \frac{2F'}{MR} \quad (4)$$

$$(1) \xrightarrow{2,3,4} \frac{2(F-F')}{M} = \frac{2F'}{MR} + \frac{F'-Mg}{M} \Rightarrow 2F - 2F' = 2F' + F' - Mg$$

$$\Rightarrow 2F + Mg = 5F' \Rightarrow F' = \frac{2F+Mg}{5} \quad (5) \Rightarrow F' = \frac{2\cdot 205 + 10\cdot 10}{5}$$

$$\Rightarrow \boxed{F' = 102N}$$

$$(2) \Rightarrow \alpha_{1\gamma\omega\nu} = \frac{2(F-F')}{MR} = \frac{2(205-102)}{10\cdot 0{,}2} \Rightarrow \boxed{\alpha_{1\gamma\omega\nu} = 103\ rad/s^2}$$

$$(4)\quad \alpha_{2\gamma\omega\nu} = \frac{2F'}{MR} = \frac{2\cdot 102}{10\cdot 0{,}2} \Rightarrow \boxed{\alpha_{2\gamma\omega\nu} = 102\ \frac{rad}{s^2}}$$

$$(3)\quad \alpha_{cm} = \frac{F'-Mg}{M} \Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{102 - 10\cdot 10}{10} \Rightarrow \boxed{\alpha_{cm} = 0{,}2\ m/s^2}$$

β) προφανώς $F' > Mg \xrightarrow{(5)} \frac{2F+Mg}{5} > Mg \Rightarrow 2F + Mg > 5Mg \Rightarrow F > 2Mg$

$$\Rightarrow F > 2\cdot 10\cdot 10 \Rightarrow \boxed{F > 200N}$$

γ) $W_{F'} = W_{στροφ} + W_{μεταφ} = F' R\Delta\varphi + F\Delta y$

$$\left.\begin{aligned} \Delta y &= \tfrac{1}{2} a_{cm} t^2 \\ R\Delta\varphi &= R\tfrac{1}{2} a_{γων} t^2 \end{aligned}\right\} \frac{\Delta y}{R\Delta\varphi} = \frac{a_{cm}}{R\,a_{γων}} = \frac{1}{102} \Rightarrow \Delta y = \frac{R\Delta\varphi}{102}$$

$$\Rightarrow W_{F'} = F'\left(R\Delta\varphi + \frac{R\Delta\varphi}{102}\right) \Rightarrow W_{F'} = F'\frac{103 R\Delta\varphi}{102}$$

Και άλλα το μήκος νήματος $\Delta\ell$ που ξετυλίγεται ισούται με $\Delta S_{\text{περιφέρειας επαφής}} = R\Delta\varphi \Rightarrow \Delta\ell = R\Delta\varphi$

$$\Rightarrow W_{F'} = F'\cdot\frac{103}{102}\Delta\ell \xrightarrow{F'=102N} \boxed{W_{F'} = 103\Delta\ell} \text{ (S.I.)}$$

δ) $I_{δίσκου} = \frac{1}{2}MR^2 = \frac{1}{2}10\cdot 0{,}2^2 = 5\cdot 0{,}04 = 0{,}2\ kgm^2$

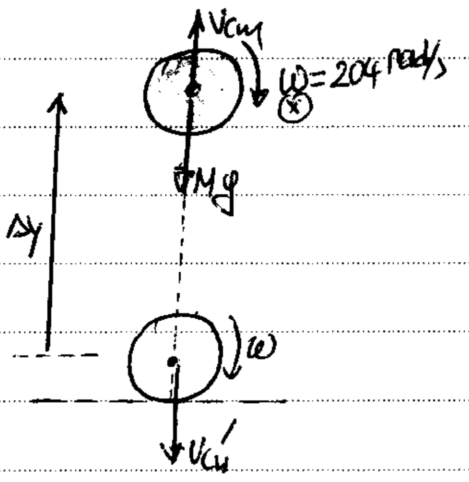
$L = I\cdot\omega \Rightarrow \omega = \frac{L}{I} \Rightarrow \omega = \frac{40{,}8}{0{,}2} \Rightarrow \omega = 204\ rad/s$

$\omega = a_{γων} t \Rightarrow t = \frac{\omega}{a_{γων}} = \frac{204\ rad/s}{102\ rad/s^2} \Rightarrow t = 2s$

$\Delta y = \frac{1}{2} a_{cm} t^2 = \frac{1}{2}0{,}2\cdot 2^2 \Rightarrow \Delta y = 0{,}4m$

$V_{cm} = a_{cm} t = 0{,}2\cdot 2 = 0{,}4\ m/s$

Μόλις κόπηκε το νήμα



Αμέσως μετά μοναδική δύναμη είναι το βάρος $\Sigma F_y = Mg$ και $\Sigma\tau = 0$ ...

— Μεταφορική κίνηση: κατακόρυφη βολή προς τα πάνω

... $V'_{cm} = \sqrt{V_{cm}^2 + 2g\Delta y} = \sqrt{0{,}4^2 + 2\cdot 10\cdot 0{,}4} = \sqrt{8{,}16}\ m/s$

— Στροφική κίνηση: ομαλή

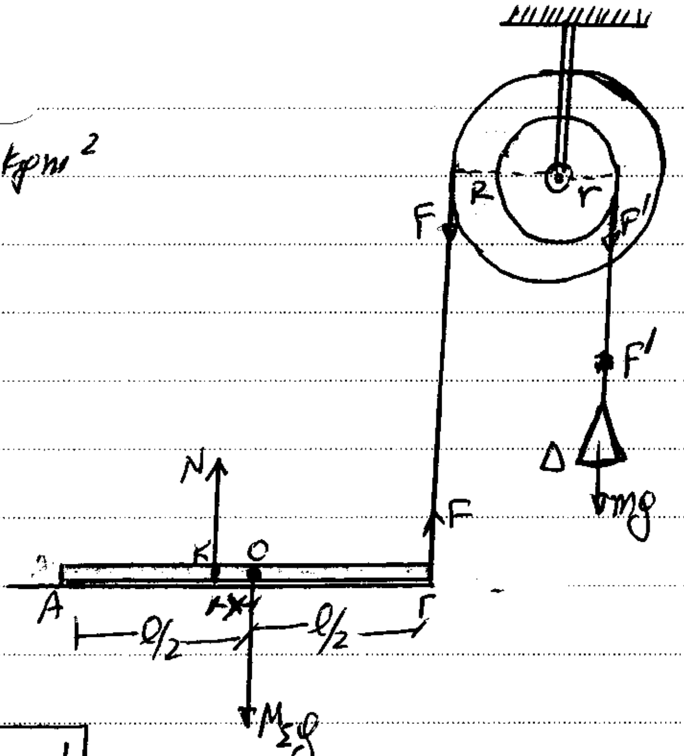
$$K = \frac{1}{2}MV'^2_{cm} + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}10\cdot 8{,}16 + \frac{1}{2}0{,}2\cdot 204^2 \Rightarrow K = 40{,}8J + 4161{,}6J$$

$$\Rightarrow \boxed{K = 4202{,}4J}$$

9.77

$R=2r=0,2m$, $m=1kg$ $I=0,04\,kgm^2$

$M_\Sigma=5kg$, $\ell=0,90m$



α) Ισορροπία δοχείου Δ

$\Sigma F_y=0 \Rightarrow mg=F' \Rightarrow F'=10N$

Ισορροπία τροχαλίας

$\Sigma\tau=0 \Rightarrow F'r=FR$

$\Rightarrow F'r=F2r$

$\Rightarrow F=\frac{F'}{2} \Rightarrow F=5N$ ✓

β) Ισορροπία σανίδας

$\Sigma F_y=0 \Rightarrow N+F=M_\Sigma g \Rightarrow \boxed{N=45N}$

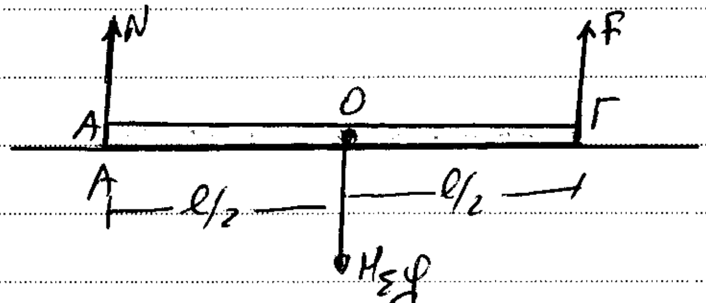
$\Sigma\tau_{(O)}=0 \Rightarrow Nx=F\frac{\ell}{2} \Rightarrow 45x=F\frac{0,90}{2} \Rightarrow x=0,05m$ ✓

γ) προσοχή!

→ όσο μεγαλώνει η δύναμη F η σανίδα τείνει να ανασηκωθεί και η δύναμη στήριξης μετακινείται προς το άκρο A. Όταν η σανίδα είναι έτοιμη για ανασήκωση η $\vec{N}$ έχει σημείο εφαρμογής το A

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma F_y=0 \Rightarrow N+F=Mg \\ \Sigma\tau_{(O)}=0 \Rightarrow N\frac{\ell}{2}=F\frac{\ell}{2} \\ \Rightarrow N=F\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2F=Mg \Rightarrow \boxed{F=25N}$



Ισορροπία τροχαλίας: $\Sigma\tau=0 \Rightarrow FR=F'r \Rightarrow FR=F'\frac{R}{2}$

$\Rightarrow F'=2F \Rightarrow F'=50N$

Ισορροπία δίσκου-βαρών: $\Sigma F_y=0 \Rightarrow F'=mg+n'mg$

$\Rightarrow 50=10+n'10 \Rightarrow \underline{n'=4 \text{ βαράκια}}$ ✓

δ, ε, στ)

Σχέσεις επιταχύνσεων

$υ_Δ = υ_Z = ωr \Rightarrow \boxed{a_Δ = r a_{γων}}$

$\hookrightarrow \frac{dυ_Δ}{dt} = r\frac{dω}{dt}$

Μόλις ανασηκώνεται (οριακά) η

$υ_A = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow υ_{cm} = ω' \frac{\ell}{2} \Rightarrow \frac{dυ_{cm}}{dt} = \frac{\ell}{2}\frac{dω'}{dt}$

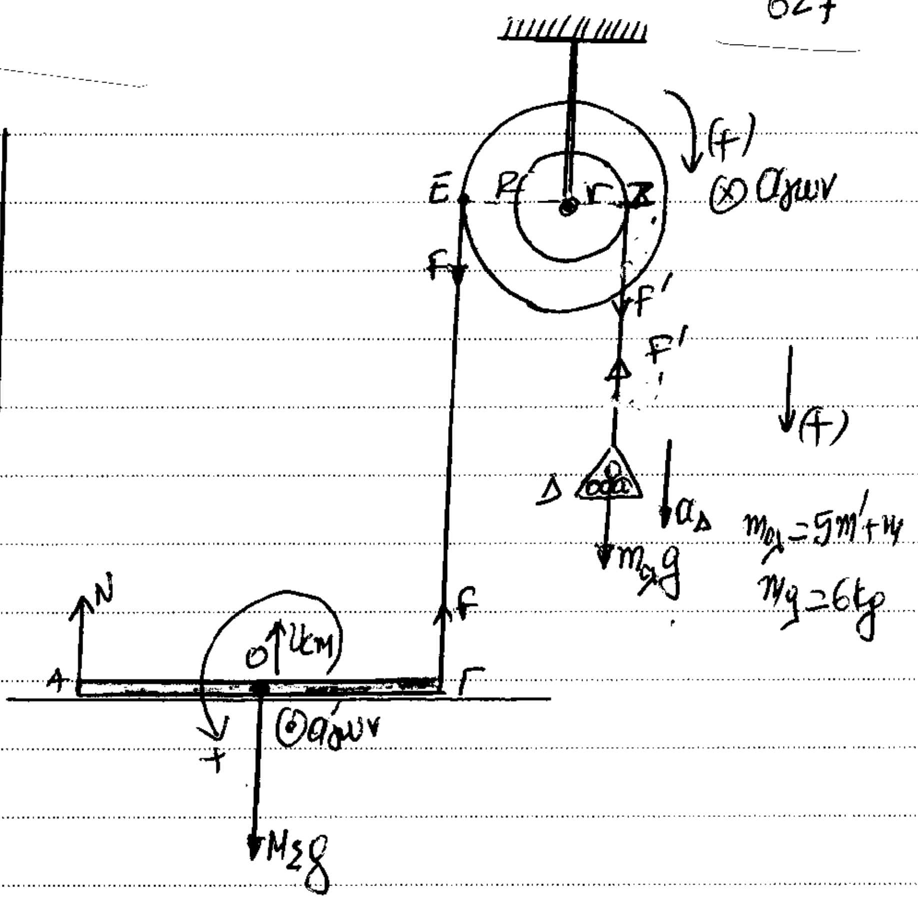
$\Rightarrow \boxed{a_{cm} = \frac{\ell}{2} a'_{γων}}$

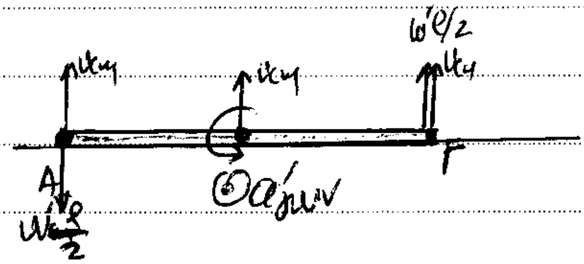
$υ_Γ = υ_{cm} + ω'\frac{\ell}{2} = 2υ_{cm} = \dots = υ_E$

$\Rightarrow 2υ_{cm} = ωR \Rightarrow 2\frac{dυ_{cm}}{dt} = R\frac{dω}{dt}$

$\Rightarrow 2a_{cm} = 2r\cdot a_{γων}$

$\Rightarrow \boxed{a_{cm} = a_Δ}$





Δοχείο: $ΣF_y = m_{ολ} a_Δ \Rightarrow m_{ολ} g - F' = m_{ολ} a_Δ$ (1)

Τροχαλία: $Στ = I a_{γων} \Rightarrow F'r - FR = I\frac{a_Δ}{r} \Rightarrow F' - \frac{FR}{r} = \frac{I}{r^2} a_Δ \Rightarrow$

$\Rightarrow F' - 2F = \frac{I}{r^2} a_Δ$ (2)

Σανίδα $\begin{cases} ΣF_y = M_Σ a_{cm} \Rightarrow F + N - M_Σ g = M_Σ a_{cm} \\ Στ_{(0)} = I_0 a'_{γων} \Rightarrow F\frac{\ell}{2} - N\frac{\ell}{2} = \frac{1}{12} M_Σ \ell^2 \frac{2a_{cm}}{\ell} \Rightarrow F - N = \frac{1}{3} M_Σ a_{cm} \end{cases} +$

$2F - M_Σ g = \frac{4}{3} M_Σ a_{cm} \Rightarrow 2F - M_Σ g = \frac{4}{3} M_Σ a_Δ$ (3)

$(1) + (7) + (3) \Rightarrow m_{ολ} g - M_Σ g = \left(m_{ολ} + \frac{I}{r^2} + \frac{4}{3} M_Σ\right) a_Δ \Rightarrow$

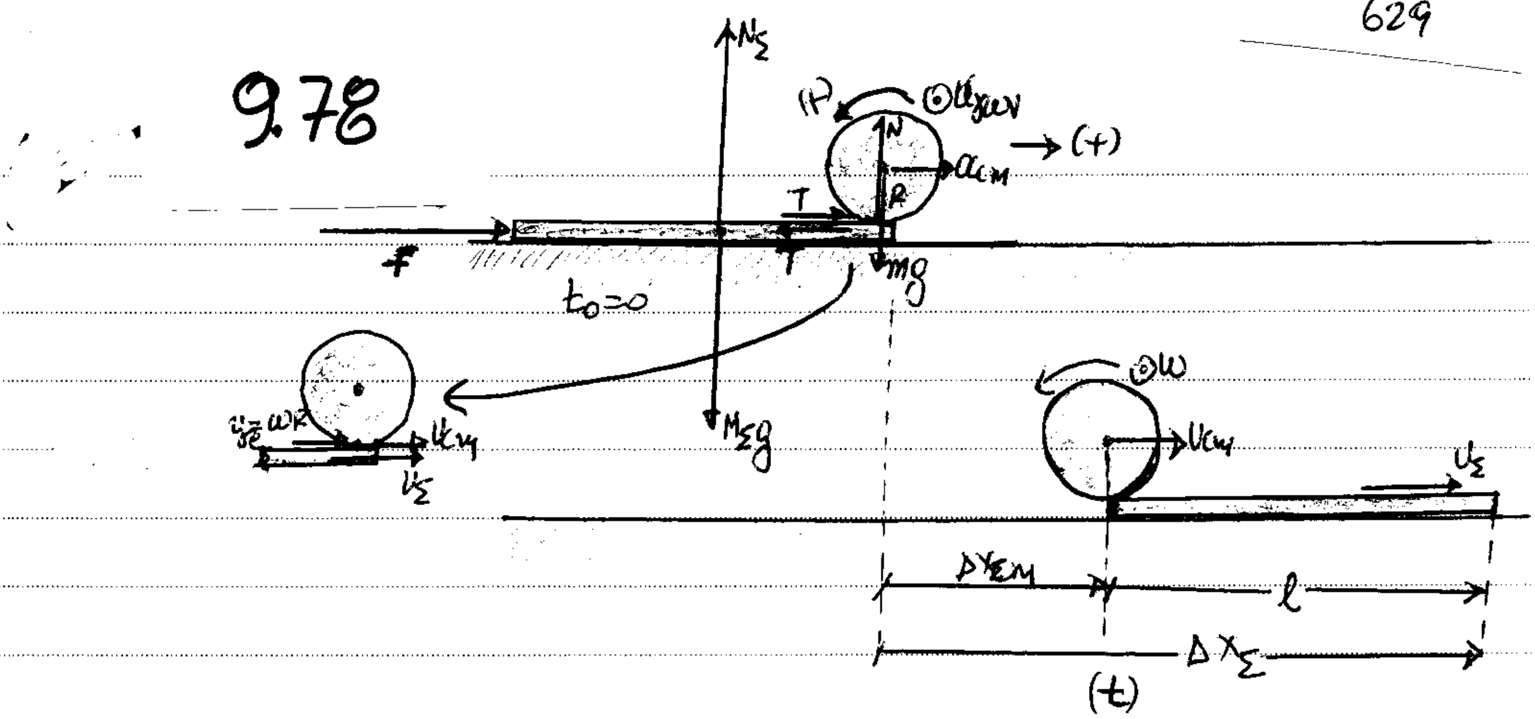
$\Rightarrow 6\cdot 10 - 5\cdot 10 = \left(6 + \frac{0{,}04}{0{,}01} + \frac{4}{3}\cdot 5\right) a_Δ \Rightarrow$

$$\Rightarrow 10 = \left(6+4+\frac{20}{3}\right) a_\Delta \Rightarrow 10 = \frac{50}{3} a_\Delta \Rightarrow 30 = 50 a_\Delta \Rightarrow \boxed{a_\Delta = 0{,}6\, m/s^2}$$

$$a_{cm} = a_\Delta \Rightarrow \boxed{a_{cm} = 0{,}6\, m/s^2}$$

$$a_\Delta = r\, a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = \frac{a_\Delta}{r} = \frac{0{,}6}{0{,}1} \Rightarrow \boxed{a_{\gamma\omega\nu} = 6\, rad/s^2}$$

9.78



α) Μόλις αρχίζει η δράση της $\vec{F}$ στη σανίδα αυτή κινείται προς τα δεξιά και δέχεται τριβή T από τον κύλινδρο προς τα αριστερά, άρα η τριβή T που δέχεται ο κύλινδρος είναι προς τα δεξιά.
Ο κύλινδρος εκτελεί μεταφορική και στροφική κίνηση (κύλιση) πάνω στη σανίδα.
Για να μην ολισθαίνει ως προς τη σανίδα (όχι να μην μετακινείται ως προς τη σανίδα!) πρέπει το κατώτερο σημείο του να έχει την ίδια ταχύτητα με τη σανίδα, άρα

$$v_Σ = v_{cm} + v_{γρ} = v_{cm} + ωR \Rightarrow \frac{dv_Σ}{dt} = \frac{dv_{cm}}{dt} + R\frac{dω}{dt} \Rightarrow α_Σ = α_{cm} + Rα_{γων}$$

$$\Rightarrow α_Σ = α_{cm} + Rα_{γων} \quad (1)$$

Σανίδα: $ΣF_x = M_Σ α_Σ \Rightarrow F - T = M_Σ α_Σ \Rightarrow α_Σ = \frac{F-T}{M_Σ}$ (2)

Κύλινδρος: $ΣF_x = m α_{cm} \Rightarrow T = m α_{cm} \Rightarrow α_{cm} = \frac{T}{m}$ (3)

$Στ = I α_{γων} \Rightarrow T \cdot \cancel{R} = \frac{1}{2} m R^{\cancel{2}} α_{γων} \Rightarrow Rα_{γων} = \frac{2T}{m}$ (4)

$\xrightarrow[(4)]{(2),\,(3)} (1) \Rightarrow \frac{F-T}{M_\Sigma} = \frac{T}{m} + \frac{2T}{m} \Rightarrow \frac{F-T}{M_\Sigma} = \frac{3T}{m} \Rightarrow$

$\Rightarrow F\cdot m - Tm = 3TM_\Sigma \Rightarrow Fm = (m+3M_\Sigma)T \Rightarrow T = \frac{F\cdot m}{m+3M_\Sigma}$ (5)

Για να μην υπάρχει ολίσθηση πρέπει η T να είναι στατική
$T \le \mu_s N \xrightarrow{N=mg} T \le \mu_s mg \xrightarrow{(5)} \frac{Fm}{m+3M_\Sigma} \le \mu_s mg \Rightarrow F \le \mu_s g(m+3M_\Sigma)$

$\Rightarrow \mu_s \ge \frac{F}{g(m+3M_\Sigma)} \Rightarrow \mu_s \ge \frac{150N}{10 m/s^2 \cdot (5+3\cdot 15)kg} \Rightarrow \boxed{\mu_s \ge 0{,}3}$

β) $(5) \Rightarrow T = \frac{150N \cdot 5kg}{50kg} \Rightarrow \boxed{T = 15N}$

γ) Επειδή $\mu = 0{,}2 < 0{,}3$ έχουμε κύλιση πάνω στη σανίδα με ολίσθηση. Τώρα η τριβή είναι $T = \mu_s N = \mu m g$
$\Rightarrow T = 0{,}2\cdot 5\cdot 10 \Rightarrow T = 10N$

Σανίδα $\Sigma F_x = M_\Sigma \alpha_\Sigma \Rightarrow F - T = M_\Sigma \alpha_\Sigma \Rightarrow \alpha_\Sigma = \frac{F-T}{M_\Sigma} = \frac{150-10}{15}\frac{N}{kg}$

$\Rightarrow \alpha_\Sigma = \frac{28}{3} m/s^2$

Κύλινδρος: $\Sigma F_x = M\alpha_{cm} \Rightarrow T = m\alpha_{cm} \Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{T}{m} \Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{10N}{5kg}$

$\Rightarrow \alpha_{cm} = 2 m/s^2$

$\Sigma\tau = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T\cancel{R} = \frac{1}{2} m R^{\cancel{2}} \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{2T}{mR} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{2\cdot 10}{5\cdot 0{,}2}$

$\Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = 20\, rad/s^2$

Από το σχήμα φαίνεται ότι μόλις πέφτει ο κύλινδρος $\Delta x_\Sigma - \Delta x_{cm} = \ell \Rightarrow \frac{1}{2}\alpha_\Sigma t^2 - \frac{1}{2}\alpha_{cm} t^2 = \ell \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(\alpha_\Sigma - \alpha_{cm})t^2 = \ell \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2\ell}{\alpha_\Sigma - \alpha_{cm}}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow t=\sqrt{\frac{2\cdot 1{,}32}{\frac{28}{3}-2}} \Rightarrow t=\sqrt{\frac{6\cdot 1{,}32}{22}} \Rightarrow \boxed{t=0{,}6s}$$ V

δ) Στο χρόνο των 0,6 s ...

$\Delta x_{cm}=\frac{1}{2}a_{cm}t^2=\frac{1}{2}2\cdot 0{,}6^2=0{,}36m$, $v_{cm}=a_{cm}t=2\cdot 0{,}6=1{,}2\,m/s$

$\Delta x_\Sigma=\frac{1}{2}a_\Sigma t^2=\frac{1}{2}\frac{28}{3}0{,}6^2=1{,}68m$, $v_\Sigma=a_\Sigma t=\frac{28}{3}0{,}6=5{,}6\,m/s$

$\Delta\varphi=\frac{1}{2}a_{\gamma\omega\nu}t^2=\frac{1}{2}20\cdot 0{,}6^2=3{,}6\,rad$, $\omega=a_{\gamma\omega\nu}t=20\cdot 0{,}6=12\,rad/s$

$I_{\kappa\upsilon\lambda}=\frac{1}{2}mR^2=\frac{1}{2}5\,0{,}2^2 \Rightarrow I_{\kappa\upsilon\lambda}=0{,}1\,kg\,m^2$

$K_{\kappa\upsilon\lambda}=\frac{1}{2}Mv_{cm}^2+\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}5\cdot 1{,}2^2+\frac{1}{2}0{,}1\cdot 12^2 \Rightarrow K_{\kappa\upsilon\lambda}=10{,}8J$

$W_{T_{\kappa\upsilon\lambda}}=T\cdot\Delta x_{cm}+TR\Delta\varphi=T(\Delta x_{cm}+R\Delta\varphi)=10\cdot(0{,}36+0{,}2\cdot 3{,}6)\Rightarrow$

$\Rightarrow W_{T_{\kappa\upsilon\lambda}}=+10{,}8J$ (! θετικό έργο !)

$K_{\sigma\alpha\nu}=\frac{1}{2}M_\Sigma v_\Sigma^2=\frac{1}{2}15\,kg\,(5{,}6\,m/s)^2 \Rightarrow K_{\Sigma\alpha\nu}=235{,}2J$

$W_F=F\Delta x_\Sigma=150\cdot 1{,}68=252J$

$W_{T_{\Sigma\alpha\nu}}=-T\cdot\Delta x_\Sigma=-10\cdot 1{,}68=-16{,}8J$

Θερμότητα $Q=|W_T|=|+10{,}8J-16{,}8J|=6J \Rightarrow Q=6J$

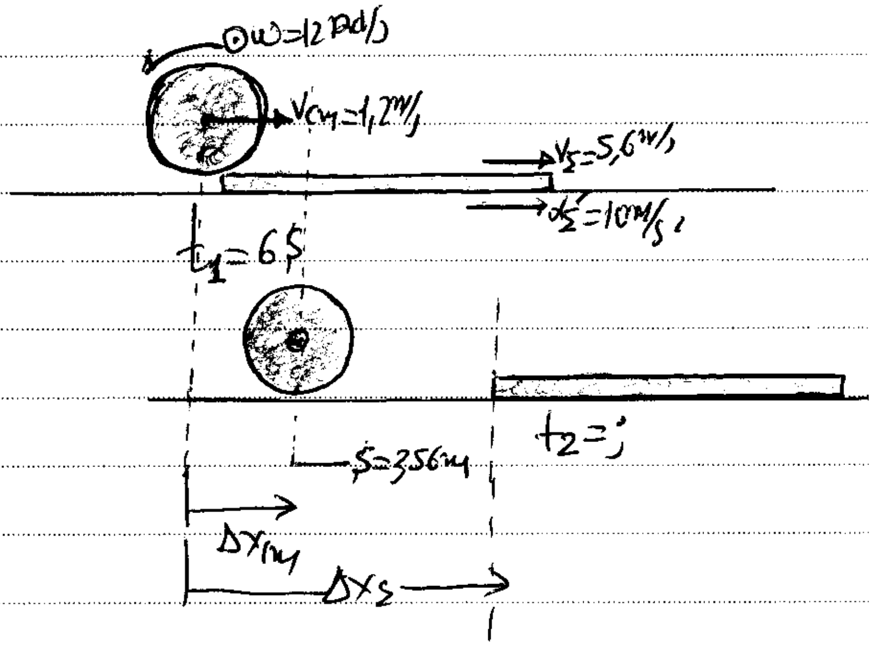
... Το ενεργειακό ισοζύγιο

Ενέργεια που προσφέρθηκε μέσω του έργου της F $\xrightarrow{\text{έγινε}}$ $E_{\pi\rho\sigma\sigma}=W_F=252J$

- Κινητική ενέργεια σανίδας $K_\Sigma=235{,}2J$
- Κινητική κυλίνδρου $K_{\kappa\upsilon\lambda}=10{,}8J$
- Θερμική → θερμότητα $Q=6J$

άρα $\boxed{Q=6\,Joule}$ ✓

ε) Μόλις ο κύλινδρος πέφτει στο δάπεδο επειδή δεν υπάρχει ροπή συνεχίζει ομαλή μεταφορική με $u_{cm}=1,2\,m/s$ και ομαλή στροφική με $\omega=12\,rad/s$.
Η σανίδα συνεχίζει με επιτάχυνση $a_\Sigma'=\frac{F}{M_\Sigma}=\frac{150N}{15kg}$
$\Rightarrow a_\Sigma'=10\,m/s^2$



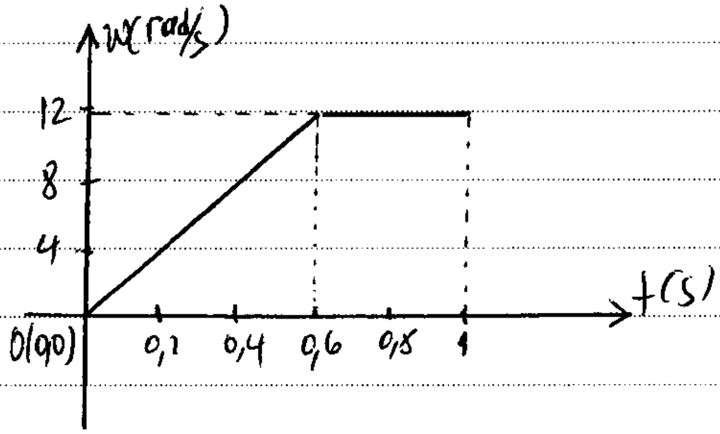
$\Delta x_\Sigma - \Delta x_{cm} = S$

$\Rightarrow v_\Sigma \Delta t + \frac{1}{2} a_\Sigma \Delta t^2 - v_{cm}\Delta t = S$

$\Rightarrow \frac{1}{2} a_\Sigma \Delta t^2 + (v_\Sigma - v_{cm})\Delta t - S = 0$

$\Rightarrow 5\cdot\Delta t^2 + 4,4\Delta t - 2,56 = 0$

$\ldots \Rightarrow \Delta t = 0,4\,s \rightarrow t_2 = 0,6+0,4 = 1\,s$



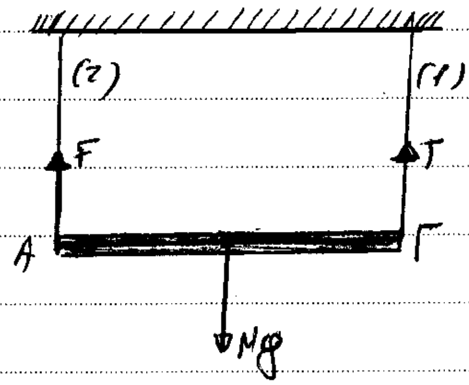
9.79

Αρχική κατάσταση

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F + T = Mg$

$\Sigma\tau_{(O)} = 0 \Rightarrow F\frac{\ell}{2} = T\frac{\ell}{2} \Rightarrow F = T$ } $\Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{F = \frac{Mg}{2}}$ (1)

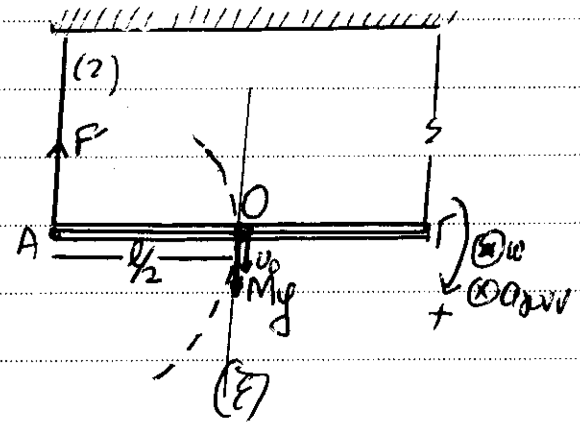


Αμέσως μετά το κόψιμο του νήματος

— Η ράβδος στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το Α και έχει γωνιακή επιτάχυνση $a_{γων}$.

$\Sigma\tau_{(A)} = I_A \cdot a_{γων} \Rightarrow$

$\Rightarrow Mg\frac{\ell}{2} = \frac{1}{3}M\ell^2 a_{γων} \Rightarrow a_{γων} = \frac{3g}{2\ell}$



— Το CM (O) εκτελεί κυκλική κίνηση γύρω από το Α. Για την μελέτη του CM θεωρούμε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο ότι έχουν σημείο εφαρμογής το O και όλη τη μάζα της συγκεντρωμένη στο O

$\Sigma F_\varepsilon = m a_\varepsilon \Rightarrow mg - F' = m a_\varepsilon$

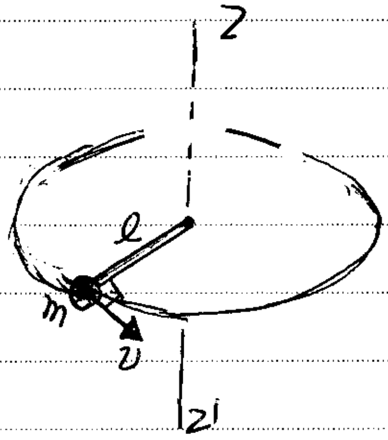
$a_\varepsilon = \frac{dv_0}{dt} = \frac{d(\omega\ell/2)}{dt} = \frac{\ell}{2}a_{γων}$ } $mg - F' = m\frac{\ell}{2}a_{γων} \Rightarrow$

$\Rightarrow mg - F' = m\frac{\ell}{2}\frac{3g}{2\ell} = \frac{3}{4}mg$

$\Rightarrow F' = \frac{1}{4}mg$ (2)

$\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow \frac{F'}{F} = \frac{\frac{1}{4}mg}{\frac{1}{2}mg} \Rightarrow F' = \frac{F}{2}$ ... υποδιπλασιάζεται άρα σωστή η πρόταση (β)

9.80



α) $\omega = \lambda t \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu\ \sigma\upsilon\sigma\tau} = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow$

$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{d(\lambda t)}{dt} = \lambda = \sigma\tau\alpha\theta$

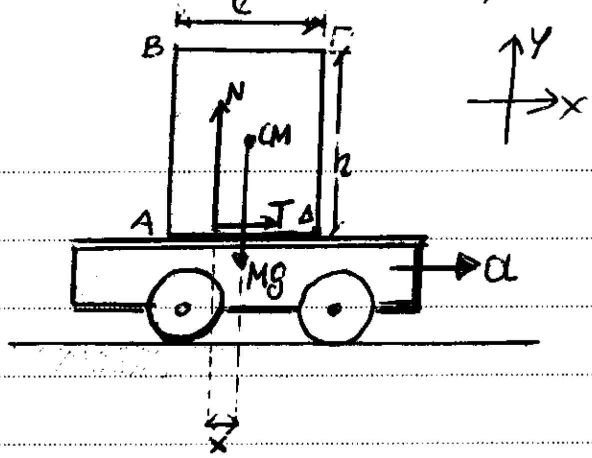
$\Sigma \tau_{\varepsilon\xi\omega\tau} = I_{\sigma\varphi\alpha\iota\rho} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} = m\ell^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} = \sigma\tau\alpha\theta \Rightarrow$ α-λάθος

β) $L_{\sigma\varphi\alpha\iota\rho} = m\upsilon\ell = m\omega\ell^2 = m(\lambda t)\ell^2 \neq \sigma\tau\alpha\theta \Rightarrow$ β-σωστό

γ) $K_{\sigma\varphi} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}m(\omega\ell)^2 = \frac{1}{2}m\ell^2(\lambda t)^2 = \sigma\tau\alpha\theta \cdot t^2 \Rightarrow$ γ-λάθος

δ) $\alpha_{\kappa} = \omega^2\ell = (\lambda t)^2\ell = \sigma\tau\alpha\theta\ t^2 \Rightarrow$ δ-λάθος

9.81



α) Εφόσον δεν υπάρχει ολίσθηση ή ανατροπή το κιβώτιο μεταφέρεται για ακίνητο παρατηρητή με την επιτάχυνση $\vec{a}$ του αυτοκινήτου, άρα

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = Mg$ (1)

$\Sigma F_x = Ma \Rightarrow T = Ma$ (2)

Για να μην ολισθαίνει πρέπει η $\vec{T}$ να είναι στατική $T \le \mu_s N$

$\overset{1,2}{\Rightarrow} Ma \le \mu M g \Rightarrow a \le \mu g \Rightarrow a \le 0,5 \cdot 10 \Rightarrow \boxed{a \le 5 m/s^2}$

Για να μην ανατρέπεται πρέπει $\Sigma \tau_{CM} = 0$

$\Rightarrow N \cdot x = T \cdot \frac{h}{2} \Rightarrow x = \frac{Th}{2N} \overset{1,2}{\Rightarrow} x = \frac{Mah}{2Mg}$

[αυστηρά ως προς CM. Υπάρχει επιτάχυνση, το σύστημα είναι μη αδρανειακό]

$\Rightarrow x = \frac{ah}{2g}$ (3)

Για να μην ανατρέπεται πρέπει το σημείο εφαρμογής της $\vec{N}$ να είναι δεξιότερα του Α $\Rightarrow x \le \frac{\ell}{2} \overset{(3)}{\Rightarrow} \frac{ah}{2g} \le \frac{\ell}{2} \Rightarrow a \le \frac{g\ell}{h}$

$\Rightarrow a \le \frac{10 m/s^2 \cdot 1m}{2m} \Rightarrow \boxed{a \le 5 m/s^2}$

β) Αν $a = 3 m/s^2$ δεν υπάρχει ούτε ολίσθηση ούτε ανατροπή,

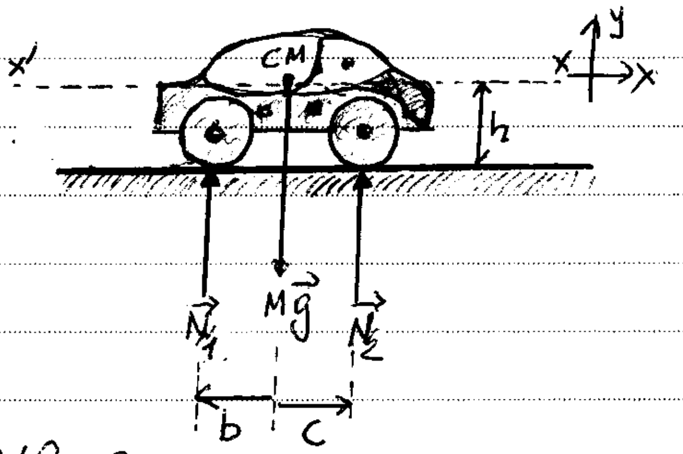
$N = Mg = 10000 N$ και $T = Ma = 3000 N$

$\tau_{T,CM} = T \cdot \frac{h}{2} = 3000 N \cdot 1m = 3000 Nm$

γ) $N = 10000N$, $x = \frac{ah}{2g} = \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 10} \Rightarrow \boxed{x = 0,3m}$

$\tau_{N(A)} = N\left(\frac{\ell}{2} - x\right) = 10000N \cdot (0,5 - 0,3)m = 2000 Nm$

9.82



α) $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_1 + N_2 = Mg$
$\Sigma \tau_{[CM]} = 0 \Rightarrow N_1 b = N_2 c \Rightarrow N_2 = \frac{b}{c} N_1$ ⇒

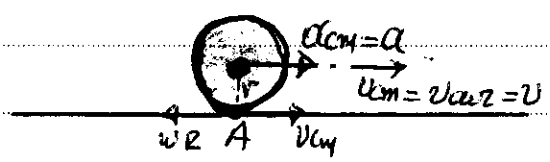
$\Rightarrow \frac{b}{c} N_1 + N_1 = Mg \Rightarrow N_1 \frac{b+c}{c} = Mg$

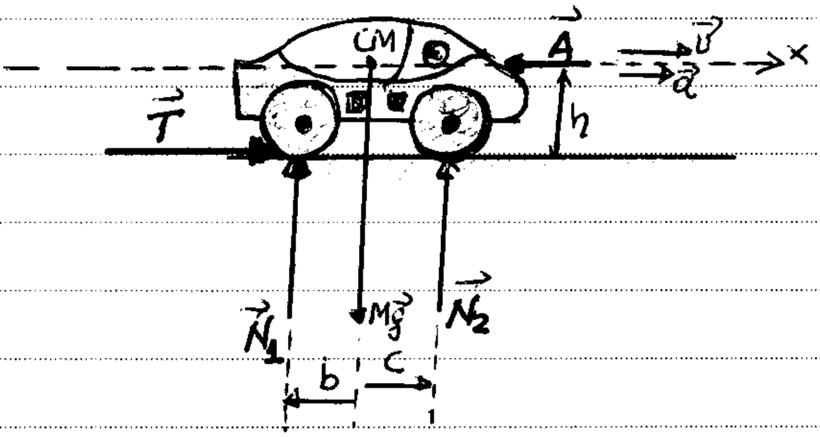
$\Rightarrow N_1 = \frac{c}{b+c} Mg \Rightarrow N_1 = \frac{1{,}5}{2{,}5} 1900 \cdot 10$

$N_2 = \frac{b}{b+c} Mg \Rightarrow N_2 = \frac{1}{2{,}5} 1900 \cdot 10$

$\Rightarrow \underline{N_1 = 11400N} \wedge \underline{N_2 = 7600N}$

β)





Το κέντρο μάζας του τροχού
έχει μόνο μεταφορική
κίνηση, αυτή του
αυτοκινήτου και συνεπώς
θα έχει $\alpha_{cm} = \alpha$, $v_{cm} = v = v_{αυτ}$
Το σημείο επαφής A θα έχει $v_A = 0 \Rightarrow v_{cm} = \omega R$
$\Rightarrow \alpha_{cm} = r \cdot \alpha_{γων} \Rightarrow \alpha = r \cdot \alpha_{γων} \Rightarrow \alpha_{γων} = \frac{\alpha}{r} \Rightarrow \alpha_{γων} = \frac{4 m/s^2}{0{,}25 m}$

$\Rightarrow \boxed{\alpha_{γων} = 16 \, rad/s^2}$

γ) $\Sigma \vec{F_x} = M\vec{\alpha} \Rightarrow T_{στατ} - A = M\alpha \Rightarrow T_{στατ} = M\alpha + A \Rightarrow$
$T_{στατ} = M\alpha + 20v \Rightarrow T_{στατ} = 1900 \cdot 4 + 20 \cdot 20 \Rightarrow \underline{T_{στατ} = 8000N}$

... και σε κάθε ένα από τους δύο τροχούς προκύπτει $T' = 4000N$.

δ) $\Sigma \tau_{CM} = 0 \Rightarrow N_1 b = N_2 c + Th$

└→ αυθαίρετα ως προς CM ... το σύστημα είναι γωνιακά ισορροπημένο...

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_1 + N_2 = Mg$

$$\left.\begin{aligned} N_1 b - N_2 c &= Th \\ N_1 c + N_2 c &= Mg\,c \end{aligned}\right\} (+)$$

$$N_1[b+c] = Th + Mgc \Rightarrow N_1 = \frac{Th+Mgc}{b+c} \Rightarrow N_1 = \frac{8000\cdot 1 + 19000\cdot 1{,}5}{2{,}5}$$

$$\Rightarrow \boxed{N_1 = 14600N}$$

$$\left.\begin{aligned} N_1 b - N_2 c &= Th \\ -N_1 b - N_2 b &= -Mg\,b \end{aligned}\right\} (+)$$

$$-N_2[b+c] = -Mgb + Th \Rightarrow N_2 = \frac{-Th + Mgb}{b+c} \Rightarrow \dots \Rightarrow \boxed{N_2 = 4400N}$$

ε)

$$T_{στατ\,max} = \mu_s(N_1+N_2) = \mu_s Mg = 0{,}6\cdot 1900\cdot 10 \Rightarrow T_{στατ\,max} = 11400N$$

$$\Sigma F_x = Ma \Rightarrow T_{στατ} - A = Ma \Rightarrow a = \frac{T_{στατ} - 20v}{M}$$

└→ αυτή είναι η μέγιστη δύναμη

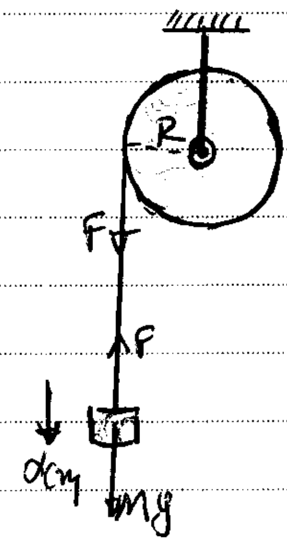
στο ξεκίνημα

$$\Rightarrow a_{max} = \frac{T_{στατ\,max} - 0}{M} \Rightarrow a_{max} = \frac{11400}{1900} \Rightarrow \boxed{a_{max} = 6\,m/s^2}$$

9.83

Μάζα M σώματος Σ	1Kg	2Kg	3Kg	4Kg	5Kg
Ύψος h σώματος Σ	95cm	90cm	85cm	80cm	75cm
Χρονική στιγμή t	0,332s	0,346s	0,360s	0,374s	0,387s
Τετράγωνο χρονικής στιγμής t^2	$0{,}11s^2$	$0{,}12s^2$	$0{,}13s^2$	$0{,}14s^2$	$0{,}15s^2$
Διάστημα Δh που διήνυσε το σώμα Σ	5cm	10cm	15cm	20cm	25cm
Επιτάχυνση σώματος a_{cm}	$\frac{10}{11}$	$\frac{20}{12}$	$\frac{30}{13}$	$\frac{40}{14}$	$\frac{50}{15}$
Αντίστροφο της επιτάχυνσης $1/a_{cm}$	1,10	0,60	0,43	0,35	0,30
Αντίστροφο της μάζας $1/M$	1,00	0,50	0,33	0,25	0,20

$a_{cm} = \frac{2h}{t^2}$



$$\left.\begin{array}{l} \Sigma F_y = M a_{cm} \Rightarrow Mg - F = M a_{cm} \\ \Sigma \tau = I a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow F R = I \cdot \frac{a_{cm}}{R} \Rightarrow F = \frac{I}{R^2} a_{cm} \end{array}\right\} +$$

$$Mg = \left(M + \frac{I}{R^2}\right) a_{cm} \Rightarrow$$

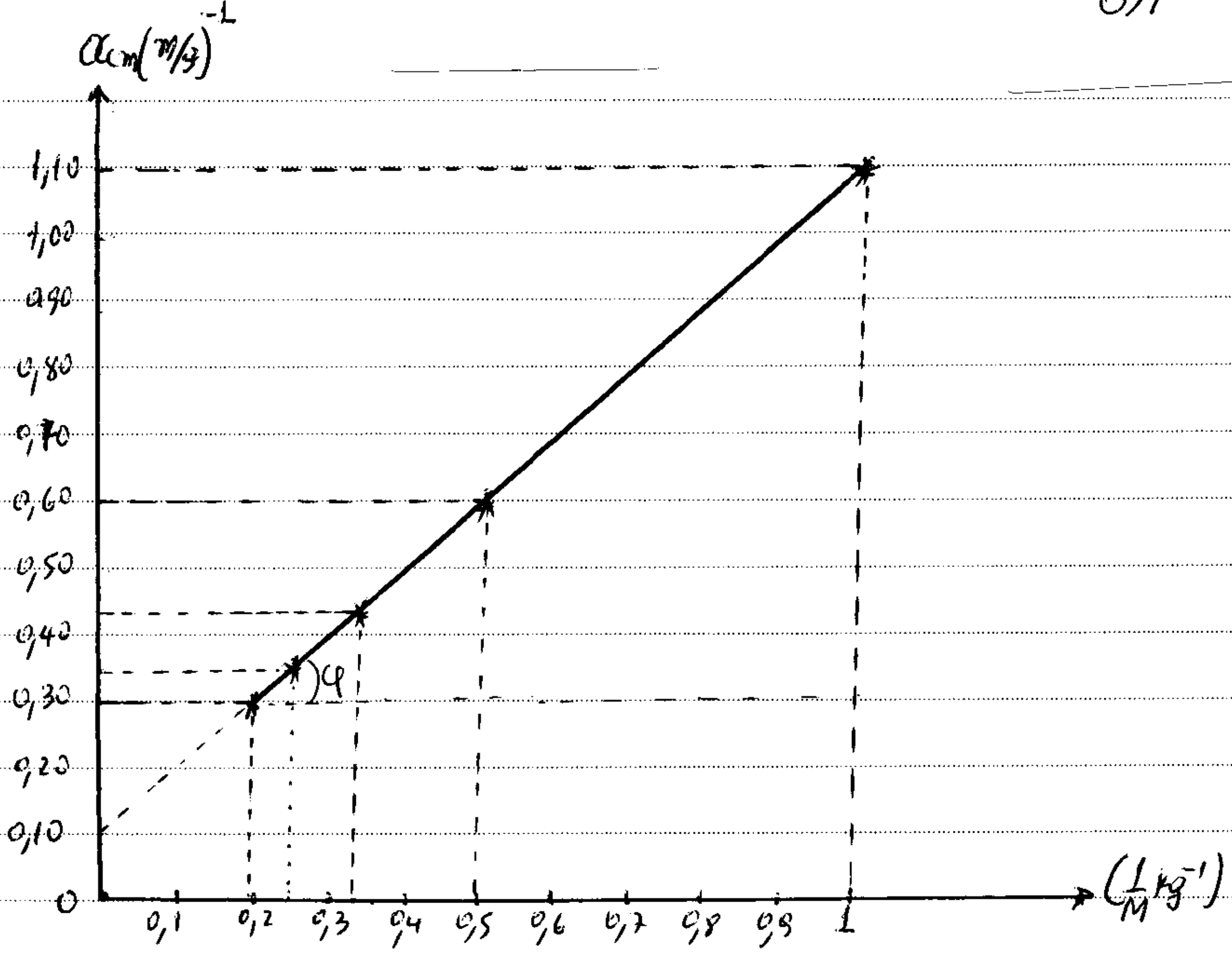
$$\Rightarrow MR^2 g = (MR^2 + I)\, a_{cm} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_{cm}} = \frac{MR^2 + I}{MR^2 g} = \frac{1}{g} + \frac{I}{R^2 g} \cdot \frac{1}{M}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_{cm}} = \frac{1}{g} + \frac{I}{gR^2} \cdot \frac{1}{M}$$

Η σχέση αυτή είναι .η. $\rightsquigarrow$ $\varepsilon\varphi\varphi = \frac{I}{gR^2}$

Από τη γραφική παράσταση βρίσκω την κλίση προφανώς βρίσκουμε το I



Η εξίσωση αυτής (ευθεία) είναι $\frac{1}{a_{cm}} = c_1 + c_2 \frac{1}{M}$

Για $\frac{1}{M} = 1 \Rightarrow \frac{1}{a_{cm}} = 1,1 \Rightarrow 1,1 = c_1 + c_2 \cdot 1$

Για $\frac{1}{M} = 0,5 \Rightarrow \frac{1}{a_{cm}} = 0,6 \Rightarrow \underline{0,6 = c_1 + c_2 \cdot 0,5}$

άρα από τις $c_1 = 0,1$, $c_2 = 1$

Άρα $\frac{1}{a_{cm}} = 0,1 + 1 \cdot \frac{1}{M}$

$\frac{1}{a_{cm}} = \frac{1}{g} + \frac{I}{gR^2}\frac{1}{M}$

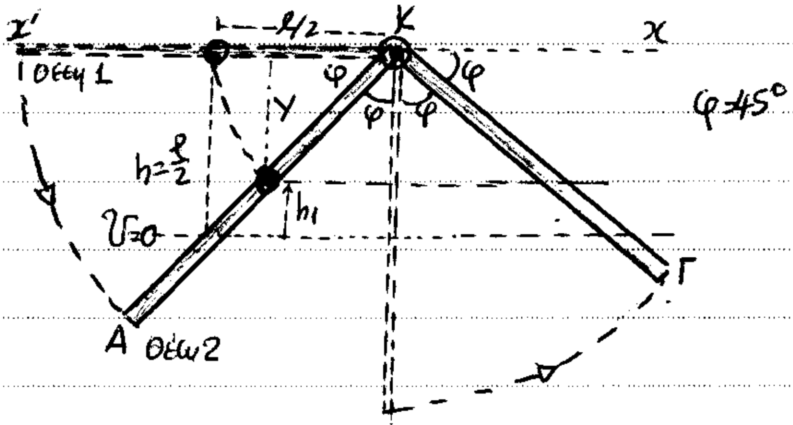
$\frac{1}{g} = 0,1 \Rightarrow g = 10\,m/s^2$

$\frac{I}{gR^2} = 1 \Rightarrow I = 10 \cdot 0,2^2$

$\Rightarrow I = 0,4\,kg\,m^2$

ή' $\varepsilon\varphi\varphi = \frac{\Delta(1/a_{cm})}{\Delta(1/M)} = \frac{1,10 - 0,30}{1 - 0,20} = \underline{1} = \dots = \frac{I}{gR^2} \Rightarrow$ - - -

9.84



α) $y=\frac{l}{2}\eta\mu\varphi=\frac{l}{2}\eta\mu 45$

$h_1=h-y=\frac{l}{2}-\frac{l}{2}\eta\mu 45$

$\Rightarrow h_1=\frac{l}{2}(1-\eta\mu 45^\circ)=\frac{1,2}{2}(1-\frac{\sqrt{2}}{2})$

$\Rightarrow h_1=0,176 m$

$I_{\rho\alpha\beta}=\frac{1}{3}ml^2=\frac{1}{3}2\cdot 1,2^2=0,96\ kgm^2$

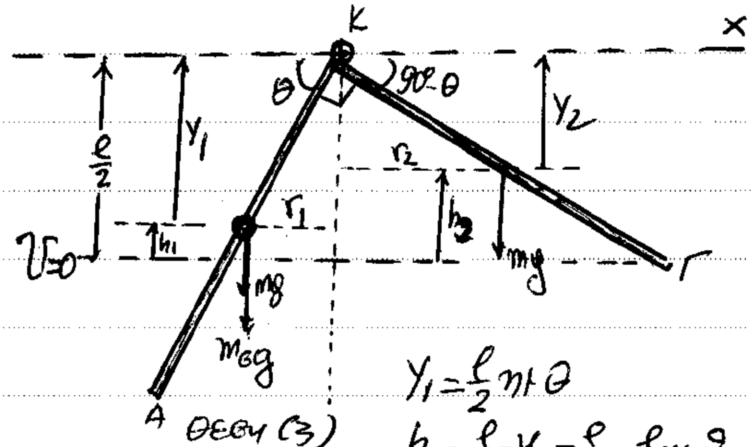
$I_{\sigma\varphi}=mr^2=m(\frac{l}{2})^2=2,5\cdot 0,6^2=0,90\ kgm^2$

$U_1=U_2+K_2 \Rightarrow m_{KA}gh+m_\sigma gh=m_{KA}gh_1+m_{K\Gamma}gh_1+m_\sigma gh_1+\frac{1}{2}I_\rho\omega^2\cdot 2+\frac{1}{2}I_{\sigma\varphi}\omega^2$

$\Rightarrow \omega=3,32\frac{rad}{s}$

$L_{o\lambda K\Gamma}=2L_{\rho\alpha\beta}+L_{\sigma\varphi}=[I_\rho\cdot\omega]\cdot 2+I_\sigma\omega=(2I_\rho+I_\sigma)\omega \Rightarrow L_{o\lambda K\Gamma}=9,36\ kgm^2/s$

β)



$\omega_{max}\Rightarrow \Sigma\tau_{(K)}=0$

$\Rightarrow mgr_1+m_\sigma gr_1=mgr_2$

$\Rightarrow mg\frac{l}{2}\sigma\upsilon\nu\theta+m_\sigma g\frac{l}{2}\sigma\upsilon\nu\theta=mg\frac{l}{2}\sigma\upsilon\nu(90-\theta)$

$\Rightarrow 2\sigma\upsilon\nu\theta+3,5\sigma\upsilon\nu\theta=2\eta\mu\theta$

$\Rightarrow 4,5\sigma\upsilon\nu\theta=2\eta\mu\theta\Rightarrow \varepsilon\varphi\theta=\frac{2}{4,5}$

$\varepsilon\varphi\theta=0,44\Rightarrow \varphi=66^\circ$

$Y_1=\frac{l}{2}\eta\mu\theta$

$h_1=\frac{l}{2}-Y_1=\frac{l}{2}-\frac{l}{2}\eta\mu\theta$

$Y_2=\frac{l}{2}\sigma\upsilon\nu\theta$

$h_2=\frac{l}{2}-\frac{l}{2}\sigma\upsilon\nu\theta$

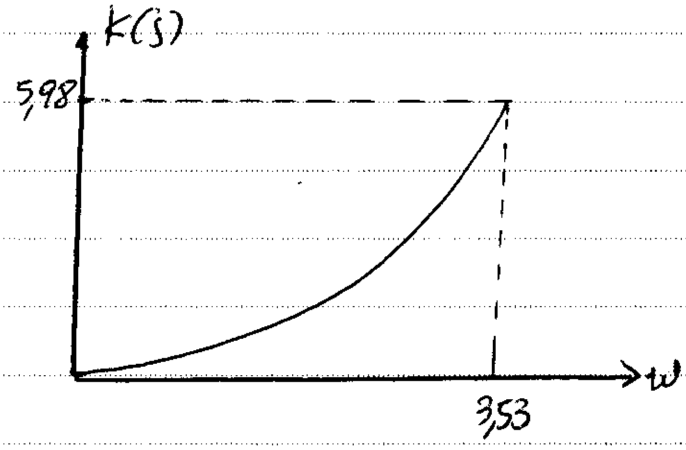
$E_{\mu\eta\chi}(1)=E_{\mu\eta\chi}(3)$

$m_{KA}g\frac{l}{2}+m_\sigma g\frac{l}{2}=m_{KA}gh_1+m_\sigma gh_1+m_{K\Gamma}gh_2+[\frac{1}{2}I_\rho\omega^2]\cdot 2+\frac{1}{2}I_{\sigma\varphi}\omega^2$

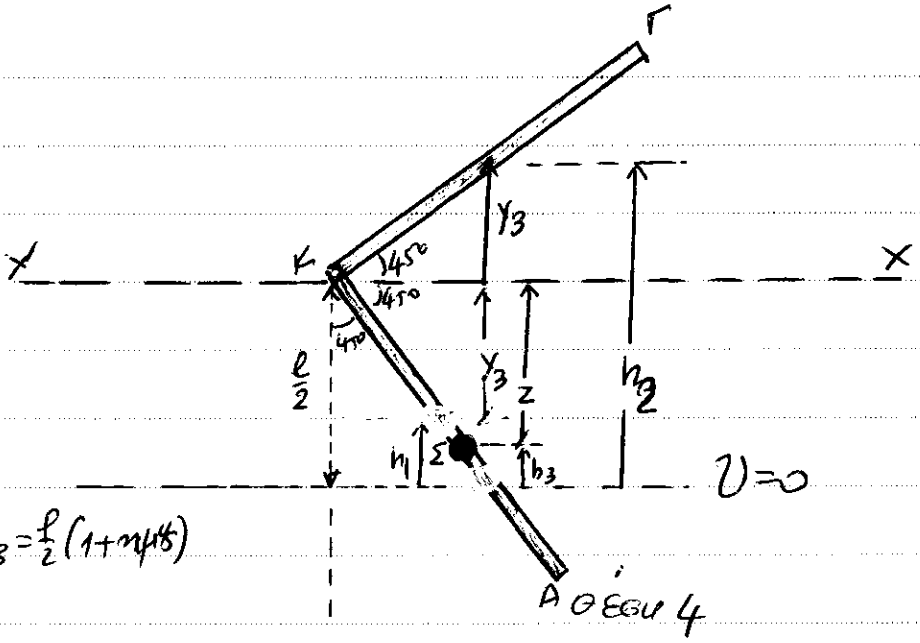
$\Rightarrow \dots \Rightarrow \omega=3,53\frac{rad}{s}$

γ) $K_{\alpha\rho\chi}=0$

$K_{max}=\frac{1}{2}I\omega^2=5,98 J$



δ)



$y_3 = \frac{\ell}{2}ημ45^o$, $h_1 = \frac{\ell}{2} - y_3$

$h_1 = \frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{2}ημ45^o$

$h_2 = \frac{\ell}{2} + y_3 = \frac{\ell}{2}(1+ημ45)$

$E_{μηχ,1} = E_{μηχ}(2)$

$\Rightarrow m_{e_{KA}} g\frac{\ell}{2} + m_σ g\frac{\ell}{2} = m_{e_{KA}} g h_1 + m_{e_{KΓ}} g h_2 + m_σ g h_3$

$\Rightarrow m_e g\frac{\ell}{2} + m_σ g \frac{\ell}{2} = m_e g\left[\frac{\ell}{2}-\frac{\ell}{2}ημ45\right] + m_e g\left[\frac{\ell}{2}+\frac{\ell}{2}ημ45\right] + m_σ g h_3$

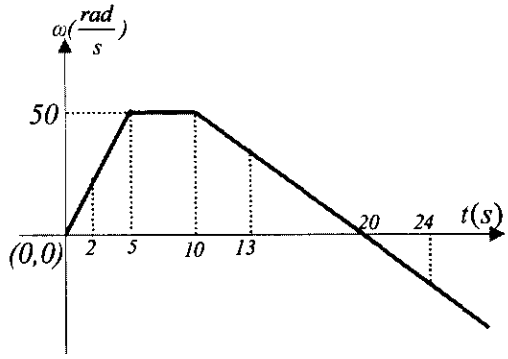
$\Rightarrow h_3 = 0,12m$; $z = \frac{\ell}{2} - h_3 \Rightarrow z = 0,48m$

$ημ45^o = \frac{z}{(KΣ)} \Rightarrow (KΣ) = \frac{z}{ημ45} \Rightarrow KΣ = 0,679m$

9.85

Προφανώς πρέπει να βρεθεί το αντίστοιχο εμβαδόν.
Για $0 \le t < 5s$ η κλίση είναι σταθερή άρα $a_{1,\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt} = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\eta}$, άρα

$$a_{1,\gamma\omega\nu} = \frac{(50-0)rad/s}{(5-0)s} \Rightarrow a_{1,\gamma\omega\nu} = 10rad/s^2$$



Για $5 \le t < 10s$ έχουμε ω=σταθερό και προφανώς $a_{2,\gamma\omega\nu} = 0$

Για $t > 10s$ η κλίση είναι σταθερή άρα $a_{3,\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt} = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\eta}$, άρα

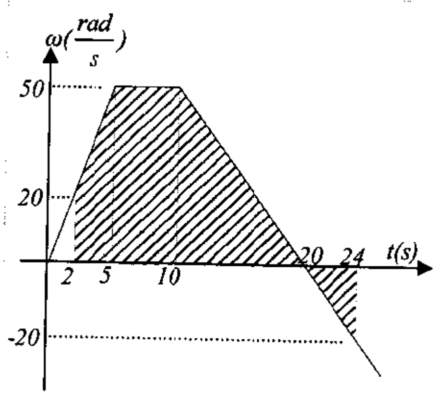
$$a_{1,\gamma\omega\nu} = \frac{(0-50)rad/s}{(20-10)s} \Rightarrow a_{1,\gamma\omega\nu} = -5rad/s^2$$

Για $0 \le t < 5s$, $\omega = a_{1,\gamma\omega\nu} t \Rightarrow \omega = 10t\ (S.I)$

$\xrightarrow{t=2s} \omega = 20rad/s$

Για $t > 10s$, $\omega = \omega_1 + a_{3,\gamma\omega\nu}(t - t_1) \Rightarrow$

$\omega = 50 - 5(t-10)\,(S.I) \xrightarrow{t=24s} \omega = -20rad/s$



Από 2s έως 20s η φορά στροφής είναι «θετική» και η γωνία στροφής $\Delta\varphi_1 = \frac{20+50}{2}(5-2) + \frac{5+15}{2}(20-5)$

$\Rightarrow \Delta\varphi_1 = 255rad$

Από 20s έως 24s η φορά στροφής είναι «αρνητική» (αντίθετη της προηγούμενης) και η γωνία στροφής $\Delta\varphi_2 = \frac{1}{2}(24-20)(-20) \Rightarrow \Delta\varphi_2 = -40rad$.

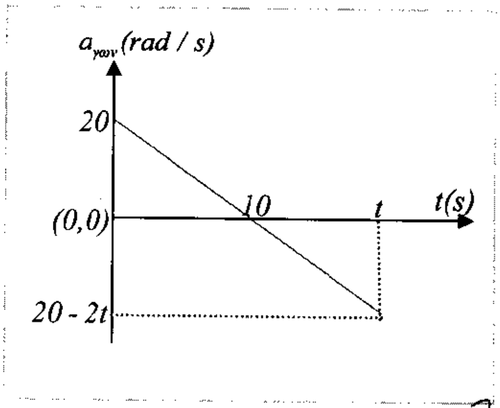
- Η συνολική γωνία στροφής από 2s έως 24s ανεξάρτητα από τη φορά κίνησης είναι $\Delta\varphi = \Delta\varphi_1 + |\Delta\varphi_2| \Rightarrow \Delta\varphi = 295rad$
- Η συνολική γωνιακή μετατόπιση από 2s έως 24s ανεξάρτητα από τη φορά κίνησης είναι $\Delta\varphi = \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 \Rightarrow \Delta\varphi = 215rad$

α) $I = \frac{1}{2}MR^2 = \frac{1}{2}20Kg.(0,5m)^2 \Rightarrow I = 2,5Kgm^2$

$\Sigma\tau = FR + \tau_T \Rightarrow \Sigma\tau = FR - |\tau_T| \Rightarrow$

$\Sigma\tau = (110 - 10t)0,5 - 5 \Rightarrow \Sigma\tau = 50 - 5t\ (S.I)$ ✓

$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{\Sigma\tau}{I} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = \frac{50-5t}{2,5} \Rightarrow \boxed{a_{\gamma\omega\nu} = 20 - 2t}\ (S.I)$

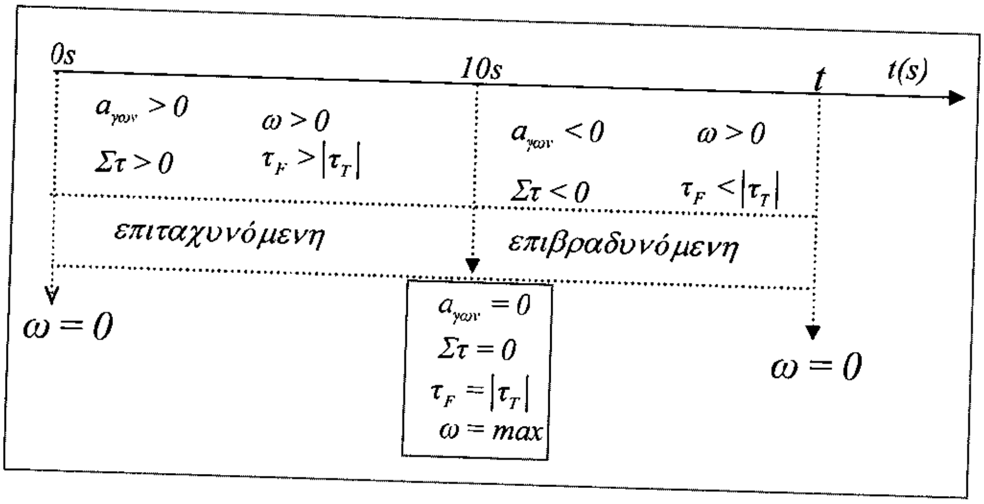


β) Η γωνιακή επιτάχυνση μηδενίζεται την $20 - 2t = 0 \Rightarrow t = 10s$.

Στο χρονικό διάστημα $0 \le t < 10s$ η γωνιακή επιτάχυνση μειώνεται μεν αλλά είναι ομόρροπη της γωνιακής ταχύτητας …συνεπώς η κίνηση είναι επιταχυνόμενη με την γωνιακή ταχύτητα να αυξάνεται από το μηδέν αλλά με μειούμενο ρυθμό.

Στο χρονικό διάστημα $t > 10s$ η γωνιακή επιτάχυνση αντιστρέφεται αλλά το κινητό συνεχίζει να στρέφεται στη ίδια φορά με αυτή που είχε έως τα $t = 10s$. Τώρα η κίνηση είναι επιβραδυνόμενη με την γωνιακή επιτάχυνση απολύτως να αυξάνεται και …με την γωνιακή ταχύτητα να μειώνεται αλλά με αυξανόμενο ρυθμό μέχρι μηδενισμού της.

Ας προσέξουμε τον παρακάτω πίνακα ….



γ)Η μέγιστη γωνιακή ταχύτητα είναι την στιγμή που περνάμε από την επιταχυνόμενη κίνηση στην επιβραδυνόμενη, δηλαδή την $t = 10s$.

Το εμβαδόν της $a_{\gamma\omega\nu} = f(t)$ δίδει την αντίστοιχη μεταβολή της γωνιακής ταχύτητας. Για το χρονικό διάστημα από $t = 0$ έως $t = 10s$ βρίσκουμε το αντίστοιχο εμβαδόν και άρα την αντίστοιχη μεταβολή της γωνιακής ταχύτητας

$E = \Delta\omega \Rightarrow \frac{1}{2}10.20 = \Delta\omega \Rightarrow \Delta\omega = 100rad/s \Rightarrow \omega_{max} - \omega_0 = 100rad/s \xrightarrow{\omega_0 = 0}$

$\boxed{\omega_{max} = 100rad/s}$ ✓

δ)Από την στιγμή $t = 10s$ έως ότου η γωνιακή ταχύτητα μηδενισθεί την στιγμή t η μεταβολή της είναι $\Delta\omega = \omega_{\tau\varepsilon\lambda\iota\kappa\acute{o}} - \omega_{\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{o}} = 0 - \omega_{max} = -100rad/s$. Η μεταβολή αυτή βρίσκεται από το αντίστοιχο εμβαδόν …οπότε:

$\Delta\omega = -100 \Rightarrow \frac{1}{2}(t-10)(20-2t) = -100 \Rightarrow -2\frac{1}{2}(t-10)(t-10) = -100 \Rightarrow \boxed{t = 20s}$ ✓

Σχόλιο: Αν η δύναμη συνεχίσει να υπάρχει …ο δίσκος θα αρχίσει να στρέφεται κατά την αντίθετη φορά …και ουσιαστικά θα κάνει μια στροφική ταλάντωση περιόδου $T = 20s$

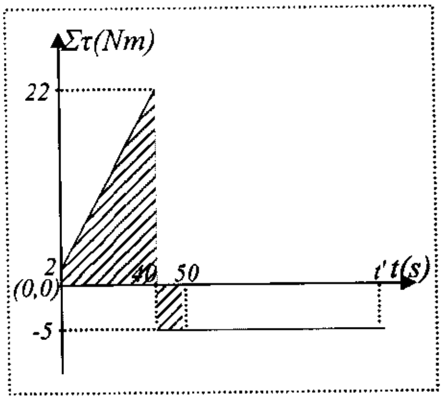
9.87

A) Οι χρονικές εξισώσεις της συνολικής ροπής που ασκείται στο στερεό είναι.

Για $0 \le t < 40s$, $\Sigma\tau = \tau_F + \tau_T \Rightarrow \Sigma\tau = (7 + 0,5t) - 5 \Rightarrow$

$\Sigma\tau = \tau_F + \tau_T \Rightarrow \Sigma\tau = 2 + 0,5t\ (S.I)$

Για $t > 40s$, $\Sigma\tau = \tau_T \Rightarrow \Sigma\tau = -5Nm$



Για το χρονικό διάστημα $0 \le t < 40s$ η μεταβολή της στροφορμής ισούται με το αντίστοιχο εμβαδόν της $\Sigma\tau = f(t) \ldots \Delta L = \frac{2+22}{2} 40kgm^2/s$

$\Rightarrow \Delta L = 480kgm^2/s \Rightarrow L_1 - L_0 = 480kgm^2/s$ και επειδή $L_0 = 0$ θα είναι $\boxed{L_1 = 480kgm^2/s}$

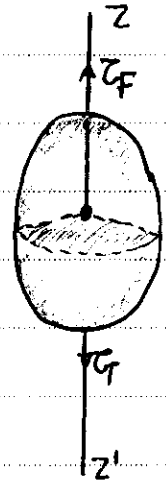
Για το χρονικό διάστημα $40 < t \le 50s$ η μεταβολή της στροφορμής ισούται με το αντίστοιχο εμβαδόν της $\Sigma\tau = f(t) \ldots \Delta L = -5.(50 - 40)kgm^2/s \Rightarrow$

$\Delta L = -50kgm^2/s \Rightarrow L_2 - L_1 = -50kgm^2/s$ και επειδή $L_1 = 480Kgm^2/s$ θα είναι

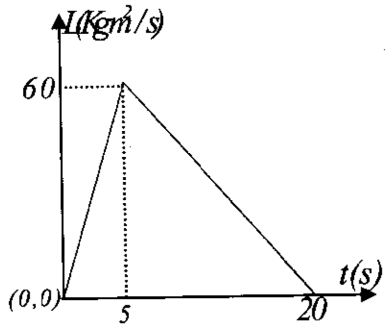
$\boxed{L_2 = 430kgm^2/s}$

B) Έστω ότι το στερεό σταματάει την $t = t'$, οπότε η στροφορμή είναι $L' = 0$. Για το χρονικό διάστημα $40 < t \le t'$ η μεταβολή της στροφορμής ισούται με το αντίστοιχο εμβαδόν της $\Sigma\tau = f(t) \ldots$ $\Delta L = -5.(t' - 40)kgm^2/s$

$\Rightarrow L' - L_1 = -5.(t' - 40) \Rightarrow 0 - 480 = -5.(t' - 40) \Rightarrow \boxed{t' = 136s}$



988



α) Μετά τη χρονική στιγμή $t = 5s$ που καταργείται η δράση της δύναμης $\vec{F}$, αν δεν υπήρχε τριβή ο δίσκος θα συνέχιζε την στροφική κίνηση με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, άρα και με σταθερή στροφορμή. Τώρα μετά την $t = 5s$ η στροφορμή μειώνεται, άρα υπάρχουν τριβές που δίδουν ροπή που αντιτίθεται στην κίνηση. Επειδή η κλίση της $L = f(t)$ είναι σταθερή και ισούται με την συνολική ροπή (που εδώ είναι μόνο η ροπή της τριβής) αυτή θα είναι σταθερή... $\Sigma\tau = \dfrac{dL}{dt} \Rightarrow \tau_T = \dfrac{dL}{dt} = \sigma\tau\alpha\theta. \Rightarrow \tau_T = \dfrac{\Delta L}{\Delta t} \Rightarrow \tau_T = \dfrac{(0-60)kgm^2 s}{(20-5)s} \Rightarrow$

$\boxed{\tau_T = -4Nm}$

β) Για το χρονικό διάστημα μέχρι τα $5s$ η συνολική ροπή είναι $\Sigma\tau = \dfrac{dL}{dt} = \sigma\tau\alpha\theta$

$$\Rightarrow \Sigma\tau = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{(60-0)Kgm^2/s}{(5-0)s} \Rightarrow \Sigma\tau = 12Nm \Rightarrow \tau_F + \tau_T = 12Nm \Rightarrow$$

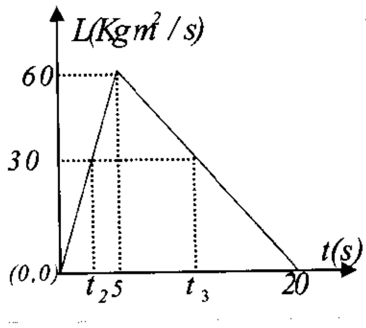
$\tau_F - 4Nm = 12Nm \Rightarrow \tau_F = 16Nm$ και επειδή $\tau_F = FR$ παίρνουμε $F = \dfrac{\tau_F}{R} \Rightarrow$

$$F = \frac{16Nm}{0{,}4m} \Rightarrow \boxed{F = 40N}$$

γ) Από την περίπτωση 4.α έχουμε $\Delta\varphi = \dfrac{\Delta E}{I} \xrightarrow{(S.I)} \Delta\varphi = \dfrac{\frac{1}{2}20.60}{2} \Rightarrow$

$\Delta\varphi = 300rad$ και προφανώς οι στροφές είναι $N = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \dfrac{300}{2\pi}$, $\boxed{N = \dfrac{150}{\pi}\sigma\tau\rho o\varphi\acute{\varepsilon}\varsigma}$

δ) Σε μια στροφική κίνηση η κινητική ενέργεια λόγω της στροφικής κίνησης και η στροφορμή συνδέονται με τη σχέση $\ldots K = \dfrac{L^2}{2I} \ldots$οπότε η μέγιστη κινητική ενέργεια αντιστοιχεί στην μέγιστη στροφορμή $L = 60Kgm^2/s$ τη $t_1 = 5s$.



$$K = \frac{K_{max}}{4} \Rightarrow \frac{L^2}{2I} = \frac{1}{4}\frac{L^2_{max}}{2I} \Rightarrow L = \frac{L_{max}}{2} \Rightarrow$$

$L = 30Kgm^2/s$. Η τιμή αυτή όμως της στροφορμής είναι για δύο χρονικές στιγμές t_2 και t_3, όπως φαίνεται από το διάγραμμα.

Για το χρονικό διάστημα $0 \le t < 5s$, $\Sigma\tau = \dfrac{\Delta L}{\Delta t} = 12 \Rightarrow \dfrac{L - L_0}{t - t_0} = 12 \xrightarrow[t_0=0]{L_0=0}$

$L = 12t\,(S.I) \xrightarrow{L=30Kgm^2/s} 30 = 12t_2 \Rightarrow \boxed{t_2 = 2{,}5s}$

Για το χρονικό διάστημα $5 < t \le 20s$, $\Sigma\tau = \dfrac{\Delta L}{\Delta t} = -4 \Rightarrow \dfrac{L - L_1}{t - t_1} = -4 \xrightarrow[t_1=5s]{L_1=60kgm^2/s}$

$\dfrac{L-60}{t-5} = -4 \Rightarrow L = 60 - 4(t-5)\,(S.I) \xrightarrow{L=30Kgm^2/s} 30 = 60 - 4(t_3 - 5) \Rightarrow \boxed{t_3 = 12{,}5s}$

9.89

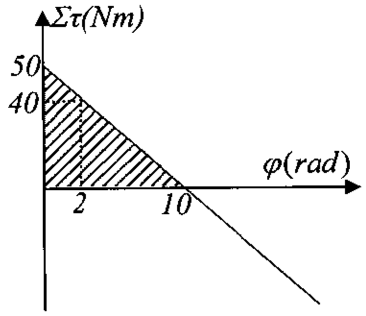
A) $\tau_F = \dot{F}\dot{R} = (110 - 10\varphi)0,5 \Rightarrow \tau_F = 55 - 5\varphi\,(S.I)$

$\Sigma\tau = \tau_F + \tau_T \Rightarrow \Sigma\tau = 55 - 5\varphi - 5 \Rightarrow \Sigma\tau = 50 - 5\varphi\,(S.I)$

$a_{\gamma\omega\nu} = \dfrac{\Sigma\tau_F}{I} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = \dfrac{50 - 5\varphi}{1,25} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = 40 - 4\varphi\,(S.I)$

Από τη σχέση αυτή φαίνεται ότι $\boxed{a_{\gamma\omega\nu.max} = 40rad/s^2}$ την $\varphi = 0\,rad$ δηλαδή μόλις αρχίζει η κίνηση.

Η μέγιστη γωνιακή ταχύτητα είναι στο τέλος της επιταχυνόμενης κίνησης δηλαδή όταν έχουμε στροφή κατά $\varphi = 10rad$.



$\Delta K = W_{o\lambda} \Rightarrow K - K_0 = W_{o\lambda} \xrightarrow{K_0=0} \dfrac{1}{2}I\omega^2 = W_{o\lambda}$

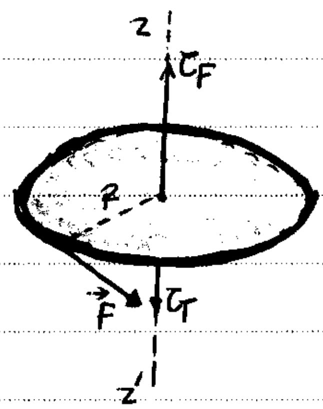
$\dfrac{1}{2}1,25\omega^2 = \dfrac{1}{2}10.50 \Rightarrow \boxed{\omega = 20rad/s}$

B) $s = R\varphi \Rightarrow \varphi = \dfrac{s}{R} = \dfrac{1m}{0,5m} \Rightarrow \varphi = 2rad$. Σε αυτή τη θέση $\Sigma\tau = 50 - 5.2 = 40rad$

$\Delta K = W_{o\lambda} \Rightarrow K - K_0 = W_{o\lambda} \xrightarrow{K_0=0} \dfrac{1}{2}I\omega^2 = W_{o\lambda} \Rightarrow \dfrac{1}{2}1,25\omega^2 = \dfrac{50+40}{2}2 \Rightarrow$

$\boxed{\omega = 12rad/s}$

$\dfrac{dK}{dt} = \Sigma\tau.\omega \Rightarrow \dfrac{dK}{dt} = 40Nm.12rad/s \Rightarrow \boxed{\dfrac{dK}{dt} = 480J/s}$ ✓



9.90

Απάντηση:

Ισχύς της δύναμης F , $P_F = 4t + 10\,(S.I)$

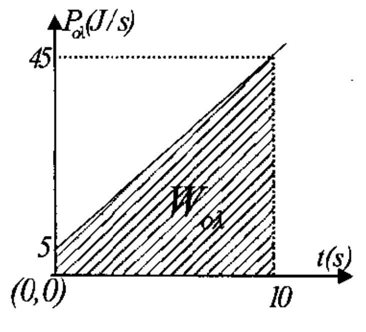
Ισχύς των τριβών T , $P_T = -5\,(S.I)$

Στο δίσκο προσφέρεται ενέργεια με συνολική ισχύ:

$P_{ολ} = P_F + P_T \Rightarrow P_{ολ} = 4t + 5\,(S.I)$

Το συνολικό έργο των ροπών στο δίσκο είναι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου τμήματος

$W_{ολ} = \dfrac{5+45}{2}10 = 250J$

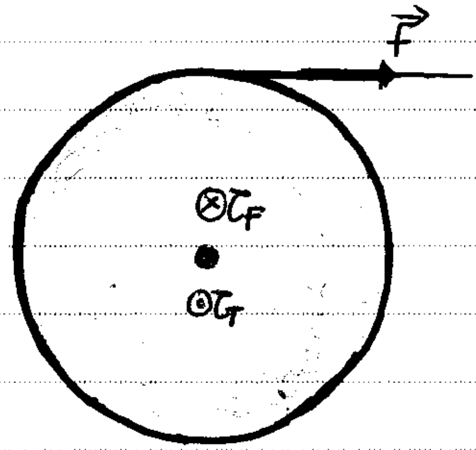


α) $\Delta K = W_{ολ} \Rightarrow K - K_0 = W_{ολ} \xrightarrow{K_0=0} \boxed{K = 250J}$

$K = \dfrac{1}{2}I\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\dfrac{2K}{I}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\dfrac{2.250}{1,25}} \Rightarrow \boxed{\omega = 20rad/s}$

β) $\dfrac{dK}{dt} = \dfrac{dW_{ολ}}{dt} = P_{ολ}$ και για $t = 10s$ … $\boxed{\dfrac{dK}{dt} = 45\dfrac{J}{s}}$

γ) $P_{ολ} = \Sigma\tau.\omega \Rightarrow \Sigma\tau = \dfrac{P_{ολ}}{\omega} = \dfrac{45J/s}{20rad/s} \Rightarrow \boxed{\Sigma\tau = 2,25Nm}$



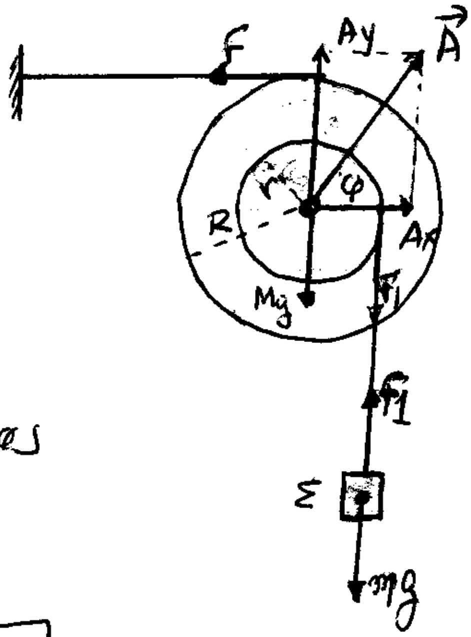
9.91 α) Ισορροπία του Σ

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_1 = mg \Rightarrow F_1 = 10N$

Ισορροπία διπλού δίσκου

$\Sigma \tau = 0 \Rightarrow F \cdot R = F_1 r \Rightarrow$

$\Rightarrow F = \dfrac{F_1 \cdot r}{R} = \dfrac{F_1 r}{2r} \Rightarrow F = \dfrac{F_1}{2}$



$\Rightarrow F = 5N$

Έστω $\vec{A}$ η δύναμη που ασκεί ο άξονας στο διπλό δίσκο

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x = F \Rightarrow A_x = 5N$

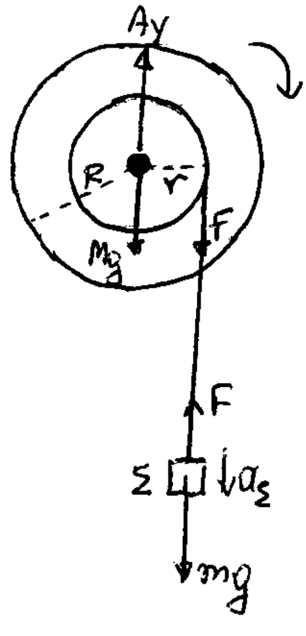
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y = Mg + F_1 \Rightarrow A_y = 12N$

$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y \Rightarrow A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \Rightarrow \boxed{A = 13N}$

$\varepsilon\varphi\,\varphi = \dfrac{A_y}{A_x} = \dfrac{12}{5} = 2,4 \Rightarrow \varphi = 67,4^\circ$

β) $\Sigma F_y = m a_\Sigma \Rightarrow mg - F = m a_\Sigma \quad (1)$

$\Sigma \tau = I \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow F r = I \cdot \dfrac{a_\Sigma}{r} \Rightarrow F = I \dfrac{a_\Sigma}{r^2} \quad (2)$



$\overset{1+2}{\Rightarrow} mg = \left(m + \dfrac{I}{r^2}\right) a_\Sigma \Rightarrow a_\Sigma = \dfrac{m g r^2}{m r^2 + I}$

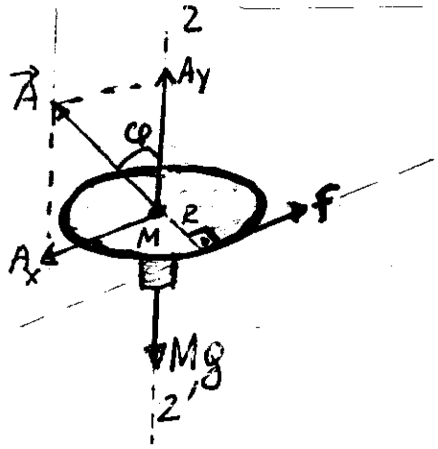
$\overset{SI}{\Rightarrow} a_\Sigma = \dfrac{1 \cdot 10 \cdot 0,01}{1 \cdot 0,01 + 2,5 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow a_\Sigma = 8\, m/s^2$

$(1) \Rightarrow F = m(g - a) \Rightarrow F = 1kg\,(10-8)\, m/s^2 = 2N$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y = Mg + F \Rightarrow \left.\begin{matrix} A_y = 4N \\ A_x = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{A = 4N}$

κατακόρυφη

9.92



$$\Sigma\tau = \frac{dL}{dt} \Rightarrow F\cdot R = \frac{dL}{dt} = \sigma\tau\alpha\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{L-L_0}{t-t_0} = F\cdot R \xrightarrow[L_0=0]{t_0=0} \left.\begin{aligned} L &= F\cdot R\, t \quad (1) \\ L &= 50\sqrt{3}\, t \quad (2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

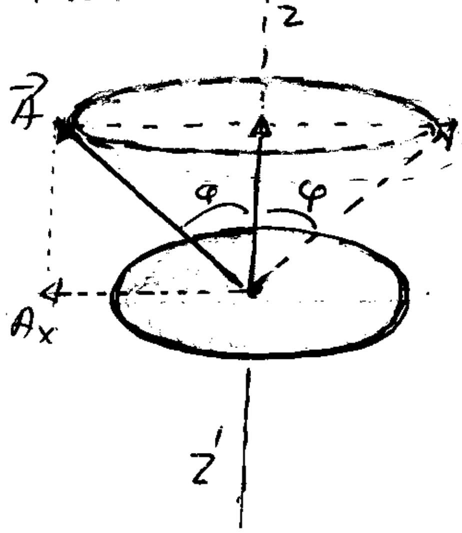
$$\Rightarrow F\cdot R = 50\sqrt{3} \ (SI) \Rightarrow F\cdot 0{,}5 = 50\sqrt{3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow F = 100\sqrt{3}\ N$$

$$\left.\begin{aligned} \Sigma F_x = 0 &\Rightarrow A_x = F = 100\sqrt{3}\ N \\ \Sigma F_y = 0 &\Rightarrow A_y = Mg = 100N \end{aligned}\right\} \vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y \Rightarrow A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

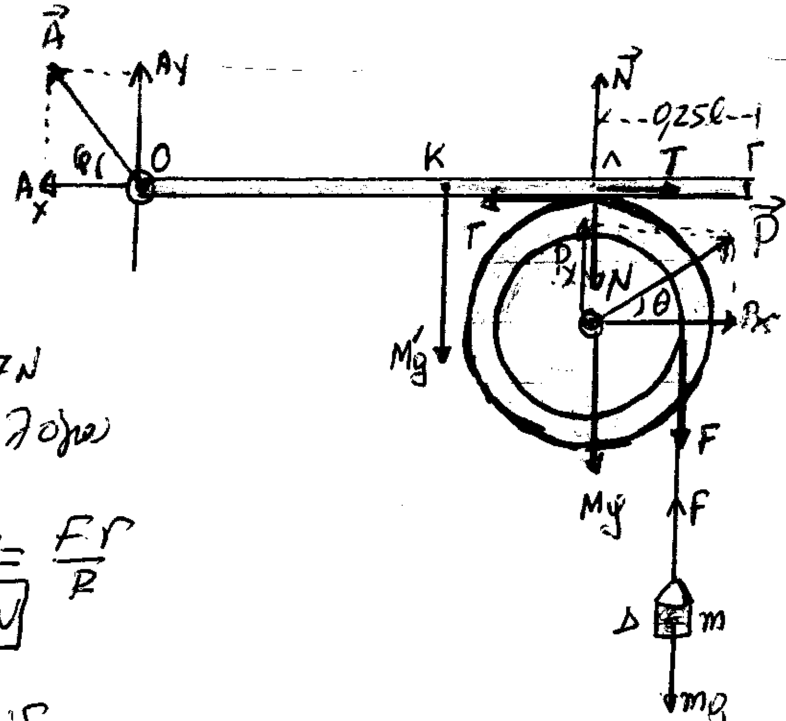
$$\Rightarrow A = 200N, \quad \varepsilon\varphi\varphi = \frac{A_x}{A_y} = \frac{100\sqrt{3}}{100} = \sqrt{3}$$
$$\Rightarrow \varphi = \pi/3\ rad$$

- Η $\vec{A}_y$ έχει σταθερό κατακόρυφο φορέα που διέρχεται από το κέντρο του δίσκου
- Η $\vec{A}_x$ είναι συνεχώς αντίθετη με την $\vec{F}$, διέρχεται από το κέντρο του δίσκου και διαγράφει κύκλο με την συχνότητα περιστροφής του δίσκου.

- Η $\vec{A}$ διαγράφει κωνική επιφάνεια που σχηματίζει με τον z'z γωνία $\varphi = \frac{\pi}{3} rad$



9.93



α) Ισορροπία κάδου Δ

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F = mg \Rightarrow F = 7{,}7N$

Ισορροπία διπλού δίσκου λόγω στροφικής κίνησης

$\Sigma\tau = 0 \Rightarrow F \cdot r = T \cdot R \Rightarrow T = \frac{F r}{R}$

$\Rightarrow T = \frac{7{,}7N \cdot 10cm}{11cm} \Rightarrow \boxed{T = 7N}$

β) Ισορροπία της σανίδας

$\Sigma\tau_{(O)} = 0 \Rightarrow M'g\, 0{,}5\ell = N \cdot 0{,}75\ell \Rightarrow N = \frac{0{,}50 M'g}{0{,}75} \Rightarrow N = \frac{0{,}50 \cdot 1{,}5 \cdot 10}{0{,}75}$

$\Rightarrow N = 10N$

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x = T \Rightarrow A_x = 7N$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y + N = M'g \Rightarrow A_y = 1{,}5 \cdot 10 - 10 \Rightarrow A_y = 5N$

$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y \Rightarrow A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \Rightarrow A = \sqrt{7^2 + 5^2} \Rightarrow A = \sqrt{74}\,N \Rightarrow \boxed{A = 8{,}6N}$

$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{A_y}{A_x} \Rightarrow \varepsilon\varphi\varphi = \frac{5}{7} \Rightarrow \varphi = 35{,}54^\circ$

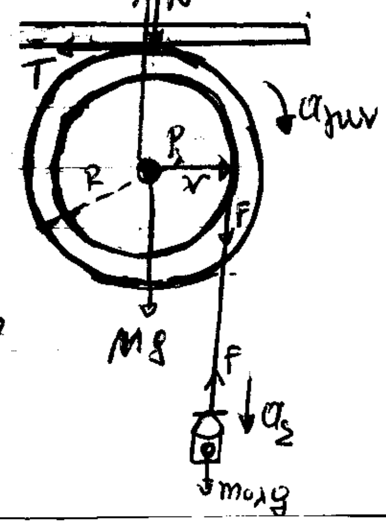
γ) Ισορροπία δίσκου (δεν μεταφέρεται)

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow P_x = T \Rightarrow P_x = 7N$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow P_y = Mg + F + N \Rightarrow P_y = 0{,}63 \cdot 10 + 7{,}7 + 10 \Rightarrow P_y = 24N$

$\vec{P} = \vec{P}_x + \vec{P}_y \Rightarrow P = \sqrt{7^2 + 24^2} \Rightarrow \boxed{P = 25N}$ $\quad \varepsilon\varphi\theta = \frac{P_y}{P_x} = \frac{24}{7}$

δ) $\frac{dK}{dt} = \Sigma F\, \upsilon + \Sigma\tau\, \omega \Rightarrow \frac{dK}{dt} = (m_2 g - F)\upsilon_2 + (Fr - TR)\omega$



$\frac{dK}{dt} = m_2 g \upsilon_2 - F\upsilon_2 + F r \omega - T R \frac{\upsilon_2}{r} = \left[m_2 g - T\frac{R}{r}\right]\upsilon_2$

$\overset{\Sigma\Gamma}{\Rightarrow} 11 = \left(m_2 \cdot 10 - 7\,\frac{11cm}{10cm}\right) \cdot 2 \Rightarrow 11 = 20 m_2 - 14{,}4 \Rightarrow m_2 = 1{,}27\,kg$

$\Rightarrow m + m_2 = 1{,}27 \Rightarrow 0{,}77 + m_2 = 1{,}27 \Rightarrow m_2 = 0{,}5\,kg$

ε) Σώμα $\Sigma F_y = m_\alpha a_\Sigma \Rightarrow m_\alpha g - F = m_\alpha a_\Sigma$

διπλός δίσκος $\Sigma \tau = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow F \cdot r - T \cdot R = I \cdot \frac{a_\Sigma}{r} \Rightarrow F - T\frac{R}{r} = I\frac{a_\Sigma}{r^2} \Big\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow m_\alpha \cdot g - T\frac{R}{r} = \left(m_\alpha + \frac{I}{r^2}\right) a_\Sigma \Rightarrow 1{,}27 \cdot 10 - 7\frac{11}{10} = \left(1{,}27 + \frac{\frac{119}{3}\cdot 10^{-4}}{0{,}01}\right) a_\Sigma$$

$$\Rightarrow 12{,}7 - 7{,}7 = 5/3\, a_\Sigma \Rightarrow 5 = \frac{5}{3} a_\Sigma \Rightarrow \boxed{a_\Sigma = 3\,m/s^2}$$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{a_\Sigma}{r} \Rightarrow \boxed{\alpha_{\gamma\omega\nu} = 30\,rad/s^2}$$

στ) $m_\alpha g - F = m_\alpha a_\Sigma \Rightarrow F = m_\alpha (g - a_\Sigma) \Rightarrow F = 1{,}27kg(10-3)m/s^2$
$\Rightarrow F = 8{,}89\,N$

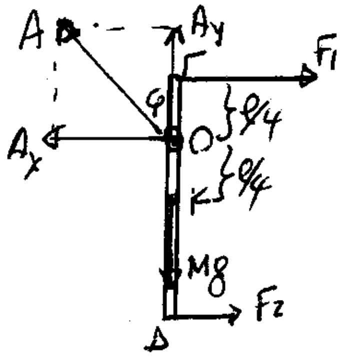
$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow P_x = T \Rightarrow P_x = 7N$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow P_y = N + Mg + F \Rightarrow P_y = 10N + 0{,}63 \cdot 10 + 8{,}89$

$\Rightarrow P_y = 25{,}19\,N$

$$\vec{P} = \vec{P_x} + \vec{P_y} \Rightarrow P = \sqrt{7^2 + 25{,}19^2} \Rightarrow \boxed{P = 26{,}14\,N}$$

9.94



α) $\Sigma \tau(O) = 0 \Rightarrow F_1 \frac{\ell}{4} = F_2 \frac{3\ell}{4}$

$\Rightarrow F_1 = 3F_2 \Rightarrow F_2 = F_1/3 \Rightarrow F_2 = 10N$

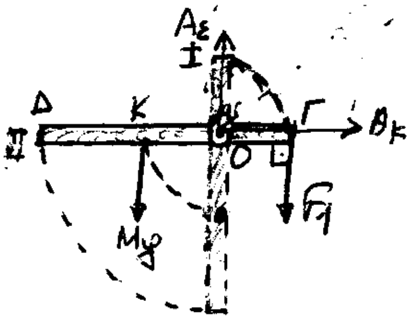
$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x = F_1 + F_2 \Rightarrow A_x = 40N$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y = Mg \Rightarrow A_y = 30N$

$\vec{A} = \vec{A_x} + \vec{A_y} \Rightarrow A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \Rightarrow \boxed{A = 50N}$ με $\varepsilon\varphi\varphi = \frac{A_x}{A_y} \Rightarrow \varepsilon\varphi\varphi = \frac{4}{3}$

β) $I_O = \frac{1}{12}M\ell^2 + M(\ell/4)^2 = \frac{1}{12}M\ell^2 + \frac{1}{16}M\ell^2 = \frac{4}{48}M\ell^2 + \frac{3}{48}M\ell^2 \Rightarrow I_O = \frac{7}{48}M\ell^2$

$\Rightarrow I_O = \frac{7}{48} \cdot 3kg(0{,}4m)^2 \Rightarrow I_O = 7 \cdot 10^{-2}\,kgm^2$



Στην κατάσταση ΙΙ που η ράβδος είναι οριζόντια γράφουμε $\Sigma\tau = I\alpha_{γων} \Rightarrow$
$\Rightarrow F_1 \frac{\ell}{4} - Mg\frac{\ell}{4} = I \cdot \alpha_{γων}$

$$\Rightarrow \alpha_{γων} = \frac{F_1 - Mg}{I}\frac{\ell}{4} = \frac{30N - 30N}{I}\frac{\ell}{4} \Rightarrow \alpha_{γων} = 0 \ ! \Rightarrow \boxed{\frac{d\omega}{dt} = 0}$$

γ) Η μέγιστη κινητική ενέργεια είναι στην κατάσταση ΙΙ
Από Ι → ΙΙ $\alpha_{γων} > 0$ κίνηση επιταχυνόμενη
ΙΙ $\alpha_{γων} = 0$
ΙΙ και μετά $\alpha_{γων} < 0$ κίνηση επιβραδυνόμενη.

$$\Delta K = W_{ολ} \Rightarrow K_{max} = W_{F_1} + W_B \Rightarrow K_{max} = F_1 \frac{\ell}{4}\frac{\pi}{2} - Mg\frac{\ell}{4}$$

$$\Rightarrow K_{max} = \left(F_1 \frac{\pi}{2} - Mg\right)\frac{\ell}{4} \Rightarrow K = \left(30 \cdot \frac{3{,}14}{2} - 30\right)\frac{0{,}4}{4} \text{ Joule}$$

$$\Rightarrow \boxed{K_{max} = 1{,}71 \text{ Joule}}$$

δ) $\Sigma \vec{F}_K = m\vec{\alpha}_K \Rightarrow A_K = m\omega^2 \frac{\ell}{4}$ (1)

$$K_{max} = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2 \Rightarrow 1{,}71 = \frac{1}{2} 0{,}07 \cdot \omega^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{34{,}2}{0{,}07} \xrightarrow{(1)}$$

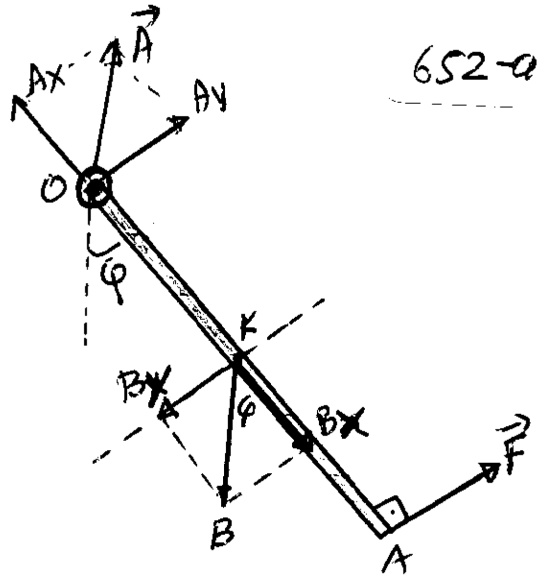
$$\Rightarrow A_K = 3 \cdot \frac{34{,}2}{0{,}07} \cdot \frac{0{,}4}{4} \Rightarrow \boxed{A_K \simeq 146{,}5N}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma F_\varepsilon = m\,\alpha_\varepsilon \\ \alpha_\varepsilon = \frac{\ell}{4}\alpha_{γων} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \Sigma F_\varepsilon = 0 \Rightarrow A_\varepsilon = Mg + F_1 \Rightarrow \boxed{A_\varepsilon = 60N}$$

$$\vec{A} = \vec{A}_K + \vec{A}_\varepsilon \Rightarrow A = \sqrt{A_K^2 + A_\varepsilon^2} \Rightarrow$$

$$\longrightarrow A = 61{,}76N$$

9.95



α) $\Sigma\tau(O)=0 \Rightarrow F\ell = Mg\frac{\ell}{2}\eta\mu\varphi$

$\Rightarrow F=\frac{Mg\frac{\ell}{2}\eta\mu\varphi}{\ell} \Rightarrow F=\frac{Mg}{2}\eta\mu\varphi$

$\Rightarrow F=\frac{10\cdot 10}{2}0{,}6 \Rightarrow F=30N$

$\Sigma F_x=0 \Rightarrow A_x=B_x=B\sigma\upsilon\nu\varphi=mg\sigma\upsilon\nu\varphi$

$\Rightarrow A_x=10\cdot 10\cdot 0{,}8 \Rightarrow A_x=80N$

$\Sigma F_y=0 \Rightarrow A_y+\cancel{F}=B_y \Rightarrow A_y=B_y-F=mg\eta\mu\varphi-F \Rightarrow A_y=30N$

$A=\sqrt{A_x^2+A_y^2} \Rightarrow \boxed{A\simeq 85{,}4N}$

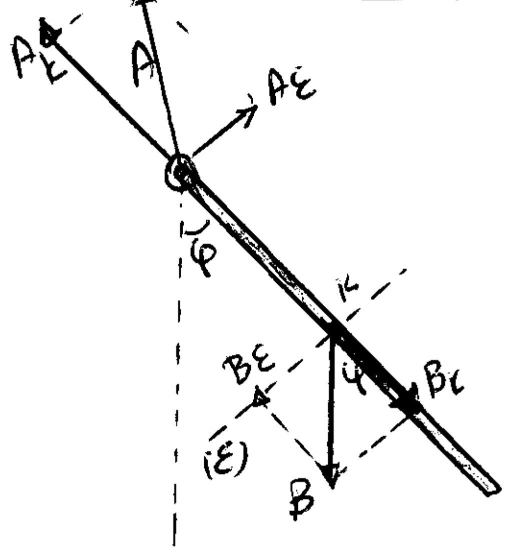
β) $\Sigma\tau=I\cdot a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow Mg\,\eta\mu\varphi\frac{\ell}{2}=\frac{1}{3}M\ell^2 a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu}=\frac{3}{2}\frac{g\eta\mu\varphi}{\ell}$

$\Rightarrow a_\varepsilon=\frac{\ell}{2}a_{\gamma\omega\nu}=\frac{\ell}{2}\,\frac{3}{2}\frac{g\eta\mu\varphi}{\ell} \Rightarrow a_\varepsilon=\frac{3}{4}g\eta\mu\varphi \Rightarrow a_\varepsilon=4{,}5\,m/s^2$

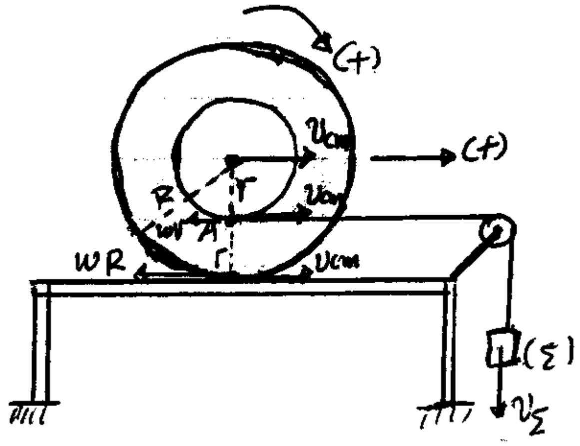
$\Sigma\vec{F}_k=M\vec{a}_k \Rightarrow A_k-Mg\sigma\upsilon\nu\varphi=m\omega^2\frac{\ell}{2}=0 \Rightarrow A_k=mg\sigma\upsilon\nu\varphi=80N$

$\Sigma F_\varepsilon=m\vec{a}_\varepsilon \Rightarrow Mg\eta\mu\varphi-A_\varepsilon=ma_\varepsilon \Rightarrow A_\varepsilon=(Mg\eta\mu\varphi-Ma_\varepsilon) \Rightarrow A_\varepsilon=15N$

$\vec{A}=\vec{A}_k+\vec{A}_\varepsilon \Rightarrow A=\sqrt{A_k^2+A_\varepsilon^2} \Rightarrow \boxed{A\simeq 81{,}4N}$



9.96



(1) $v_\Sigma = v_{νηματος} = v_\Gamma$

$\Rightarrow v_\Sigma = v_{cm} - \omega r$

$\Rightarrow \frac{dv_\Sigma}{dt} = \frac{dv_{cm}}{dt} - r\frac{d\omega}{dt}$

$\Rightarrow a_\Sigma = a_{cm} - r a_{γων}$ (1)

κύλιση χωρίς ολίσθηση

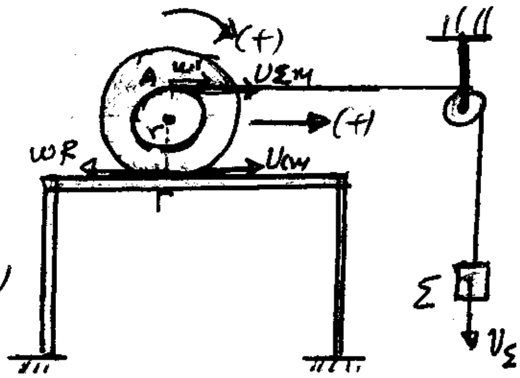
$v_\Gamma = 0 \Rightarrow v_{cm} = \omega R \Rightarrow a_{cm} = R a_{γων}$ (2)

$\left.\begin{array}{ll}(1) \Rightarrow & r a_{γων} = a_{cm} - a_\Sigma \\ (2) & R a_{γων} = a_{cm}\end{array}\right\} \frac{r}{R} = \frac{a_{cm} - a_\Sigma}{a_{cm}} \Rightarrow \frac{r}{2} = \frac{a_{cm} - a_\Sigma}{a_{cm}}$

$\Rightarrow 2a_{cm} - 2a_\Sigma = a_{cm} \Rightarrow \boxed{a_{cm} = 2a_\Sigma}$

Παρασωστή η σχέση (δ).

9.97



$v_\Sigma = v_A \Rightarrow v_\Sigma = v_{cm} + \omega r$

$\Rightarrow a_\Sigma = a_{cm} + r a_{γων}$

$\Rightarrow a_\Sigma - a_{cm} = r a_{γων}$ (1)

$v_\Gamma = 0 \Rightarrow v_{cm} = \omega R \Rightarrow a_{cm} = R a_{γων}$ (2)

$\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow \frac{a_{cm}}{a_\Sigma - a_{cm}} = \frac{R a_{γων}}{r a_{γων}} \Rightarrow \frac{a_{cm}}{a_\Sigma - a_{cm}} = 2 \Rightarrow a_{cm} = 2a_\Sigma - 2a_{cm}$

$\Rightarrow 3a_{cm} = 2a_\Sigma \Rightarrow \boxed{a_{cm} = \frac{2}{3}a_\Sigma}$

$\boxed{a_\Sigma = 1{,}5\, a_{cm}}$

παρασωστή η σχέση (δ)

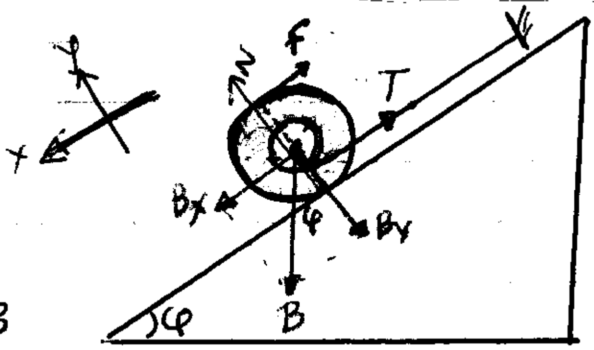
9.98

A) $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F + T = B\eta\mu\varphi$ (1)

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = B\sigma\upsilon\nu\varphi$

$\Sigma\tau = 0 \Rightarrow F R - T\cdot r = 0$

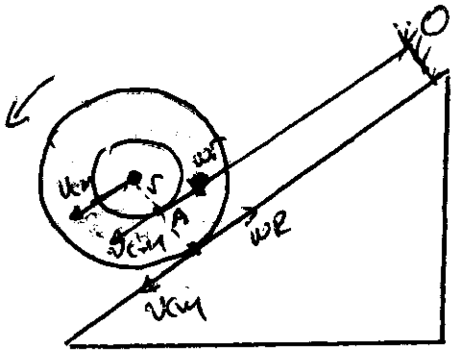
$\Rightarrow F R = T\frac{R}{2} \Rightarrow T = 2F$ (2)



(1),(2) $\Rightarrow 3F = B\cdot 0,6 \Rightarrow F = 0,2B$

Άρα σωστή η σχέση (α)

B)



$v_A = v_{νήματος} = v_{νήματος,O} = 0$

$\Rightarrow v_A = v_{cm} - \omega r \Rightarrow 0 = v_{cm} - \omega r$

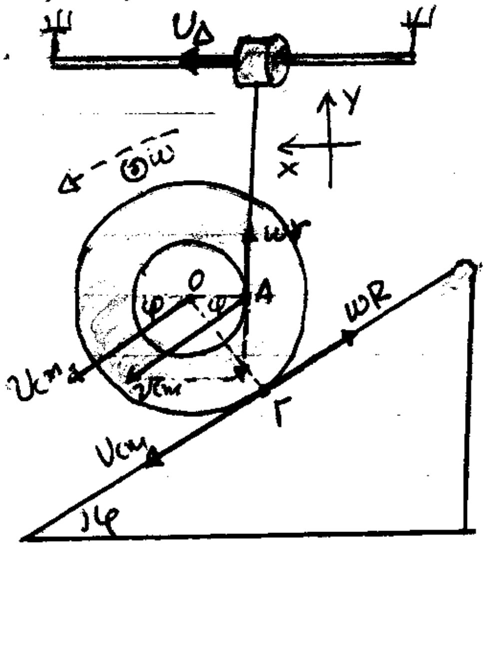
$\Rightarrow v_{cm} = \omega r$ (1)

Αν είχαμε κύλιση χωρίς ολίσθηση $v_\Gamma = 0 \Rightarrow v_{cm} = \omega R$ (2)

(1), (2) καταλήγουμε σε άτοπο αφού $R \neq r$

Άρα σωστή η άποψη του μαθητή (2).

9.99



A) α) $v_{A,y} = v_{νήματος,y} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \omega r - v_{cm,y} = 0 \Rightarrow \omega r = v_{cm}\,\eta\mu\varphi$

$\Rightarrow \omega = \frac{v_{cm}\cdot\eta\mu\varphi}{r}$ (1) $\Rightarrow \omega = \frac{2\cdot 0,6}{0,1}$

$\Rightarrow \boxed{\omega = 12\ rad/s}$

β) $v_{A,x} = v_\Delta \Rightarrow v_{cm,x} = v_\Delta \Rightarrow v_{cm}\,\sigma\upsilon\nu\varphi = v_\Delta$

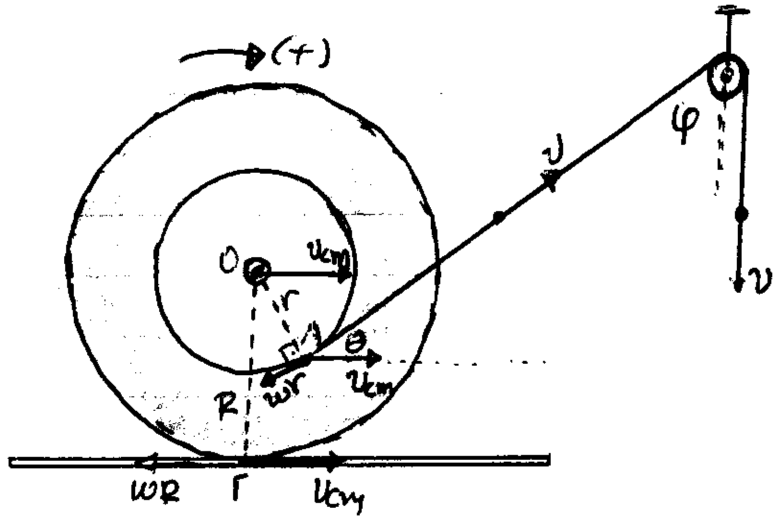
$\Rightarrow v_\Delta = 2\,m/s \cdot 0,8 \Rightarrow \boxed{v_\Delta = 1,6\,m/s}$

γ) $v_\Gamma = v_{cm} - \omega R \Rightarrow v_\Gamma = 2\,m/s - 12\cdot 0,2 \Rightarrow \boxed{v_\Gamma = -0,4\,m/s}$

B) $v_\Gamma = v_{cm} - \omega R = 0 \Rightarrow v_{cm} = \omega R \overset{(1)}{\Rightarrow} v_{cm} = \frac{v_{cm}\,\eta\mu\varphi}{r}\cdot R \Rightarrow$

$\Rightarrow \eta\mu\varphi = \frac{r}{R} \Rightarrow \eta\mu\varphi = \frac{0,1}{0,2} \Rightarrow \eta\mu\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\varphi = \frac{\pi}{6}\,rad}$ (!!)

9.100



$\left.\begin{array}{l} v_{\nu\acute{\eta}\mu\alpha\tau o\varsigma} = \acute{\iota}\delta\iota\alpha \Rightarrow v = v_{cm}\sigma\upsilon\nu\theta - \omega r \\ \kappa\acute{\upsilon}\lambda\iota\sigma\eta \; \chi\omega\rho\acute{\iota}\varsigma \; o\lambda\acute{\iota}\sigma\theta\eta\sigma\eta \;\; v_{cm} = \omega R \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow v = v_{cm}\sigma\upsilon\nu\theta - \frac{v_{cm}}{R} r \Rightarrow$

$\Rightarrow v = v_{cm}\left(\frac{R\sigma\upsilon\nu\theta - r}{R}\right)$

$\Rightarrow v_{cm} = \frac{v \cdot R}{R\sigma\upsilon\nu\theta - r}$

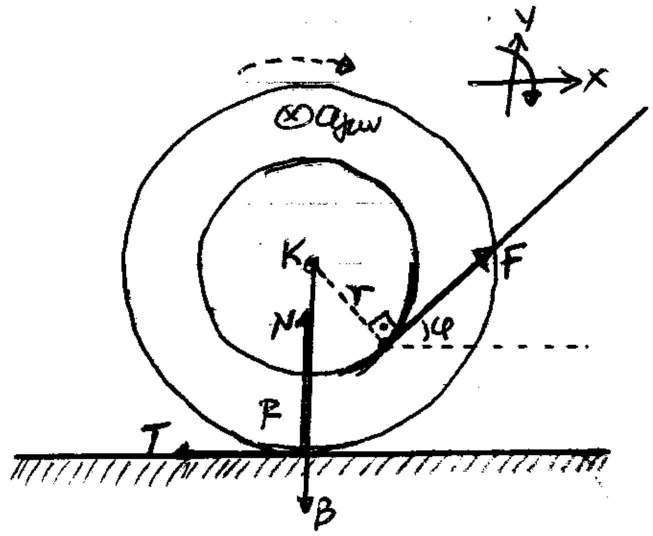
$\xrightarrow{\theta+\varphi=\pi/2} v_{cm} = \frac{v \cdot R}{R\eta\mu\varphi - r} \xrightarrow{R=2r} v_{cm} = \frac{v \cdot 2r}{2r\eta\mu\varphi - \cancel{r}} \Rightarrow v_{cm} = \frac{2v}{2\eta\mu\varphi - 1} \quad (1)$

Για να υπάρχουν οι φορές αυτές $v_{cm} > 0 \Rightarrow 2\eta\mu\varphi - 1 > 0 \Rightarrow 2\eta\mu\varphi > 1$
$\Rightarrow \eta\mu\varphi > 1/2$ ή $\frac{1}{2} < \eta\mu\varphi \leq 1 \Rightarrow 30° < \varphi \leq 90° \;\; \ldots \;\; 0 \leq \theta < 60°$

$(1) \Rightarrow v_{cm} = \frac{2v}{2 \cdot 0{,}75 - 1} = \frac{2v}{1{,}5-1} \Rightarrow \boxed{v_{cm} = 4v}$

Άρα σωστή η σχέση (δ)

9.101



$\Sigma F_x = M\alpha_{cm} \Rightarrow F\sigma\upsilon\nu\varphi - T = M\alpha_{cm} \quad (1)$

$\Sigma\tau = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow TR - F \cdot r = I \cdot \frac{\alpha_{cm}}{R}$

$\Rightarrow T - F\frac{r}{R} = I\frac{\alpha_{cm}}{R^2} \quad (2)$

$(1)+(2) \Rightarrow F\sigma\upsilon\nu\varphi - F\frac{r}{R} = \left(M + \frac{I}{R^2}\right)\alpha_{cm}$

$\Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{FR(R\sigma\upsilon\nu\varphi - r)}{MR^2 + I} \quad (3)$

α) Για να μη κινηθεί το καρούλι πρέπει $\alpha_{cm} = 0 \Rightarrow R\sigma\upsilon\nu\varphi - r = 0$
$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{r}{R} \overset{(3)}{\Rightarrow} \sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{12cm}{20cm} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi_0 = 0{,}6 \Rightarrow \boxed{\varphi_0 = 53°}$

ε) Για να κινηθεί και στραφεί προς τα δεξιά πρέπει

$a_{cm} > 0 \overset{(3)}{\Rightarrow} συνφ > \frac{r}{R} \Rightarrow συνφ > 0,6 \overset{(1)}{\Rightarrow} συνφ > 0,6 \Rightarrow 0 \le φ < φ_0$

με $φ_0 = 53^o$ $\quad 0 \le φ < 53^o$

... όμοια θα είχαμε κίνηση προς τα αριστερά αν $53^o < φ \le 90^o$

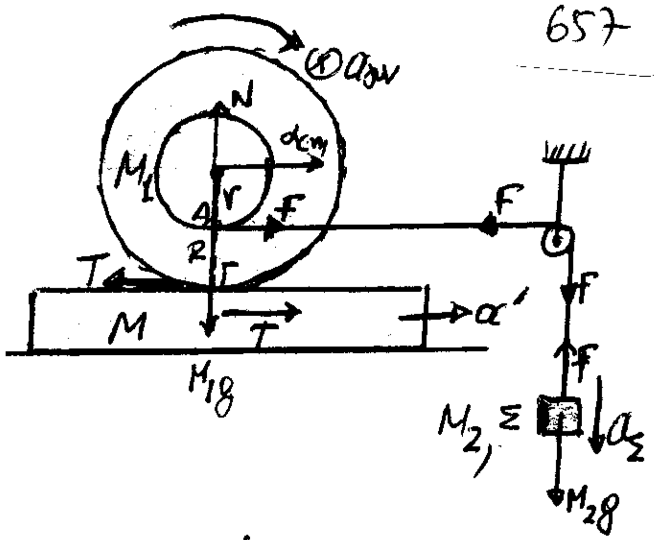
δ.1) $β) \Rightarrow a_{cm} = \frac{FR(Rσυνφ - r)}{MR^2 + I} \Rightarrow a_{cm} = \frac{10 \cdot 0,2m(0,2m \cdot 0,8 - 0,12m)}{10kg \cdot 0,2^2 m^2 + 0,1 kgm^2}$

$\Rightarrow a_{cm} = \frac{2(0,16 - 0,12)}{0,4 + 0,1} \Rightarrow \boxed{a_{cm} = 1,6 m/s^2}$

δ.2) $a_{γων} = \frac{a_{cm}}{R} = \frac{16}{0,2} \Rightarrow \boxed{a_{γων} = 8,0 rad/s^2}$

δ.3) $(1) \quad Fσυνφ - T = M a_{cm} \Rightarrow 100 \cdot 0,8 - T = 10 \cdot 1,6 \Rightarrow \boxed{T = 64N}$

9.102



d) Νήμα μη εκτατό

$a = a_{νήματος} = a_{A,x} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_Σ = a_{cm} - r a_{γων} \Rightarrow r \cdot a_{γων} = a_{cm} - a_Σ$

Κύλιση χωρίς ολίσθηση πάνω στη σανίδα

$a_{Γ(x)} = a' \Rightarrow a_{cm} - R a_{γων} = a' \Rightarrow R a_{γων} = a_{cm} - a'$

$$\frac{R a_{γων}}{r a_{γων}} = \frac{a_{cm}-a'}{a_{cm}-a_Σ} \Rightarrow \frac{2r a_{γων}}{r a_{γων}} = \frac{a_{cm}-a'}{a_{cm}-a_Σ} \Rightarrow 2 = \frac{a_{cm}-a'}{a_{cm}-a_Σ}$$

$$\Rightarrow 2a_{cm} - 2a_Σ = a_{cm} - a' \Rightarrow a_{cm} - 2a_Σ = -a' \Rightarrow \boxed{2a_Σ - a_{cm} = a'} \ (0)$$

Σ: $ΣF_y = M_2 a_Σ \Rightarrow M_2 g - F = M_2 a_Σ$ (1)

Δίσκος:

$ΣF_x = M_1 a_{cm} \Rightarrow F - T = M_1 a_{cm}$ (2)

$Στ = I a_{γων} \Rightarrow TR - Fr = \frac{1}{2} M_1 R^2 a_{γων} \Rightarrow T - F\frac{r}{R} = \frac{1}{2} M_1 R a_{γων} \xrightarrow{R=2r}$

$\Rightarrow T - \frac{F}{2} = \frac{M_1}{2}(a_{cm} - a') \Rightarrow 2T - F = M_1(a_{cm} - a')$ (3)

Σανίδα: $ΣF_x = M a' \Rightarrow T = M a' \Rightarrow -T = -M a'$ (4)

(2)+(3)+(4) $\quad 0 = M_1 a_{cm} + M_1(a_{cm} - a') - M a' \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 = M_1 a_{cm} + M_1 a_{cm} - M_1 a' - M a' \Rightarrow$

$\Rightarrow (M_1 + M) a' = 2 M_1 a_{cm} \Rightarrow 12 a' = 4 a_{cm}$

$\Rightarrow \quad a' = \frac{a_{cm}}{3}$ (5)

(0), (5) $\Rightarrow \quad 2a_Σ - a_{cm} = \frac{a_{cm}}{3} \Rightarrow 6a_Σ - 3a_{cm} = a_{cm}$

$$6a_\Sigma = 4a_{cm} \Rightarrow \boxed{a_{cm} = 1{,}5a_\Sigma}$$

$$a' = \frac{a_{cm}}{3} = \frac{1{,}5a_\Sigma}{3} \Rightarrow \boxed{a' = 0{,}5a_\Sigma}$$

$$\left.\begin{aligned} &(1) \Rightarrow \quad M_2 g - f = M_2 a_\Sigma \\ &(2) \quad\quad F - T = M_1 \cdot 1{,}5a_\Sigma \\ &(4) \quad\quad T = M \cdot 0{,}5a_\Sigma \end{aligned}\right\} (+)$$

$$M_2 g = (M_2 + 1{,}5M_1 + 0{,}5M)a_\Sigma \Rightarrow 2\cdot10 = (2 + 1{,}5\cdot2 + 0{,}5\cdot10)a_\Sigma$$

$$\Rightarrow 20 = (2+3+5)a_\Sigma \Rightarrow \boxed{a_\Sigma = 2\,m/s^2}$$

$$a_{cm} = 1{,}5a_\Sigma \Rightarrow \boxed{a_{cm} = 3\,m/s^2}$$

$$a' = 0{,}5\cdot a_\Sigma \Rightarrow \boxed{a' = 1\,m/s^2}$$

$$\ldots \; r a_{\gamma\omega\nu} = a_{cm} - a_\Sigma \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = \frac{a_{cm} - a_\Sigma}{r} = \frac{(3-2)\,m/s^2}{0{,}1\,m}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_{\gamma\omega\nu} = 10\,rad/s^2}$$

β) $(4) \Rightarrow T = Ma' \Rightarrow T = 10kg\cdot 1\,m/s^2 \Rightarrow \boxed{T = 10N}$

$N = M_2 g \Rightarrow \boxed{N = 20N}$

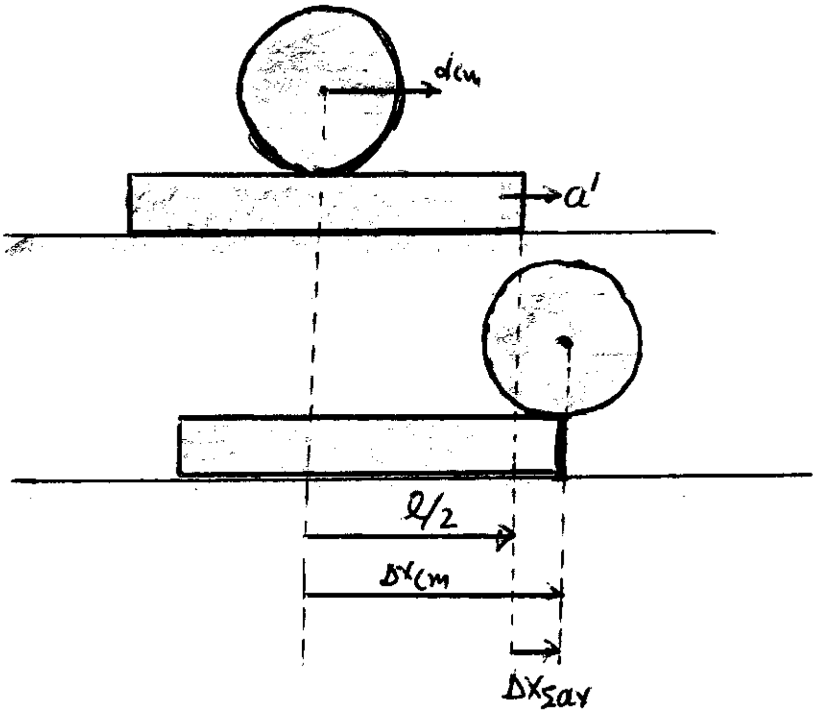
$(1)\; F - T = M_1 a_{cm} \Rightarrow F - 10 = 2\cdot 3 \Rightarrow \boxed{F = 16N}$

δυνάμεις στον δίσκο: $B_1 = M_1 g = 20N$, $N = 20N$

$T = 10N$, $F = 16N$

δ) Θα βρούμε για πόσο χρόνο ο δίσκος είναι πάνω στη σανίδα

γ)



Από το σχήμα φαίνεται $\frac{\ell}{2}+\Delta x_{σαν}=\Delta x_{cm} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\ell}{2}=\frac{1}{2}a_{cm}t^2-\frac{1}{2}a't^2 \Rightarrow \ell=(a_{cm}-a')t^2 \Rightarrow t=\sqrt{\frac{\ell}{a_{cm}-a'}}$$

$$\Rightarrow t=\sqrt{\frac{2m}{(3-1)m/s^2}} \Rightarrow \boxed{t=1s}$$

Η μετατόπιση ενός σημείου του νήματος είναι όσο κατέβηκε το σώμα (Σ) $\Delta x_{νημ}=H_Σ=\frac{1}{2}a_Σ t^2=\frac{1}{2}\frac{2m}{s^2}(1s)^2 \Rightarrow \boxed{\Delta x_{νημ}=1m}$

$$W_F=F\cdot\Delta x_{νημ} \Rightarrow W_F=16N\cdot 1m \Rightarrow \boxed{W_F=16J}$$

... και διαφορετικά ...

Η ενέργεια που προσφέρθηκε μέσω του έργου της F έγινε κινητική στο δίσκο και τη σανίδα

$$W_F=K_Δ+K_Σ$$

$$K_Δ=\frac{1}{2}I\omega^2+\frac{1}{2}M_1 υ_{cm}^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}M_1R^2(a_{γων}t)^2+\frac{1}{2}M_1(a_{cm}t)^2=\dots \Rightarrow K_Δ=11J$$

$$K_Σ=\frac{1}{2}Mυ_Σ^2=\frac{1}{2}M(a't)^2 \Rightarrow K_Σ=5J$$

$$\longrightarrow W_F=16J$$

(ε) δ

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{dK_\Sigma}{dt} = \ldots = \Sigma F_{\Sigma OY} \cdot v = T \cdot v \\ T = 10N, \quad v = a't = 1 m/s^2 \cdot 1s = 1 m/s\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\dfrac{dK_\Sigma}{dt} = 10\, J/s}$$

- $\dfrac{dL}{dt} = \Sigma \tau_{\Delta I\Sigma KOY} = TR - Fr = 10N \cdot 0{,}2m - 16N \cdot 0{,}1m \Rightarrow \dfrac{dL}{dt} = 0{,}4\, kg\, m^2/s^2$

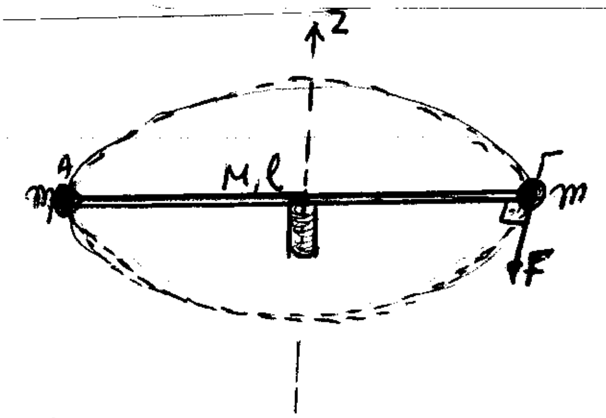
- $\dfrac{dL}{dt} = \Sigma \tau_{\Delta I\Sigma KOY} = I\, a_{\gamma\omega\nu} = \frac{1}{2} M_1 R^2 \cdot a_{\gamma\omega\nu} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0{,}2^2 \cdot 10 \Rightarrow \dfrac{dL}{dt} = 0{,}4\, kg\, m^2/s^2$

- $L = I\omega = \frac{1}{2} M_1 R^2 \cdot a_{\gamma\omega\nu}\, t = \ldots = 0{,}4\, t \Rightarrow L = 0{,}4\, t$ (SI)

$$\Rightarrow \boxed{\dfrac{dL}{dt} = 0{,}4\, kg\, m^2/s^2}$$

9.103

$M = 6\,kg$, $m = 1\,kg$, $l = 1\,m$ $\Rightarrow$ $I = \frac{1}{12}Ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow I = 1\,kg\,m^2$



$\Delta\varphi_1 = N_1 \cdot 2\pi = \frac{24}{\pi} 2\pi = 48\,rad$

$\Delta\varphi_2 = N_2 \cdot 2\pi = \frac{72}{\pi} 2\pi = 144\,rad$

$\Delta\varphi = \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 \Rightarrow \Delta\varphi = 192\,rad$

α) $\Delta K = W_{ολ} \Rightarrow 0 = F\frac{l}{2}\Delta\varphi_1 - |\tau_T|\Delta\varphi \Rightarrow$

$\Rightarrow |\tau_T| = \frac{F \cdot l \cdot \Delta\varphi_1}{2 \cdot \Delta\varphi} \Rightarrow |\tau_T| = \frac{16 \cdot 1 \cdot 48}{2 \cdot 192}\,Nm \Rightarrow |\tau_T| = 2\,Nm \Rightarrow \boxed{\tau_T = -2\,Nm}$

β) 1η φάση της κίνησης: $\Sigma\tau = I\alpha_{1γων} \Rightarrow F\frac{l}{2} - |\tau_T| = I\alpha_{1γων} \Rightarrow$

$\Rightarrow 16\frac{1}{2} - 2 = 1\,\alpha_{1γων} \Rightarrow \alpha_{1γων} = 6\,rad/s^2$ για $0 \le t < 4\,s$

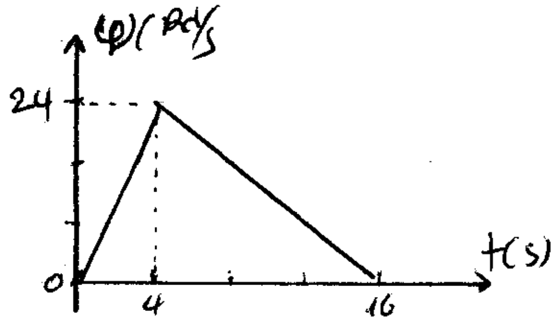
$\Delta\varphi_1 = \frac{1}{2}\alpha_{1γων} t_1^2 \Rightarrow 48 = \frac{1}{2} 6 \cdot t_1^2 \Rightarrow t_1 = 4\,s$, $\omega_1 = \alpha_{1γων} t_1 \Rightarrow \omega_1 = 24\,rad/s$

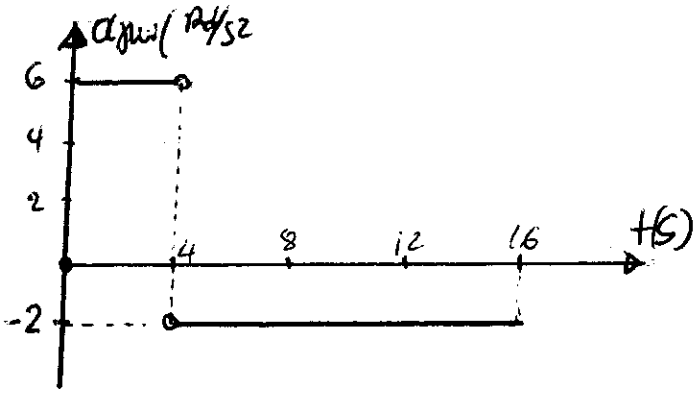
2η φάση της κίνησης: $\Sigma\tau = I\alpha_{2γων} \Rightarrow -|\tau_T| = I\alpha_{2γων} \Rightarrow$

$\Rightarrow -2 = 1\,\alpha_{2γων} \Rightarrow \alpha_{2γων} = -2\,rad/s^2$ για $4 < t \le 16\,s$

$\omega = \omega_1 - |\alpha_{2γων}|(t - t_1) \xrightarrow{\omega = 0} t - t_1 = \frac{\omega_1}{|\alpha_{2γων}|} = \frac{24}{2} = 12\,s \Rightarrow t - 4 = 12$

$\Rightarrow t = 16\,s$





B.2) 1η φάση:

$L = I\omega = I\cdot a_{1\gamma\omega\nu}\, t = 1\cdot 6\cdot t \Rightarrow L = 6t$ // $0\le t\le 4$ s

2η φάση:

$L = I\omega = I\cdot[\omega_1 - |a_{2\gamma\omega\nu}|(t-t_1)] \Rightarrow L = 1\cdot[24-2(t-4)] \Rightarrow$

$\Rightarrow L = 24-2t+8 \Rightarrow L = 32-2t$ για $4\le t\le 16$ s

... και διαφορετικά

1η φάση

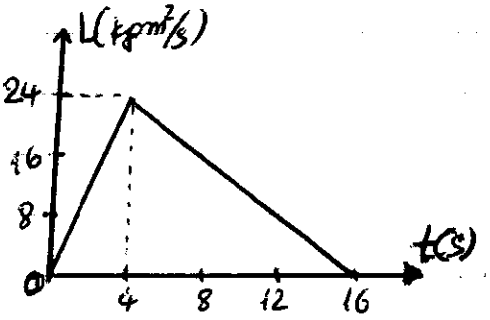
$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau = I a_{1\gamma\omega\nu} = 1\cdot 6 = 6$ (SI) = σταθ $\Rightarrow \frac{L-L_0}{t-\cancel{t_0}} = 6 \Rightarrow L = 6t$ (SI) $0\le t\le 4$

2η φάση

$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau = I a_{2\gamma\omega\nu} = -1\cdot 2 = -2$ (SI) = σταθ $\Rightarrow \frac{L-L_1}{t-t_1} = -2 \Rightarrow$

$\Rightarrow L - L_1 = -2(t-t_1) \Rightarrow L = L_1 - 2(t-t_1) \Rightarrow L = 24-2(t-4)$

$\Rightarrow L = 32-2t$ (SI) για $4\le t\le 16$ s



B.3) 1η φάση

$\Delta K = W_{o\lambda} = W_F + W_T \Rightarrow$

$\Rightarrow K - 0 = F\frac{\ell}{2}\varphi - |\tau_T|\varphi$

$\Rightarrow K = F\frac{\ell}{2}\varphi - |\tau_T|\varphi \Rightarrow K = [F\frac{\ell}{2} - |\tau_T|]\varphi \Rightarrow$

$\Rightarrow K = [16\frac{1}{2} - 2]\varphi \Rightarrow \boxed{K = 6\cdot\varphi \ (SI)}$ για $0\le\varphi\le 48$ rad

... για $\varphi_1 = 48$ rad $\Rightarrow K_1 = 288$ J

2η φάση

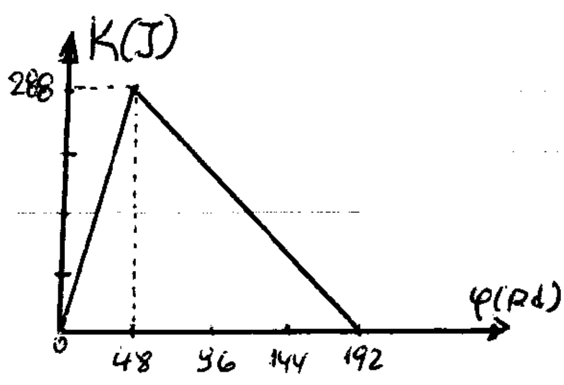
$\Delta K = W_{o\lambda} = -|\tau_T|\varphi \Rightarrow K - K_1 = -|\tau_T|(\varphi-\varphi_1)$

$\Rightarrow K = K_1 - |\tau_T|(\varphi-\varphi_1) \Rightarrow$

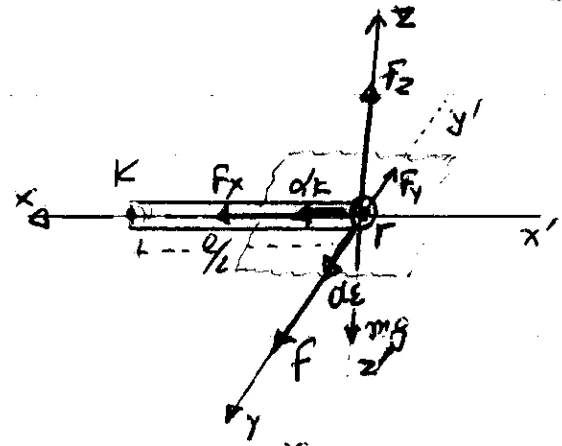
$K = 288 - 2(\varphi - 48) \Rightarrow$

$K = 288 + 96 - 2\varphi$

$\boxed{K = 384 - 2\varphi}$ (SI) για $48\le\varphi\le 192$ rad



γ)



Σφαίρα Γ

Η ράβδος ασκεί στη σφαίρα δύναμη $\vec{F}$ με κατάλληλες συνιστώσες στους άξονες x, y, z

• άξονας z'z. Υπάρχει ισορροπία

$\Sigma F_z = 0 \Rightarrow F_z = mg \Rightarrow \boxed{F_z = 10N}$

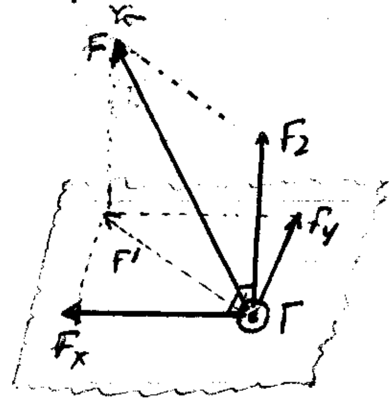
• άξονας x'x, κεντρικός, ακτινικός άξονας

F_x, κεντρομόλος δύναμη

$\Sigma F_x = m a_k = m\omega^2 r = m\omega^2 \ell/2 \Rightarrow F_x = m\omega^2 \ell/2$

$\omega = a_{γων} t = 6\, rad/s^2 \cdot 1s \Rightarrow \omega = 6\, rad/s$

άρα $F_x = 1\cdot 6^2 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{F_x = 18N}$



• άξονας y'y, εφαπτομενικός

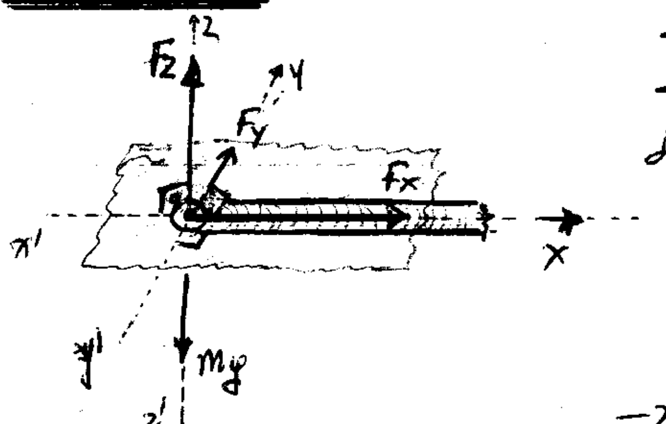
$a_ε = \frac{dυ}{dt} = \frac{d(\omega r)}{dt} = r a_{γων} = \frac{\ell}{2} a_{γων} = \frac{1}{2}\cdot 6 \Rightarrow a_ε = 3 m/s^2$

Θέτω ότι η συνιστώσα της $\vec{F}$ είναι η F_y

Προφανώς $\Sigma F_y = m a_ε \Rightarrow F - F_y = m a_ε \Rightarrow 16 - F_y = 1\cdot 3 \Rightarrow \boxed{F_y = 13N}$

$\vec{F} = \vec{F_x} + \vec{F_y} + \vec{F_z} \Rightarrow F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \Rightarrow \boxed{F = 24,35N}$

Σφαίρα Α



$\Sigma F_z = 0 \Rightarrow F_z = mg \Rightarrow F_z = 10N$

$\Sigma F_x = m\omega^2 \frac{\ell}{2} \Rightarrow F_x = m\omega^2 \frac{\ell}{2} \Rightarrow F_x = 18N$

$\Sigma F_y = m a_ε \Rightarrow F_y = m a_ε \Rightarrow F_y = 3N$

$\vec{F} = \vec{F_x} + \vec{F_y} + \vec{F_z} \Rightarrow F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$

$\Rightarrow \boxed{F = 20,8N}$

δ) Από τις συνιστώσες της $\vec{F}$, οι $\vec{F_z}$ και $\vec{F_y}$ έχουν σταθερά μέτρα $F_z = mg = 10N$ κι $F_y = m a_ε = m\frac{\ell}{2} a_{γων} = 3N$.

Η F μεγιστοποιείται όταν μεγιστοποιείται η F_x.

$$\left.\begin{aligned} F_{x,max} &= m\,\omega_{max}^2 \frac{\ell}{2} \\ \omega_{max} &= a_{1\gamma\omega\nu}\, t_1 = 6\,rad/s^2 \cdot 4\,s = 24\,rad/s \end{aligned}\right\} \Rightarrow F_{x,max} = 1 \cdot 24^2 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow F_{x,max} = 288\,N$$

άρα $F_{max} = \sqrt{F_{x,max}^2 + F_y^2 + F_z^2} \Rightarrow F_{max} = \sqrt{288^2 + 3^2 + 10^2} \Rightarrow \boxed{F_{max} = 288{,}18\,N}$

ε') $$\frac{dL}{dt} = \frac{d(m\upsilon \ell/2)}{dt} = m\frac{\ell}{2}\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right) = m\frac{\ell}{2}\left(\frac{d(\omega \ell/2)}{dt}\right) = m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \cdot \frac{d\omega}{dt}$$

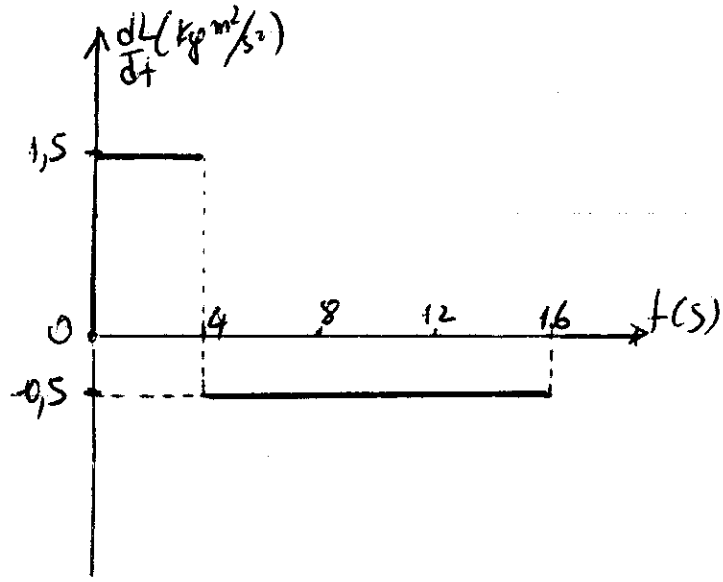
$$\Rightarrow \frac{dL}{dt} = m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 a_{\gamma\omega\nu}$$

1η φάση. $\frac{dL}{dt} = m\left[\frac{\ell}{2}\right]^2 a_{1\gamma\omega\nu} = 1\,kg\left(\frac{1}{2}m\right)^2 \cdot 6\,rad/s^2 \Rightarrow \boxed{\frac{dL}{dt} = 1{,}5\,kg\,m^2/s^2}$

για $0 \le t \le 4\,s$

2η φάση $\frac{dL}{dt} = m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 a_{2\gamma\omega\nu} = 1\,kg\left(\frac{1}{2}m\right)^2 \cdot (-2\,rad/s^2)$

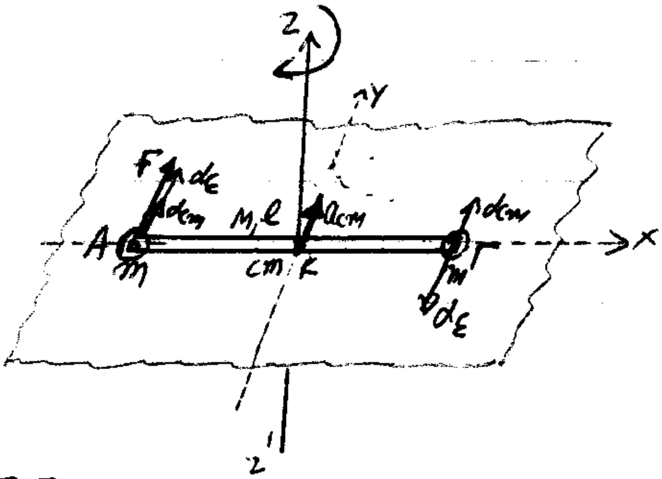
$\Rightarrow \boxed{\frac{dL}{dt} = -0{,}5\,kg\,m^2/s^2}$ για $4\,s \le t \le 16\,s$



9.104

$I=\frac{1}{12}M\ell^2+m(\frac{\ell}{2})^2+m(\frac{\ell}{2})^2$

$\Rightarrow \boxed{I=1\,kg\,m^2}$



4 α1) $\Sigma F_y = M_{ολ}\, a_{cm} \Rightarrow F=(M+2m)a_{cm}$

$\Rightarrow a_{cm}=\frac{F}{M+2m} \Rightarrow \boxed{a_{cm}=2\,m/s^2}$

α2) $\Sigma\tau_z = I a_{γων} \Rightarrow F\frac{\ell}{2}=I a_{γων}$

$\Rightarrow a_{γων}=\frac{F\ell}{2I}=\frac{16N\cdot 1m}{2\cdot 1kg\,m^2} \Rightarrow \boxed{a_{γων}=8\,rad/s^2}$

α.3) $a_ε=\frac{\ell}{2}a_{γων}=\frac{1}{2}m\cdot 8\,rad/s^2 \Rightarrow a_ε=4\,m/s^2$

$\vec a_{A,y}=\vec a_{cm}+\vec a_ε \Rightarrow \boxed{a_{A,y}=6\,m/s^2}$

$\vec a_{Γ,y}=\vec a_{cm}+\vec a_ε \Rightarrow a_{Γ,y}=-a_{cm}+a_ε \Rightarrow \boxed{a_{Γ,y}=2\,m/s^2}$

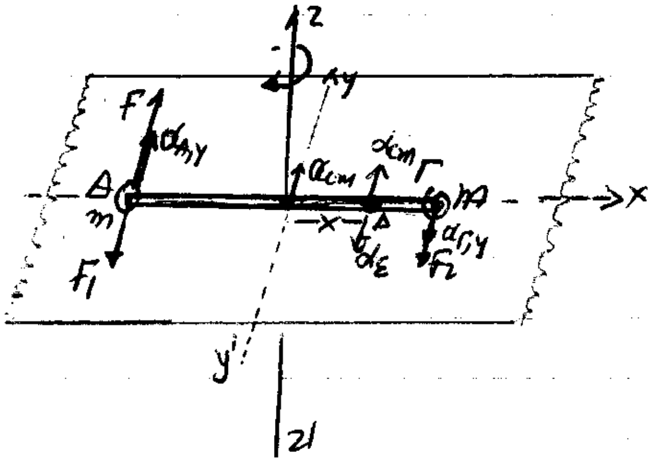
* κεντρομόλο επιτάχυνση στα σφαιρίδια την t=0 δεν υπάρχει $a_κ=\omega^2\ell/2=0$ $(\omega=0)$

α.4) Σφαιρίδιο Α

$\Sigma\vec F_y=m\vec a_{A,y} \Rightarrow F-F_1=m\, a_{A,y}$

$\Rightarrow F_1=F-m\, a_{A,y} \Rightarrow$

$\Rightarrow F_1=16-1\cdot 6 \Rightarrow \boxed{F_1=10N}$



Σφαιρίδιο Γ

$\Sigma\vec F_y=m\vec a_{Γ,y} \Rightarrow F_2=m\, a_{Γ,y}$

$\Rightarrow F_2=1\cdot 2 \Rightarrow \boxed{F_2=2N}$

α.5) $\vec a_Δ=0 \Rightarrow \vec a_ε+\vec a_{cm}=0 \Rightarrow a_ε-a_{cm}=0 \Rightarrow a_ε=a_{cm} \Rightarrow x\,a_{γων}=a_{cm}$

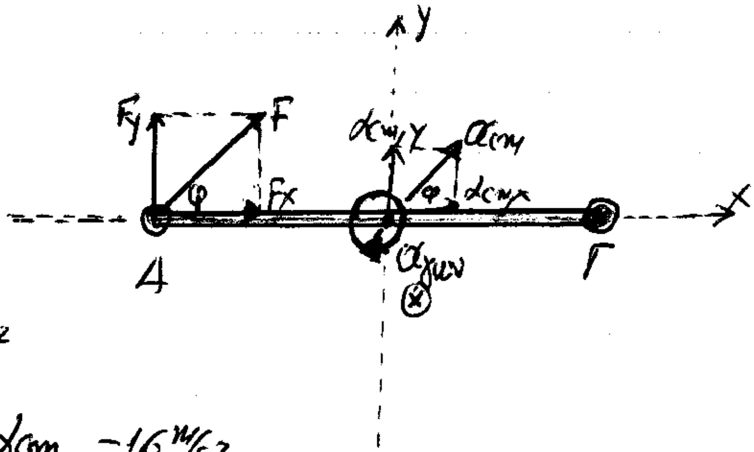
$\Rightarrow x=\frac{a_{cm}}{a_{γων}} \Rightarrow x=\frac{2m/s^2}{8\,rad/s^2} \Rightarrow \boxed{x=0{,}25m}$

β) $x=\frac{a_{cm}}{a_{γων}}=\frac{F/(M+2m)}{\frac{F\ell/2}{I}} \Rightarrow \boxed{x=\frac{2I}{(M+2m)\ell}}$ ανεξάρτητο της F.

B) $F_x = F\cos\varphi = 16 \cdot 0{,}8 = 12{,}8N$

$F_y = F\eta\mu\varphi = 16 \cdot 0{,}6 = 9{,}6$

B.1)



$\Sigma F = M_{ολ} a_{cm} \Rightarrow F = (M+2m) a_{cm}$

$\Rightarrow a_{cm} = \dfrac{F}{M+2m} \Rightarrow a_{cm} = 2 m/s^2$

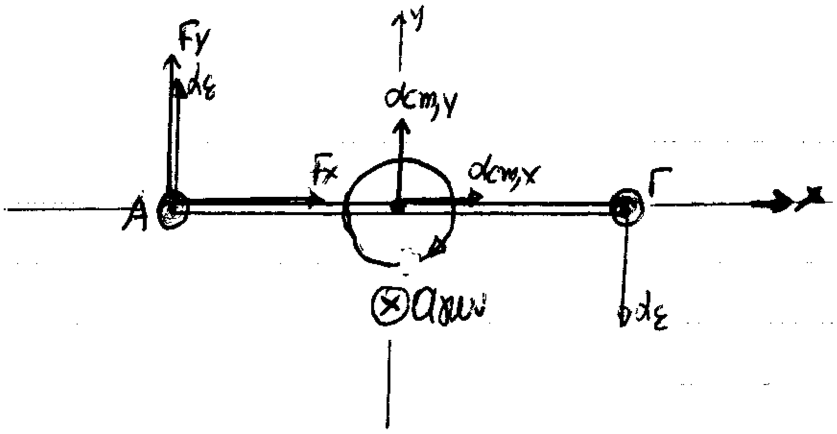
$\Sigma F_x = M_{ολ} a_{cm,x} \Rightarrow 12{,}8 = 8 \cdot a_{cm,x} \Rightarrow a_{cm,x} = 1{,}6 m/s^2$

$\Sigma F_x = M_{ολ} a_{cm,y} \Rightarrow 9{,}6 = 8 a_{cm,y} \Rightarrow a_{cm,y} = 1{,}2 m/s^2$

$a_{cm} = \sqrt{a_{cm,x}^2 + a_{cm,y}^2} \Rightarrow \boxed{a_{cm} = 2 m/s^2}$

B.2) $\Sigma \tau = I a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow F_y \cdot \frac{\ell}{2} = I a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow 9{,}6 \cdot \frac{1}{2} = 1 \cdot a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = 4{,}8 r/s^2$

B.3) $a_E = \frac{\ell}{2} a_{\gamma\omega\nu} = \frac{1}{2} \cdot 4{,}8 \Rightarrow a_E = 2{,}4 m/s^2$ / $a_K = 0$ (κεντρομόλος)



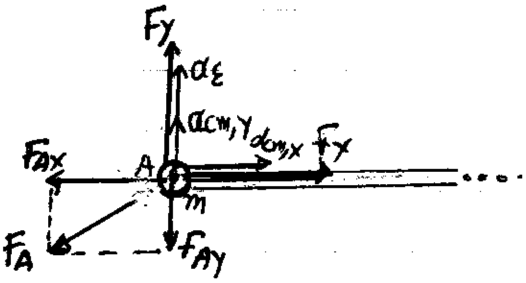
Σφαιρίδιο A

$\Sigma F_x = m a_{cm,x} \Rightarrow$

$\Sigma F_x = 1 \cdot 1{,}6 = 1{,}6N \Rightarrow$

$\Sigma F_x = 1{,}6N \Rightarrow F_x - F_{A,x} = 1{,}6N$

$\Rightarrow 12{,}8 - F_{A,x} = 1{,}6 \Rightarrow F_{A,x} = 11{,}2N$



$\Sigma F_y = m[a_E + a_{cm,y}] = 1 \cdot (2{,}4 + 1{,}2)$

$\Rightarrow \Sigma F_y = 3{,}6N \Rightarrow F_y - F_{A,y} = 3{,}6N$

$\Rightarrow 9{,}6 - F_{A,y} = 3{,}6N$

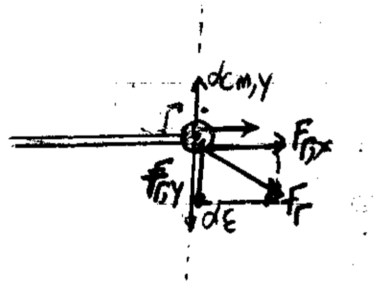
$\Rightarrow F_{A,y} = 6N$

άρα $F_A = \sqrt{F_{A,x}^2 + F_{A,y}^2} \Rightarrow F_A = \sqrt{11{,}2^2 + 6^2} \simeq 12{,}7N \Rightarrow F_A = 12{,}7N$

Σφαιρίδιο Γ

$\Sigma F_x = m\alpha_{cm,x} \Rightarrow F_{\Gamma,x} = 1\cdot 1{,}6 \Rightarrow$

$F_{\Gamma,x} = 1{,}6N$

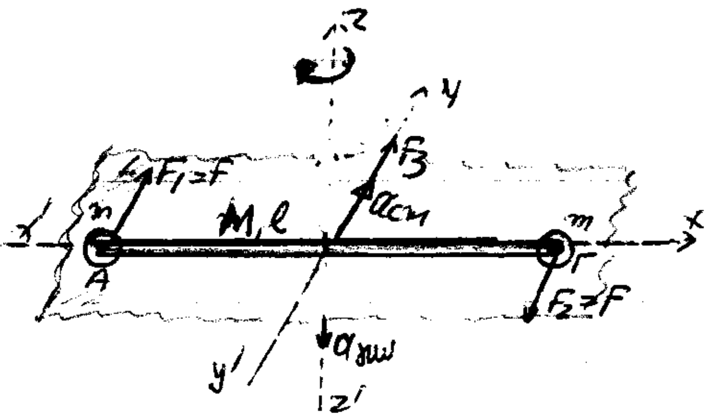


$\Sigma F_y = m(\alpha_\varepsilon - \alpha_{cm,y}) \Rightarrow F_{\Gamma,y} = 1\cdot(3{,}4-1{,}2)$

$\Rightarrow F_{\Gamma,y} = 1{,}2N$

άρα $\vec{F}_\Gamma = \vec{F}_{\Gamma,x} + \vec{F}_{\Gamma,y} \Rightarrow F_\Gamma = \sqrt{F_{\Gamma,x}^2 + F_{\Gamma,y}^2} \Rightarrow \boxed{F_\Gamma = 2N}$

9.105



α1) $\Sigma F_y = m_{o\lambda}\alpha_{cm} \Rightarrow F_3 + F_1 - F_2 = m_{o\lambda}\alpha_{cm}$

$\Rightarrow F_3 = (M+2m)\alpha_{cm} \Rightarrow \boxed{\alpha_{cm} = 2 m/s^2}$

α2) $\Sigma \tau_{(K)} = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow F_1\frac{\ell}{2} + F_2\frac{\ell}{2} = I\alpha_{\gamma\omega\nu}$

$\Rightarrow F\ell = I\alpha_{\gamma\omega\nu}$

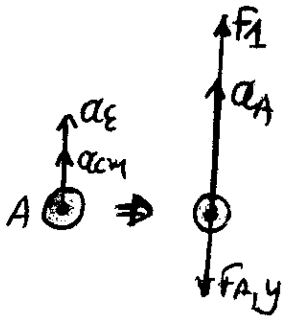
$I = \ldots = 1 kgm^2$ $\Big\} \Rightarrow \boxed{\alpha_{\gamma\omega\nu} = 8 rad/s^2}$

α3) $\alpha_\varepsilon = \frac{\ell}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{1}{2}8 = 4 m/s^2$

$\alpha_\kappa = \omega^2\frac{\ell}{2} = 0$

$\alpha_A = \alpha_\varepsilon + \alpha_{cm} \Rightarrow \boxed{\alpha_A = 6 m/s^2}$

$\alpha_\Gamma = \alpha_\varepsilon - \alpha_{cm} \Rightarrow \boxed{\alpha_\Gamma = 2 m/s^2}$



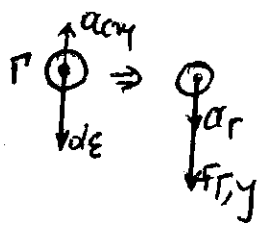
α4) Σφαιρίδιο Α

$\Sigma F_y = m\alpha_A \Rightarrow \Sigma F_y = 1\cdot 6 = 6N \Rightarrow F_1 - F_{A,y} = 6 \Rightarrow 8 - F_{A,y} = 6 \Rightarrow \boxed{F_{A,y} = 2N}$

Σφαιρίδιο Γ

$\Sigma F_y = m\alpha_\Gamma \Rightarrow F_{\Gamma,y} = 1\cdot 2 = 2N$

$\Rightarrow \boxed{F_{\Gamma,y} = 2N}$



β)

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu} t^2 \xrightarrow{\Delta\varphi = 2\pi} 2\pi = \frac{1}{2}\cdot 8 t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ s$$

β.1) $\Delta y_{cm} = \frac{1}{2} a_{cm} t^2 \Rightarrow \Delta y_{cm} = \frac{1}{2}\cdot 2\,m/s^2 \cdot \frac{\pi}{2}\,s^2 \Rightarrow \boxed{\Delta y_{cm} = 1{,}57\,m}$

β.2) $\left.\begin{array}{l} v_{cm} = a_{cm} t = 2\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ m/s \\ \omega = \alpha_{\gamma\omega\nu} t = 8\sqrt{\pi/2}\ rad/s \end{array}\right\} K = \frac{1}{2} M_{o\lambda} v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{2} 8\cdot\left(2\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}\, 1\cdot\left(8\sqrt{\pi/2}\right)^2$$

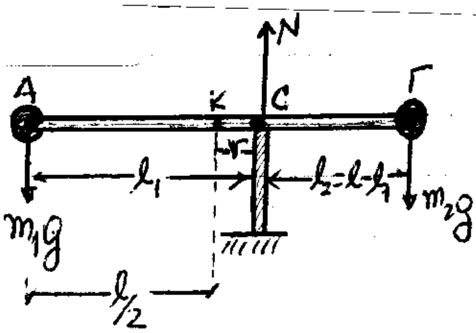
$$\Rightarrow K = 4\cdot 4\,\frac{\pi}{2} + \frac{64}{2}\cdot\frac{\pi}{2} \Rightarrow K = 24\pi \Rightarrow \boxed{K = 75{,}36\,J}$$

$$L = I\omega = I\alpha_{\gamma\omega\nu} t = 1\cdot 8\sqrt{\pi/2} \Rightarrow \boxed{L \simeq 10\,kg\,m^2/s}$$

δ.1) $\left.\begin{array}{l} \left(\frac{dL}{dt}\right)_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = \Sigma\tau = F\cdot l = 8N\cdot 1m = 8\,kg\,m^2/s^2 \\ \text{ή } \left(\frac{dL}{dt}\right)_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = I\alpha_{\gamma\omega\nu} = 1\cdot 8 = 8\,kg\,m^2/s^2 \end{array}\right\} \boxed{\left(\frac{dL}{dt}\right) = 8\,kg\,m^2/s^2}$

δ.2) ! $\left(\frac{dL}{dt}\right)_{\rho o\delta} = I_{\rho o\delta}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} = 0{,}5\cdot 8 = 4\,kg\,m^2/s^2 \Rightarrow \boxed{\left(\frac{dL}{dt}\right)_{\rho o\delta} = 4\,kg\,m^2/s^2}$

9.106



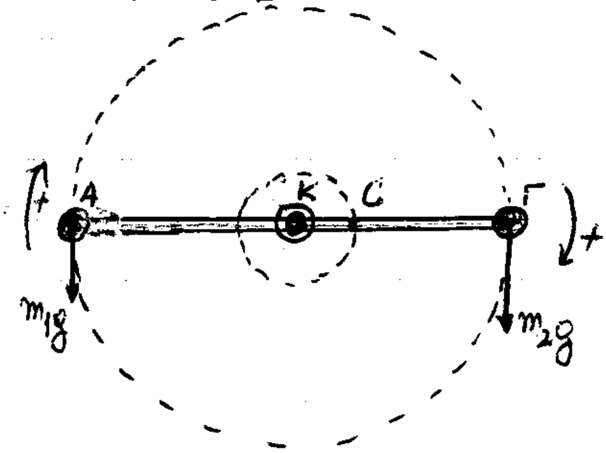
A) Προκειμένου πρέπει $\Sigma\tau_{(c)}=0$

$\Rightarrow m_2 g(\ell-\ell_1) - m_1 g \ell_1 = 0$

$\Rightarrow m_2\ell - m_2\ell_1 - m_1\ell_1 = 0$

$\Rightarrow \ell_1 = \dfrac{m_2\ell}{m_1+m_2} \Rightarrow \ell_1 = \dfrac{6kg\cdot 0{,}5m}{10kg}$

$\Rightarrow \ell_1 = 0{,}3m$, $\ell_2 = 0{,}2m$ και $r = \ell_1 - \ell/2 \Rightarrow \boxed{r = 0{,}05m}$ ✓



B1) $\Sigma\tau_{(K)} = I\cdot\alpha_{γων} \Rightarrow$

$\Rightarrow m_2 g\frac{\ell}{2} - m_1 g\frac{\ell}{2} = \left[m_1\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + m_2\left(\frac{\ell}{2}\right)^2\right]\alpha_{γων}$

$\Rightarrow (m_2-m_1)g = (m_1+m_2)\frac{\ell}{2}\alpha_{γων}$

$\Rightarrow \alpha_{γων} = \dfrac{2(m_2-m_1)g}{(m_1+m_2)\ell}$

$\overset{ΣΕ}{\Rightarrow} \alpha_{γων} = \dfrac{2(6-4)\cdot 10}{(4+6)\cdot 0{,}5} \Rightarrow \alpha_{γων} = 8\,rad/s^2 \Rightarrow \boxed{\dfrac{d\omega}{dt} = 8\,rad/s^2}$ ✓

$\left[I_K = m_1\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + m_2\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = (m_1+m_2)\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = 10kg\left(\frac{0{,}5}{2}\right)^2 = \frac{10}{16}kg\,m^2 \Rightarrow I = \frac{10}{16}kg\,m^2\right]$

B-2) <u>Προσοχή</u>: Οι μόνες εξωτερικές δυνάμεις στο σύστημα είναι τα βάρη των σφαιρών m_1g, m_2g και η δύναμη από τον άξονα περιστροφής.

• Για το σύστημα $\dfrac{dL_{συστ}}{dt} = \Sigma\tau_{(K)\,εξωτ} = m_2 g\frac{\ell}{2} - m_1 g\frac{\ell}{2} = (m_2-m_1)g\frac{\ell}{2}$

$= (6-4)kg\cdot 10\,m/s^2\cdot\frac{0{,}5}{2}m \Rightarrow \boxed{\dfrac{dL_{συστ}}{dt} = 5\,kg\,m^2/s^2}$ ✓

<u>Σχόλιο</u>: $L_{συστ} = I_{συστ}\cdot\omega \Rightarrow \dfrac{dL_{συστ}}{dt} = I_{συστ}\dfrac{d\omega}{dt} = I_{συστ}\,\alpha_{γων} = \frac{10}{16}\cdot 8 = 5\,kg\,m^2/s^2$

$L = \Sigma\tau_{εξ(K)}$

Σχόλιο: $L_{συστ} = L_1 + L_2 = m_1 v_1 \frac{\ell}{2} + m_2 v_2 \frac{\ell}{2} = m_1 \omega \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + m_2 \omega \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$

ω = ίδιο – κοινό, $L_{ράβδου} = 0$, $I_p = 0$, $m_p = 0$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow L_{συσ} = \left[m_1 \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + m_2 \left(\frac{\ell}{2}\right)^2\right]\omega \Rightarrow L_{συσ} = I_{συσ} \cdot \omega \; \ldots$$

• Για τη σφαίρα m_1: $L_1 = m_1 v_1 \frac{\ell}{2} = m_1 \omega \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = m_1 \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \omega$

$$\Rightarrow \frac{dL_1}{dt} = m_1 \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \frac{dL_1}{dt} = m_1 \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \alpha_{γων} \overset{SI}{\Rightarrow} \frac{dL_1}{dt} = 4 \left(\frac{0{,}5}{2}\right)^2 \cdot 8 \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{dL_1}{dt} = I_{1(K)} \cdot \alpha_{γων}} \;!!$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dL_1}{dt} = 2\,kg\,m^2/s^2}$$

• Ομοίως για τη σφαίρα m_2: $\frac{dL_2}{dt} = m_2 \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \alpha_{γων} = I_{2(K)} \alpha_{γων}$

$$\Rightarrow \frac{dL_2}{dt} = 6 \cdot \left(\frac{0{,}5}{2}\right)^2 \cdot 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dL_2}{dt} = 3\,kg\,m^2/s^2}$$

Σχόλια: α) $\frac{dL_1}{dt} + \frac{dL_2}{dt} = \frac{dL_{συσ}}{dt}$

β) Το εύκολο λάθος που μπορεί να γίνει είναι

να πούμε $\frac{dL_2}{dt} = \Sigma\tau_{(2)(K)} = m_2 g \cdot \frac{\ell}{2} = 6 \cdot 10 \frac{0{,}5}{2} = 15\,kg\,m^2/s^2$ (!!)

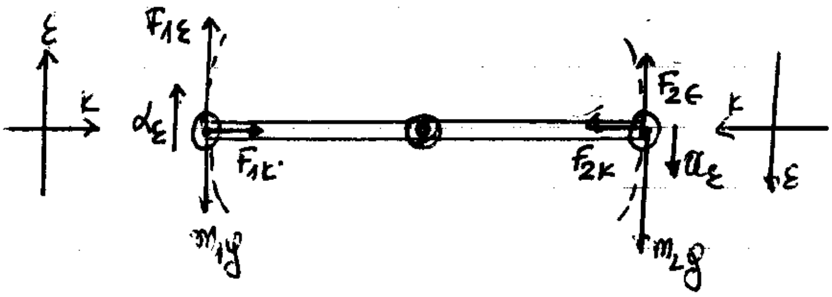
Πού βρίσκεται το λάθος; $\Rightarrow$ Αν μελετήσουμε τη περιστροφή της σφαίρας γύρω της στερεάς

$\frac{dL_2}{dt} = \Sigma\tau_{(2)}$ πρέπει να βάλουμε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα και αυτές είναι όχι μόνο το βάρος $m_2 g$ αλλά και η δύναμη F_2 από τη ράβδο, οπότε έπρεπε να γράψουμε

$\frac{dL_2}{dt} = \Sigma\tau_{(2)} = \tau_{m_2 g} + \tau_{F_2}$ … (θα το δούμε πιο κάτω)

B.3)

Αμέσως μετά την $t=0$ έχουμε
$ω \simeq 0$ και $α_{γων} = 8 \frac{rad}{s^2}$



Κάθε σφαιρίδιο έχει

- κεντρομόλο επιτάχυνση $α_κ = ω^2 \frac{\ell}{2} \simeq 0$
- επιτάχυνση στον εφαπτομενικό άξονα $α_ε = \frac{dυ}{dt} = \frac{d(ω \ell/2)}{dt} \Rightarrow$

$$\Rightarrow α_ε = \frac{\ell}{2}\frac{dω}{dt} \Rightarrow α_ε = \frac{\ell}{2} α_{γων} = \frac{0,5}{2}\cdot 8 \Rightarrow α_ε = 2\, m/s^2$$

- Σφαίρα m_1: $ΣF_κ = m_1 α_κ \Rightarrow F_{1κ} = m_1 α_κ = 0 \Rightarrow F_{1κ} = 0$

$ΣF_ε = m_1 α_ε \Rightarrow F_{1ε} - m_1 g = m_1 α_ε \Rightarrow$

$\Rightarrow F_{1ε} = m_1 g + m_1 α_ε \Rightarrow F_{1ε} = 4kg\cdot(10+2)\, m/s^2 \Rightarrow F_{1ε} = 48N$

Άρα η δύναμη F_1 που ασκεί η ράβδος στη σφαίρα είναι $\vec{F_1} = \vec{F_{1ε}} + \vec{F_{1κ}} \Rightarrow F_1 = F_{1ε} \Rightarrow \boxed{F_1 = 48N}$

- Σφαίρα m_2: $ΣF_κ = m_2 α_κ = 0 \Rightarrow F_{2κ} = 0$

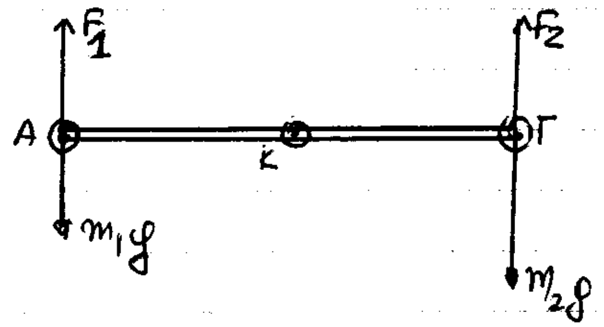
$ΣF_ε = m_2 α_ε \Rightarrow m_2 g - F_{2ε} = m_2 α_ε \Rightarrow$

$\Rightarrow F_{2ε} = m_2 (g - α_ε) = 6kg(10-2)\, m/s^2 \Rightarrow F_{2ε} = 48N$

Άρα $\vec{F_2} = \vec{F_{2ε}} + \vec{F_{2κ}} = \vec{F_{2ε}} \Rightarrow \boxed{F_2 = 48N}$

Σχόλιο: ... και πάλι στο Β-2....

Στροφορμή της m_1 με βάση τη σχέση $\frac{dL_1}{dt} = Στ_{(1)}$



$$\frac{dL_1}{dt} = F_1 \frac{\ell}{2} - m_1 g \frac{\ell}{2} = (F_1 - m_1 g)\frac{\ell}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dL_1}{dt} = (48-40)\frac{0,5}{2} \Rightarrow \frac{dL_1}{dt} = 2\, kg\, m^2/s^2$$

Όμοια $\frac{dL_2}{dt} = \Sigma\tau_2 = m_2 g\frac{\ell}{2} - F_2\frac{\ell}{2} = (m_2 g - F_2)\frac{\ell}{2} \overset{SI}{=} (60-48)\frac{0{,}5}{2}$

$\Rightarrow \frac{dL_2}{dt} = 3\,kg\,m^2/s^2$

B-4). Η δύναμη του άξονα σε στροφική κίνηση ... υπολογίζεται στις εξισώσεις μελέτης της κίνησης (... όταν περιστρέφεται) του C.M του συστήματος

- Εδώ το κέντρο μάζας του συστήματος C εκτελεί κυκλική κίνηση ακτίνας $r=0{,}05m$ με κέντρο το μέσον K της ράβδου.
- Για την μελέτη του CM θεωρούμε όλη τη μάζα του συστήματος $m_{ολ}=m_1+m_2=10kg$ συγκεντρωμένη στο CM και όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα ως εφαρμοζόμενες στο CM. (Προφανώς τις εσωτερικές δυνάμεις όπως οι εσωτερικές αναιρούνται)

→ Οι δυνάμεις αυτές είναι

- Το βάρος του συστήματος $m_{ολ} g = 100N$
- Η δύναμη από τον άξονα $\vec{A}$, την οποία θα την αναλύσουμε σε ακτινική $\vec{A}_K$ και εφαπτομενική $\vec{A}_E$.

Το C.M εκτελεί κυκλική κίνηση για την οποία [illegible] την $t=0$ έχουμε

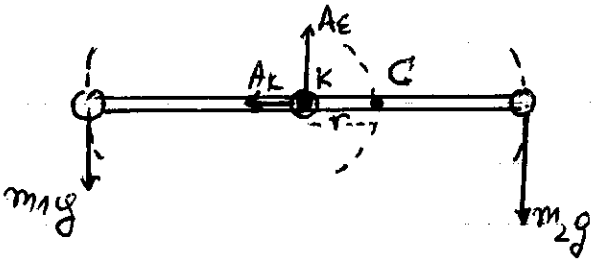
$\omega = 0 \Rightarrow a_{K,C} = \omega^2 \ell/2 = 0$

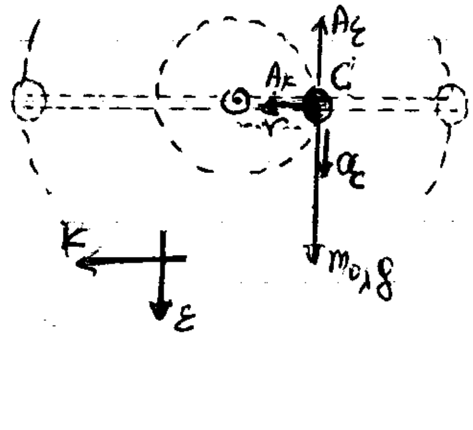
↳ κεντρομόλος επιτάχυνση

$a_C = \frac{du}{dt} = \frac{d(\omega r)}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\,a_{γων}$

$\Rightarrow a_C = 0{,}05\cdot 8 \Rightarrow a_C = 0{,}40\,m/s^2$

Γράφοντας τις εξισώσεις της δυναμικής για το CM παίρνουμε





$\Sigma F_K = m_{o\lambda} a_K \Rightarrow A_K = 0$

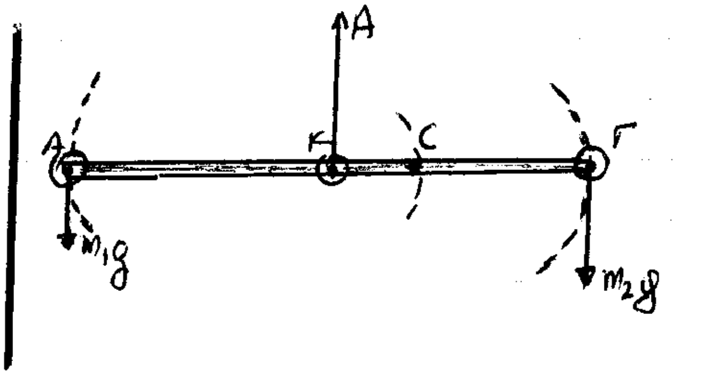
$\Sigma F_\varepsilon = m_{o\lambda} a_c \Rightarrow m_{o\lambda} g - A_\varepsilon = m_{o\lambda} a_c \Rightarrow A_\varepsilon = m_{o\lambda}(g - a_c)$

$\Rightarrow A_\varepsilon = 10kg\,(10\,m/s^2 - 0{,}4\,m/s^2) \Rightarrow \boxed{A_\varepsilon = 96N}$

Άρα $\vec{A} = \vec{A_K} + \vec{A_\varepsilon} = \vec{A_\varepsilon} \Rightarrow A = 96N$

Δηλαδή ο άξονας ασκεί στη ράβδο αμέσως μετά την $t=0$ κατακόρυφη δύναμη $\boxed{A = 96N}$

Στο σχήμα φαίνονται όλες οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα αμέσως μετά την $t=0$



Μια διαφορετική αντιμετώπιση για τον υπολογισμό του $\vec{A}$.

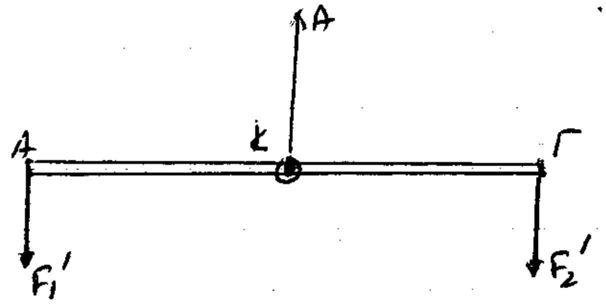
Τοποθετούμε όλες τις δυνάμεις που δέχεται η αβαρής ράβδος, αυτές είναι

- οι δυνάμεις $\vec{F_1'} = -\vec{F_1}$ ($F_1' = 48N$) και $\vec{F_2'} = -\vec{F_2}$ ($F_2' = 48N$) από τα σφαιρίδια
- Η δύναμη $\vec{A}$ από τον άξονα περιστροφής

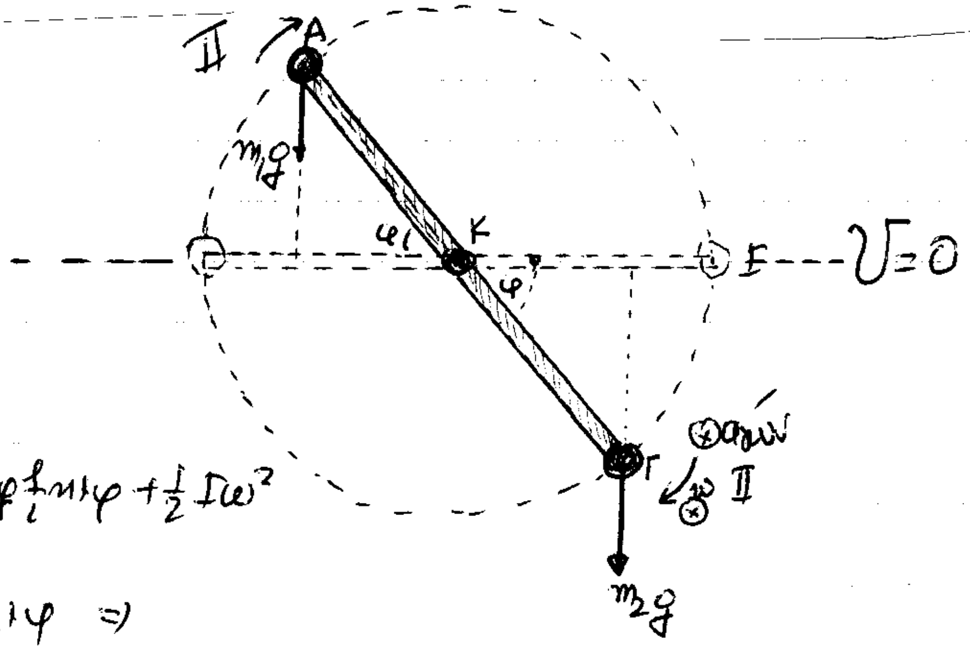
Το κέντρο μάζας της ράβδου είναι το K και αυτό μένει ακίνητο

$\Sigma F = 0 \Rightarrow A = F_1' + F_2'$

$\Rightarrow A = 96N$



Γ)



Υπολογισμός του ω στη θέση ΙΙ

$E_{μηχ} = σταθ \Rightarrow$

$U_I + K_I = U_{II} + K_{II}$

$\Rightarrow 0 + 0 = m_1 g \frac{\ell}{2} ημφ - m_2 g \frac{\ell}{2} ημφ + \frac{1}{2} I\omega^2$

$\Rightarrow \frac{1}{2} I\omega^2 = (m_2 - m_1) g \frac{\ell}{2} ημφ \Rightarrow$

$\overset{SI}{\Rightarrow} \frac{10}{16} \cdot \omega^2 = (6-4) \cdot 10 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}81 \Rightarrow \frac{10}{16} \omega^2 = 2 \cdot 10 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}81 \Rightarrow \omega^2 = 16 \cdot 0{,}81$

$\Rightarrow \omega = 4 \cdot 0{,}9 \Rightarrow \boxed{\omega = 3{,}6\ rad/s}$

Υπολογισμός της $a_{γων}$ στη θέση ΙΙ

$\Sigma \tau_{(K)} = I_K\, a_{γων} \Rightarrow m_2 g \frac{\ell}{2} συνφ - m_1 g \frac{\ell}{2} συνφ = I \cdot a_{γων}$

$\Rightarrow (m_2 - m_1) g \frac{\ell}{2} συνφ = I\, a_{γων} \overset{SI}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow (6-4) \cdot 10 \cdot \frac{0{,}5}{2} \cdot 0{,}58 = \frac{10}{16} \cdot a_{γων} \Rightarrow \boxed{a_{γων} = 4{,}64\ rad/s^2}$

<u>Σφαίρα m_2</u> $K_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_2 (\omega \frac{\ell}{2})^2 = \frac{1}{2} m_2 (\frac{\ell}{2})^2 \cdot \omega^2 \Rightarrow$

$= \frac{1}{2} I_{2(K)} \omega^2$

$\Rightarrow \frac{dK_2}{dt} = \frac{1}{2} m_2 (\frac{\ell}{2})^2 2 \frac{d\omega}{dt} \omega \Rightarrow \frac{dK_2}{dt} = m_2 (\frac{\ell}{2})^2 a_{γων} \cdot \omega$

$= I_2\, a_{γων}\, \omega = \Sigma \tau_{(2)} \omega$

$\Rightarrow \frac{dK_2}{dt} = 6 \cdot (\frac{0{,}5}{2})^2 \cdot 4{,}64 \cdot 3{,}6$

$\Rightarrow \boxed{\frac{dK_2}{dt} = 6{,}264\ J/s}$

ή $\frac{dK_2}{dt} = \Sigma\tau_{2(K)} \cdot \omega = I_{2(K)} \alpha_{\gamma\omega\nu} \omega = m_2 \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot \omega$.

<u>Σφαίρα m_1</u> . ... ομοίως

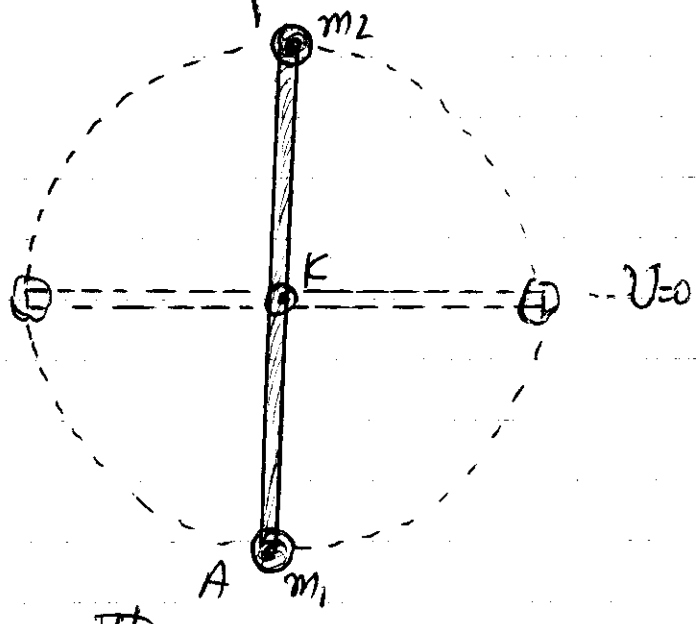
$$\frac{dK_1}{dt} = m_1 \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot \omega = 4 \cdot \left(\frac{0{,}5}{2}\right)^2 \cdot 4{,}64 \cdot 3{,}6 \Rightarrow \boxed{\frac{dK_1}{dt} = 4{,}176 \, J/s}$$

<u>Σχόλιο</u>: Εδώ υπάρχει η εύκολη δυνατότητα για λάθος εάν γράψουμε

$$\frac{dK_2}{dt} = \Sigma\tau_{(2)} \cdot \omega = m_2 g \frac{\ell}{2} \sigma\upsilon\nu\varphi \, \omega \; ... \text{λάθος}$$

... αγνοήσαμε τη δύναμη που ασκεί η ράβδος στη σφαίρα m_2 ... άλλα θέλει πιο σύνθετη διαδικασία για να υπολογισθεί ... F_{2x} και F_{2y}

Δ) Έστω ότι η m_2 φθάνει στην άνω κατακόρυφη θέση III όπου προφανώς πρέπει $\omega > 0$ ή $K > 0$



$E_{\mu\eta\chi}(III) = E_{\mu\eta\chi}(I)$

$\Rightarrow U_{III} + K_{III} = K_I + U_I$

$\Rightarrow m_2 g \frac{\ell}{2} - m_1 g \frac{\ell}{2} + K' = 0 + 0$

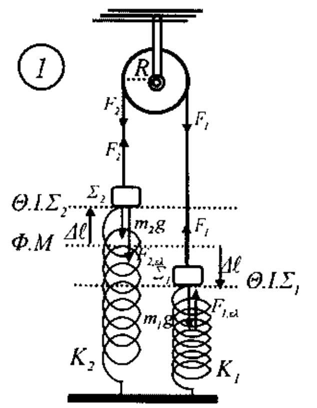
$\Rightarrow K' = (m_1 - m_2) g \frac{\ell}{2} < 0$

... άτοπο...

άρα δεν φθάνει στη θέση III.

9.107 676

Στο σχήμα τα σώματα Σ_1 και Σ_2 έχουν μάζες $m_1 = 2,5Kg$ και $m_2 = 0,5Kg$ τα δε ελατήρια είναι ιδανικά με σταθερές $K_1 = K_2 = 50N/m$. Τα σώματα είναι δεμένα αφενός στο πάνω μέρος των ελατηρίων, αφετέρου με αβαρές μη εκτατό νήμα που διέρχεται μέσα από τροχαλία μάζας $M = 2Kg$ και ακτίνας $R = 0,1m$.
Όλο το σύστημα ισορροπεί και στην κατάσταση αυτή κάθε ελατήριο έχει υποστεί την ίδια στατική παραμόρφωση. Απομακρύνουμε κατά $y = 0,20m$ προς τα κάτω το σώμα Σ_1 και το αφήνουμε ελεύθερο.

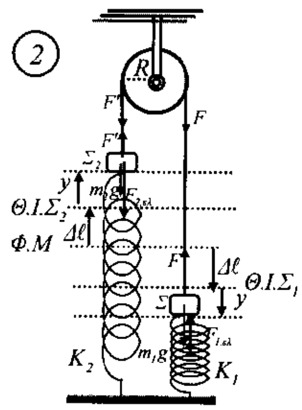


Α) Να δείξτε ότι τα σώματα Σ_1 και Σ_2 εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση.
Β) Να γράψτε την εξίσωση απομάκρυνσης και ταχύτητας για κάθε σώμα.
Γ) Να υπολογίστε την μέγιστη κινητική ενέργεια της τροχαλίας.
Δ) Να βρείτε τον μέγιστο ρυθμό μεταβολής της στροφορμής και της κινητικής ενέργειας της τροχαλίας.
Ε) Ποιο μπορεί να είναι το μέγιστο πλάτος της ταλάντωσης.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονά της $I = \frac{1}{2}MR^2$ και $g = 10ms^{-2}$.

Μελέτη- Επεξεργασία:

Α) Προσδιορισμός της θέσης ισορροπίας για κάθε σώμα Σ_1 και Σ_2 και υπολογισμός της στατικής παραμόρφωσης του κάθε ελατηρίου. Στη θέση αυτή το κάθε ελατήριο έχει στατική παραμόρφωση $\Delta\ell$ (σχήμα 1).



Σώμα Σ_1 : $\Sigma Fy = 0 \Rightarrow m_1g - F_1 - K_1\Delta\ell = 0 \Rightarrow$

$F_1 = m_1g - K_1\Delta\ell$ (1)

Σώμα Σ_2 : $\Sigma Fy = 0 \Rightarrow F_2 - m_2g - K_2\Delta\ell = 0 \Rightarrow$

$F_2 = m_2g + K_2\Delta\ell = 0$ (2)

Τροχαλία: $\Sigma\tau = 0 \Rightarrow F_1R - F_2R = 0 \Rightarrow F_1 = F_2$ (3)

Από τις (1,2,3) παίρνουμε:

$$m_1g - K_1\Delta\ell = m_2g + K_2\Delta\ell \Rightarrow m_1g - m_2g = K_1\Delta\ell + K_2\Delta\ell \Rightarrow$$

$$(m_1 - m_2)g = (K_1 + K_2)\Delta\ell \Rightarrow \Delta\ell = \frac{(m_1 - m_2)g}{K_1 + K_2} \Rightarrow$$

$$\Delta\ell = \frac{(2,5 - 0,5)10}{50 + 50} \Rightarrow \boxed{\Delta\ell = 0,20m}$$

Θεωρούμε το σώμα Σ_1 σε τυχαία απομάκρυνση y (ας υποθέσουμε θετική) και έστω ότι έχει θετική φορά κίνησης (προς τα κάτω), όπως θετική θεωρείται και η φορά περιστροφής της τροχαλίας. Στη θέση αυτή και το κάθε ελατήριο έχει πρόσθετη παραμόρφωση y, τα δε σώματα απομάκρυνση y και την ίδια επιτάχυνση a. Η επιτάχυνση των σωμάτων και η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας συνδέονται με την σχέση $a = Ra_{γων}$.

Σώμα $Σ_1$: $ΣFy = m_1 a \Rightarrow m_1 g - F - K_1(Δ\ell + y) = m_1 a$ (4)

Σώμα $Σ_2$: $ΣFy = m_2 a \Rightarrow F' - m_2 g - K_2(Δ\ell + y) = m_2 a$ (5)

Τροχαλία: $Στ = Ia_{γων} \Rightarrow FR - F'R = Ia_{γων} \Rightarrow FR - F'R = \frac{1}{2}MR^2\frac{a}{R} \Rightarrow F - F' = \frac{M}{2}a$ (6)

(4)+(5)+(6) $\Rightarrow m_1 g - K_1(Δ\ell + y) - m_2 g - K_2(Δ\ell + y) = \left(m_1 + m_2 + \frac{M}{2}\right)a \Rightarrow$

$$\cancel{(m_1 - m_2)g} - \cancel{(K_1 + K_2)Δ\ell} - (K_1 + K_2)y = \left(m_1 + m_2 + \frac{M}{2}\right)a \Rightarrow \boxed{a = -\frac{K_1 + K_2}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}}y} \Rightarrow$$

$\boxed{a = -25y}$ (S.I)

Σώμα $Σ_1$: $ΣF_y = m_1 a \Rightarrow ΣF_y = 2,5.(-25y) \Rightarrow \boxed{ΣF_y = -62,5y}$, άρα απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά $\boxed{D_1 = -62,5N/m}$.

Σώμα $Σ_2$: $ΣF_y = m_1 a \Rightarrow ΣF_y = 0,5.(-25y) \Rightarrow \boxed{ΣF_y = -12,5y}$, άρα απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά $\boxed{D_2 = -12,5N/m}$.

Β) Η κυκλική συχνότητα ταλάντωσης του κάθε ταλαντωτή είναι $D_1 = m_1\omega_{ταλ}^2 \Rightarrow \omega_{ταλ} = \sqrt{\frac{D_1}{m_1}} \Rightarrow \omega_{ταλ} = \sqrt{\frac{62,5N/m}{2,5Kg}}$, το ίδιο θα βρούμε και για την κυκλική συχνότητα αν χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $D_2 = m_2\omega_{ταλ}^2$.

Το πλάτος της ταλάντωσης για κάθε ταλαντωτή $Σ_1$ και $Σ_2$ είναι όσο η αρχική απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας $A = 0,2$.

Εξίσωση απομάκρυνσης:

$y(t) = Aημ(\omega_{ταλ}t + \varphi_0) \Rightarrow y(t) = 0,2ημ(5t + \varphi_0) \xrightarrow[y=+0,2]{t=0} \ldots$

$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}rad \Rightarrow \ldots \boxed{y(t) = 0,2ημ(5t + \frac{\pi}{2})}$ ή $\boxed{y(t) = 0,2συν(5t)}$ (S.I).

Εξίσωση ταχύτητας: $\boxed{\upsilon(t) = 1συν(5t + \frac{\pi}{2})}$ ή $\boxed{\upsilon(t) = -1ημ(5t)}$ (S.I).

Γ) Μέγιστη κινητική ενέργεια τροχαλίας: $K_{τροχ} = \frac{1}{2}I\omega_{τροχ}^2$,

$I = \frac{1}{2}MR^2 \Rightarrow I = \frac{1}{2}2Kg(0,1m)^2 \Rightarrow I = 0,01Kgm^2$,

$$\omega_{τροχ} = \frac{\upsilon_{γραμ,τροχ}}{R} \xrightarrow{\upsilon_{τροχ} = \upsilon_{σωμ}} \omega_{τροχ} = \frac{1συν(5t + \frac{\pi}{2})}{0,1} \Rightarrow \omega_{τροχ} = 10συν(5t + \frac{\pi}{2})$$

$\Rightarrow \omega_{τροχ} = -10ημ(5t)$

$K_{τροχ,max} = \frac{1}{2}I\omega_{τροχ,max}^2 \Rightarrow K_{τροχ,max} = \frac{1}{2}0,01.10^2 \Rightarrow \boxed{K_{τροχ,max} = 0,5J}$

Δ) $L = I\omega_{τροχ} \Rightarrow \frac{dL}{dt} = \frac{d(I\omega_{τροχ})}{dt} \Rightarrow \frac{dL}{dt} = I\alpha_{γων} \xrightarrow{\alpha_{γων}=\frac{\alpha}{R}} \frac{dL}{dt} = I\frac{a}{R} \Rightarrow \frac{dL}{dt} = 0{,}01\frac{-25y}{0{,}1}$

$\Rightarrow \frac{dL}{dt} = -2{,}5y \Rightarrow \left(\frac{dL}{dt}\right)_{max} = -2{,}5y_{max} \Rightarrow \left(\frac{dL}{dt}\right)_{max} = 2{,}5.0{,}2 .. \boxed{\left(\frac{dL}{dt}\right)_{max} = 0{,}5Kgm^2/s^2}$

$K_{τροχ} = \frac{1}{2}I\omega^2_{τροχ} \Rightarrow \frac{dK_{τροχ}}{dt} = \frac{d(\frac{1}{2}I\omega^2_{τροχ})}{dt} \Rightarrow \frac{dK_{τροχ}}{dt} = \frac{1}{2}I2\omega_{τροχ}\frac{d(\omega_{τροχ})}{dt} \Rightarrow$

$\frac{dK_{τροχ}}{dt} = I\alpha_{γων}\omega_{τροχ} \Rightarrow \frac{dK_{τροχ}}{dt} = I\frac{a}{R}\omega_{τροχ} \Rightarrow \frac{dK_{τροχ}}{dt} = 0{,}01\frac{-25y}{0{,}1}[-10ημ(5t)] \Rightarrow$

$\frac{dK_{τροχ}}{dt} = 0{,}01\frac{-25.0{,}2συν(5t)}{0{,}1}[-10ημ(5t)] \Rightarrow \frac{dK_{τροχ}}{dt} = 5συν(5t)\,ημ(5t) \Rightarrow$

$\frac{dK_{τροχ}}{dt} = 2{,}5\,ημ(10t)$, άρα $\boxed{\left(\frac{dK_{τροχ}}{dt}\right)max = 2{,}5\frac{J}{s}}$.

Ε)(4)$\Rightarrow 25 - F - 50(0{,}2+y) = 2{,}5(-25y) \Rightarrow F = 15+12{,}5y$. Το νήμα είναι τεντωμένο για $F \ge 0 \Rightarrow 15+12{,}5y \ge 0 \Rightarrow y \ge -1{,}2m$ δηλαδή από το μέρος που είναι δεμένο το $Σ_1$ είναι πάντοτε τεντωμένο <u>κάτω</u> από την θέση αυτή.

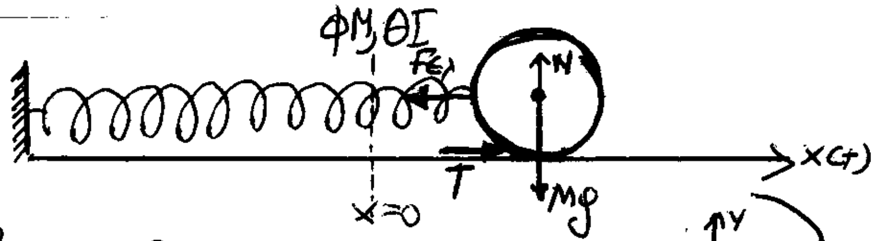
(5) $\Rightarrow F' - 5 - 50(0{,}2+y) = 0{,}5(-25y) \Rightarrow F' = 15+37{,}5y$ Το νήμα είναι τεντωμένο για $F' \ge 0 \Rightarrow 15+37{,}5y \ge 0 \Rightarrow y \ge -0{,}4m$ δηλαδή από το μέρος που είναι δεμένο το $Σ_2$ είναι πάντοτε τεντωμένο <u>πάνω</u> από την θέση αυτή.

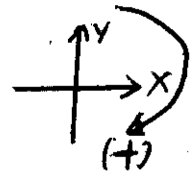
Από τις δύο αυτές σχέσεις τ φαίνεται ότι για να είναι τεντωμένο το νήμα πρέπει τα σώματα να απέχουν το πολύ $|y| = 0{,}4m$ από τη θέση της ισορροπίας τους, άρα $\boxed{A_{max} = 0{,}4m}$

6+9

9.108

1.





α) $\sum \vec{F}_x = M\vec{a}_{cm} \Rightarrow T - F_{ελ} = M a_{cm}$

$\sum \tau = I a_{γων} \Rightarrow -T\cdot R = \frac{1}{2}MR^2 \frac{a_{cm}}{R} \Rightarrow -T = \frac{1}{2} M a_{cm}$

$\overset{(+)}{\Rightarrow} -F_{ελ} = \frac{3}{2} M a_{cm} \Rightarrow -kx = \frac{3}{2} M a_{cm} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{a_{cm} = -\frac{2k}{3M}x}$$

$\Sigma F_x = M a_{cm} \Rightarrow \Sigma F_x = M\left(-\frac{2k}{3M}x\right) \Rightarrow \Sigma F_x = -\frac{2k}{3}x$ άρα α.α.τ με σταθερά επαναφοράς $\boxed{D=\frac{2k}{3}}$

β) $T=0{,}4\pi \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega=\frac{2\pi}{0{,}4\pi} \Rightarrow \omega = 5\,rad/s$

$K = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 \Rightarrow K=\frac{3}{4} M v_{cm}^2 \Rightarrow v_{cm,max} = \sqrt{\frac{4K_{max}}{3M}} = \sqrt{\frac{4\cdot 1{,}5}{3\cdot 2}} \Rightarrow v_{cm,max} = 1\,m/s$

$v_{cm,max} = \omega A \Rightarrow A = \frac{v_{cm,max}}{\omega} \Rightarrow \boxed{A=0{,}2m}$ ✓, $D = M\omega^2 = 2\cdot 5^2 = 50\,N/m$

$D=\frac{2k}{3} \Rightarrow \boxed{k=75\,N/m}$ ✓

γ) Σχόλιο: α.α.τ εκτελεί το cm του δίσκου με σταθερά επαναφοράς $D=50N/m$ και πλάτος $A=0{,}2m$. Η ενέργεια αυτής της ταλάντωσης είναι $E_{ταλ} = \frac{1}{2} DA^2 = \frac{1}{2} 50\cdot 0{,}2^2$

$\Rightarrow E_{ταλ} = 1J$

$K_{max\,ταλάντωσης} = 1J$

$U_{max\,ταλάντωσης} = 1J$

Αυτή η ενέργεια αναφέρεται μόνο στη μεταφορική του κέντρου μάζας ... εγώ πάνω στο δίσκο υπάρχει και η κινητική λόγω στροφικής κίνησης

$K_{max\,ταλάντωσης} = 1\,Joule$ $K_{max\,δίσκου} = 1{,}5\,Joule$

$K_{max\,δίσκου} > K_{max\,ταλάντωσης}$

δ) $\frac{d\omega}{dt}=20\,rad/s^2 \Rightarrow \alpha_{γων}=-20\,rad/s^2$

$\alpha_{cm}=R\alpha_{γων} \Rightarrow \alpha_{cm}=-2\,m/s^2$

$\Big\}\ \alpha_{cm}=-\omega^2 x \Rightarrow -2=-25x \Rightarrow x=\frac{2}{25}\,m$

$T=\frac{1}{3}kx=\frac{1}{3}75\frac{2}{25} \Rightarrow T=2N$ ή $\Sigma\tau=I\alpha_{γων} \Rightarrow -TR=\frac{1}{2}MR^2\alpha_{γων}$
$\Rightarrow -T=\frac{1}{2}2\,0{,}1^2(-20) \Rightarrow T=2N$

$U_{ταλ}+K_{ταλ}=E \Rightarrow \frac{1}{2}Dx^2+\frac{1}{2}Mv_{cm}^2=\frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow v_{cm}=\pm\omega\sqrt{A^2-x^2}$

$\Rightarrow v_{cm}=\pm 5\cdot\sqrt{0{,}2^2-\left(\frac{2}{25}\right)^2} \Rightarrow v_{cm}=\pm\frac{\sqrt{21}}{5}\,m/s$

$E_{ολική\ δίσκου}=E_{ταλ/κίνησης}+K_{στροφ}=E_{ταλ}+\frac{1}{2}I\omega^2$

$=E_{ταλ}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\frac{v_{cm}^2}{R^2}=E_{ταλ}+\frac{1}{4}Mv_{cm}^2=1J+\frac{1}{4}2\left(\frac{\sqrt{21}}{5}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{E_{ταλ}=1{,}42J}$

ε) ... $-T=\frac{1}{2}M\alpha_{cm} \Rightarrow -T=\frac{1}{2}M\left(-\frac{2k}{3M}x\right) \Rightarrow T=\frac{1}{3}kx \Rightarrow T=\frac{1}{3}75x$
$\Rightarrow T=25x$

Προφανώς η τριβή πρέπει να είναι στατική $T\le\mu_s N \Rightarrow$
$\Rightarrow 25x\le\mu_s Mg \Rightarrow 25x\le 0{,}4\cdot 2\cdot 10 \Rightarrow \boxed{x\le 0{,}3m}$

Σχόλιο: Η θέση ισορροπίας του ταλαντωτή!

Η θέση ισορροπίας του ταλαντωτή (του CM) προσδιορίζεται από τη σχέση $\Sigma F_x=0 \Rightarrow \alpha_{cm}=0 \Rightarrow \alpha_{γων}=0 \Rightarrow \Sigma\tau=0$
$\Rightarrow T\cdot R=0 \Rightarrow \boxed{T=0}$!!

$\hookrightarrow \Sigma F_x=0 \Rightarrow F_{ελ}=0 \Rightarrow k\Delta l=0 \Rightarrow \Delta l=0$

Δηλαδή η θέση ισορροπίας ταυτίζεται με το φυσικό μήκος των ελατηρίων ... και $T=0$!!

Παρατηρήσεις

1. $\Sigma F_x = M a_{cm} \Rightarrow T - F_{ελ} = M a_{cm}$
$\Sigma \tau = I a_{γων} \Rightarrow -TR = I \frac{a_{cm}}{R} \Rightarrow -T = \frac{I}{R^2} a_{cm}$ $\Big\} \Rightarrow -F_{ελ} = \left[M + \frac{I}{R^2}\right] a_{cm} \Rightarrow$

$$\Rightarrow -Kx = \frac{MR^2+I}{R^2} a_{cm} \Rightarrow a_{cm} = -\frac{KR^2}{MR^2+I}x \quad , \quad \Sigma F_x = M a_{cm} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Sigma F_x = -\frac{MR^2}{MR^2+I} Kx$$ α.α.τ με σταθερά $D = \frac{MR^2}{MR^2+I}K$

Αν θεωρήσατε αμελητέα τη ροπή αδράνειας $D = K$!

2. Εδώ πρέπει να τονίσουμε ότι α.α.τ εκτελεί το CM του δίσκου και όχι ο δίσκος. Εδώ εκτελεί και στροφική κίνηση.

3. Η ενέργεια του δίσκου είναι κινητική ενέργεια ταλάντωσης του CM και η ενέργεια λόγω στροφικής κίνησης

$$E_{ολική\ δίσκου} = E_{ταλάντωσης} + K_{στροφική} = \underset{D \neq K}{\frac{1}{2} DA^2} + \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} Dx^2 + \frac{1}{2} I\omega^2$$

$$= \frac{1}{2} Dx^2 + \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 = U_{ταλ} + K_{ταλ} + K_{στροφ} = U_{ταλ} + K_{ολική}$$

9.109

α) Στη θέση ισορροπίας

$\Sigma \vec{F}_x = 0 \Rightarrow \vec{a}_{cm} = 0$ και επειδή θεωρούμε κύλιση χωρίς ολίσθηση $a_{γων} = 0 \Rightarrow \Sigma\tau = 0$

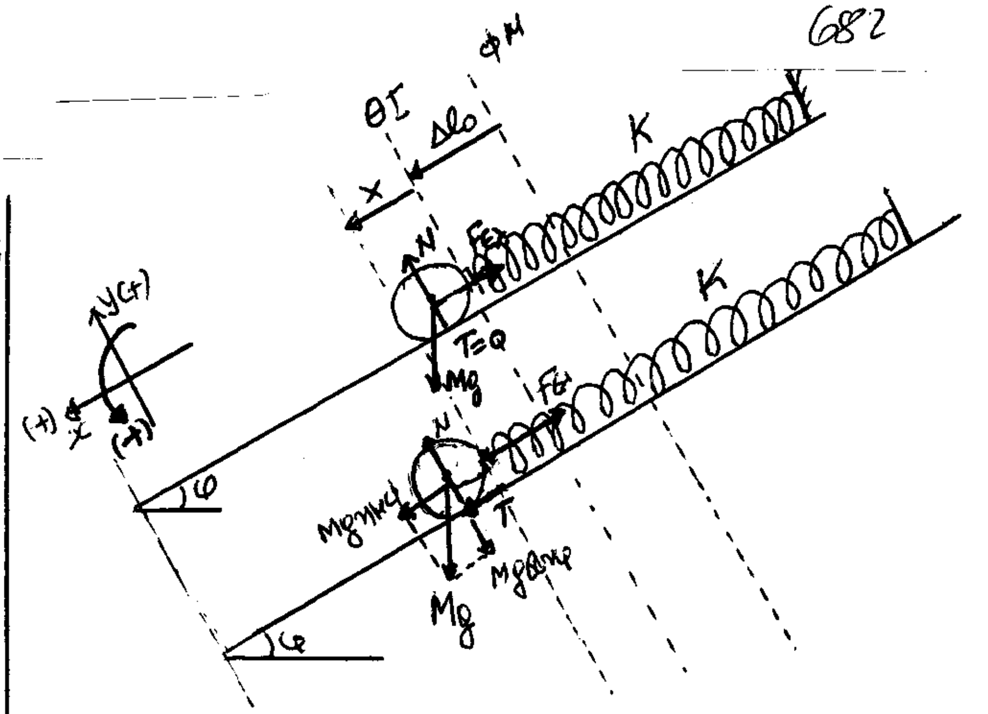
$\Rightarrow TR = 0 \Rightarrow T = 0\,!$

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{ελ} = Mg\eta\mu\varphi \Rightarrow$

$\Rightarrow K\Delta l_0 = Mg\eta\mu\varphi \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta l_0 = \frac{Mg\eta\mu\varphi}{K} = \frac{2\cdot 10\cdot 0{,}6}{75}$

$\Rightarrow \Delta l_0 = 0{,}16m \Rightarrow \Delta l_0 = 16cm$



Θεωρούμε τον κύλινδρο σε τυχαία θετική θέση (και με θετική φορά κίνησης)

$\Sigma \vec{F}_x = M a_{cm} \Rightarrow Mg\eta\mu\varphi + T - F_{ελ} = M a_{cm}$ (1)

$\Sigma\tau = I a_{γων} \Rightarrow -TR = \frac{1}{2}MR^2 \frac{a_{cm}}{R} \Rightarrow$

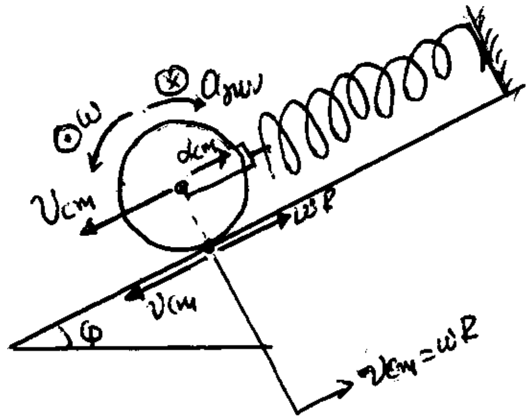
$\Rightarrow -T = \frac{1}{2}M a_{cm}$

(1)+(7) $Mg\eta\mu\varphi - F_{ελ} = \frac{3}{2}M a_{cm} \Rightarrow$

$\Rightarrow Mg\eta\mu\varphi - K(\Delta l_0 + x) = \frac{3}{2}M a_{cm} \Rightarrow$

$\Rightarrow Mg\eta\mu\varphi - K\Delta l_0 - Kx = \frac{3}{2}M a_{cm}$

$\Rightarrow -Kx = \frac{3}{2}M a_{cm} \Rightarrow \boxed{a_{cm} = -\frac{2k}{3M}x}$



κίνηση προς το άκρο, άρα επιβραδυνόμενη

$\vec{a}_{cm}\cdot\vec{v}_{cm} < 0$, $\vec{\omega}\cdot\vec{a}_{γων} < 0$

Η τριβή $\vec{T}$ έχει τη φορά του σχήματος για να δημιουργεί τέτοια ροπή ώστε να έχει $a_{γων}$ - επιβράδυνση.

$\Sigma F_x = M a_{cm} \Rightarrow \Sigma F_x = M\left(-\frac{2k}{3M}x\right)$

$\Rightarrow \boxed{\Sigma F_x = -\frac{2k}{3}x}$

άρα α.α.τ με $D = \frac{2k}{3} = \frac{2\cdot 75}{3} \Rightarrow D = 50N/m$

$D = M\omega^2 \Rightarrow \omega = 5\,rad/s \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{5} \Rightarrow T = 0{,}4\pi\,s$

Το πλάτος της ταλάντωσης προφανώς είναι $A = \Delta l_0 \Rightarrow$

$\boxed{A = 0{,}16m}$

β) $x = A\eta\mu(\omega t+\varphi_0) \Rightarrow x = 0,16\eta\mu(5t+\varphi_0) \xrightarrow[x=-0,16m]{t=0} \varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$

$x = 0,16\eta\mu(5t+\frac{3\pi}{2})$ (SI)

$v_{cm} = 0,8\sigma\upsilon\nu(5t+\frac{3\pi}{2})$ (SI)

γ) Την $t=\frac{\pi}{15}$ s ... $x = 0,16\eta\mu(5\frac{\pi}{15}+\frac{3\pi}{2}) \Rightarrow x=0,16\eta\mu(\frac{\pi}{3}+\pi+\pi/2)$

$\Rightarrow x = -0,16\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = -0,08m$

$v_{cm} = 0,8\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{3}+\pi+\frac{\pi}{2}) = 0,8\eta\mu(2\pi+\pi/3) = 0,8\eta\mu(\pi/3) = 0,8\cdot\frac{\sqrt3}{2} \Rightarrow v_{cm}=0,4\sqrt3\, m/s$

γ-1) $L = I\omega$

$\left.\begin{array}{l} I=\frac{1}{2}MR^2 = \frac{1}{2}2kg(0,1m)^2 = 0,01\, kgm^2 \\ \omega = \frac{v_{cm}}{R} = \frac{0,4\sqrt3}{0,1} \Rightarrow \omega = 4\sqrt3\, rad/s \end{array}\right\} \boxed{L = 0,04\sqrt3\, kgm^2/s}$

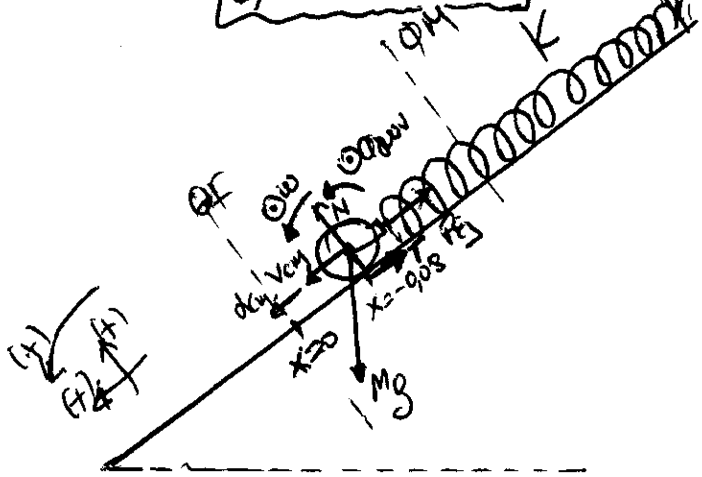
$K = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2+\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{3}{4}Mv_{cm}^2 = \frac{3}{4}2\cdot(0,4\sqrt3)^2 \Rightarrow \boxed{K=0,72J}$

γ-2) $\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau = |T|R > 0$ (βλ. σχήμα) (η ροπή είναι θετική, σύμφωνα με τη φορά)

$T = -\frac{1}{2}Ma_{cm} = -\frac{1}{2}M(-\frac{2k}{3M}x) = \frac{k}{3}x \Rightarrow T = \frac{1}{3}kx = \frac{1}{3}75\frac{N}{m}(-0,08m)$

$\Rightarrow \boxed{T=-2N}$ άρα $\frac{dL}{dt} = 2N\cdot 0,1 \Rightarrow \boxed{\frac{dL}{dt} = +0,2\, kgm^2/s^2}$

→ [illegible]



Στη θέση αυτή

$a_{cm} = -\omega^2 x = -25(-0,08)$

$\Rightarrow a_{cm} = +2\, m/s^2$

$a_{γων} = \frac{a_{cm}}{R} \Rightarrow a_{γων} = +20\, rad/s^2$

... και διαφορετικά...

$L=I\omega \Rightarrow \frac{dL}{dt} = I\cdot\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \frac{dL}{dt} = I\cdot a_{γων} \Rightarrow \frac{dL}{dt} = 0,01\cdot(+20) \Rightarrow \boxed{\frac{dL}{dt} = +0,2\, kgm^2/s^2}$

- Από το σχήμα φαίνεται $\Delta\ell = \Delta\ell_0 - |x| \Rightarrow \Delta\ell = 0{,}08m \Rightarrow |F_{ελ}| = |k\Delta\ell|$
$\Rightarrow |F_{ελ}| = 6N$ (... αλγεβρικά $F_{ελ} = -6N$)

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma\tau\omega + \Sigma F_x \cdot v_{cm} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = +|T| \cdot R \cdot \omega + (Mg\eta\mu\varphi - |T| - |F_{ελ}|) v_{cm}$$

$$\Rightarrow \frac{dK}{dt} = +\cancel{|T| R\omega} + Mg\eta\mu\varphi v_{cm} - \cancel{|T| v_{cm}} - |F_{ελ}| v_{cm}$$

$$\Rightarrow \frac{dK}{dt} = [Mg\eta\mu\varphi - |F_{ελ}|] v_{cm} = (2 \cdot 10 \cdot 0{,}6 - 6) \cdot 0{,}4\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dK}{dt} = 2{,}4\sqrt{3}\ J/s}$$

... και διαφορετικά ...

$$\ldots K = \frac{3}{4} M v_{cm}^2 \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \frac{3}{4} M \cdot 2 v_{cm} \frac{dv_{cm}}{dt} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \frac{6}{4} M v_{cm} a_{cm}$$

$$\Rightarrow \frac{dK}{dt} = 1{,}5 M a_{cm} v_{cm} = 1{,}5 \cdot 2kg (+2 m/s^2) \cdot (+0{,}4\sqrt{3} m/s) \Rightarrow \boxed{\frac{dK}{dt} = +2{,}4\sqrt{3}\ J/s}$$

δ) Η τριβή προφανώς πρέπει να είναι στατική

$$T \le \mu N = \mu Mg\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow \frac{1}{3} kx \le \mu Mg\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow \frac{1}{3} 75 \cdot x \le \mu \cdot 2 \cdot 10 \cdot 0{,}8$$

$$\Rightarrow \mu \ge \frac{25}{16} x \Rightarrow \mu \ge \frac{25}{16} A \Rightarrow \mu \ge \frac{25}{16} 0{,}16 \Rightarrow \boxed{\mu \ge 0{,}25}$$

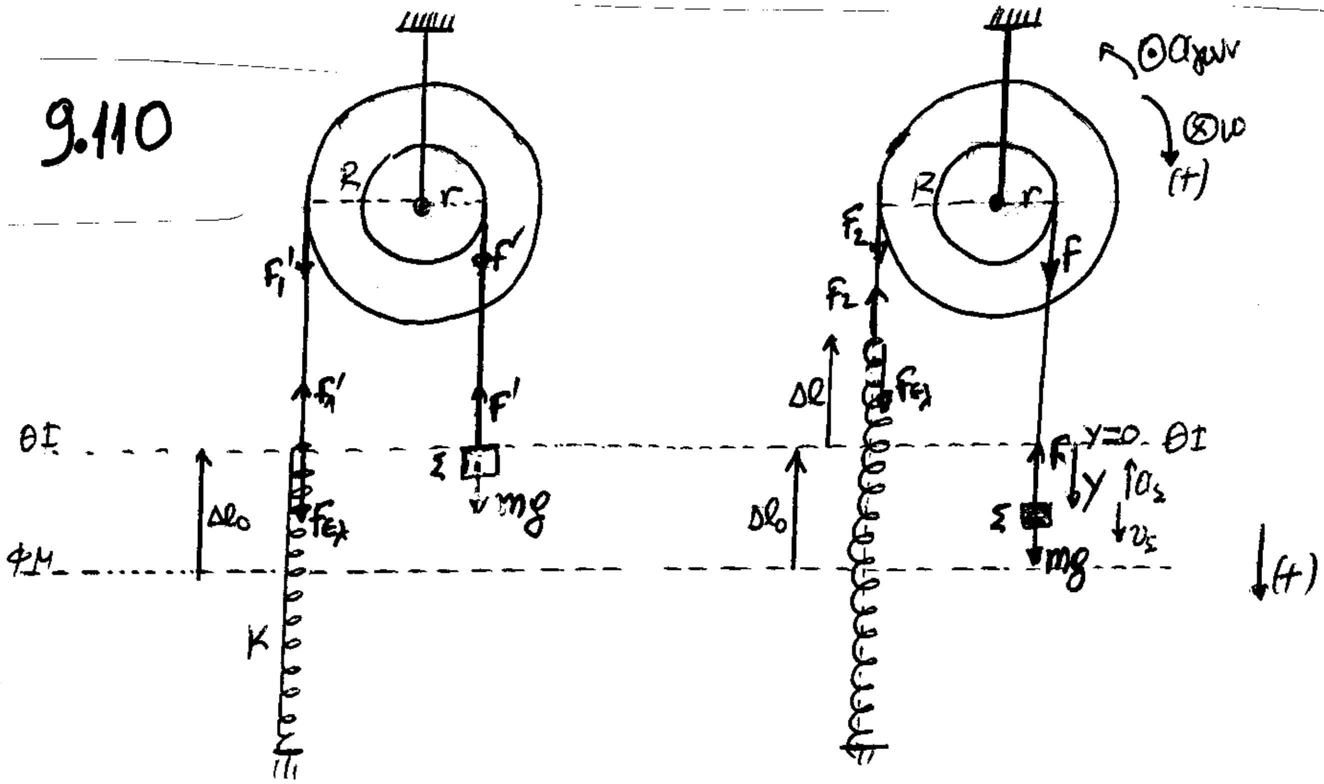
<u>Σχόλιο</u>: Γενική παρατήρηση για την α.α.τ

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma F_x = M a_{cm} \Rightarrow Mg\eta\mu\varphi + T - F_{ελ} = M a_{cm} \\ \Sigma\tau = I a_{γων} \Rightarrow -T \cdot R = I \cdot \frac{a_{cm}}{R} \Rightarrow -T = \frac{I}{R^2} a_{cm} \end{array}\right\} Mg\eta\mu\varphi - k(\Delta\ell_0 + x) = (M + \frac{I}{R^2}) a_{cm}$$

$$\Rightarrow -kx = \frac{MR^2 + I}{R^2} a_{cm} \Rightarrow a_{cm} = -\frac{kR^2}{MR^2 + I} x \quad , \Sigma F_x = M a_{cm} \Rightarrow \Sigma F_x = -\frac{kMR^2}{MR^2 + I} x$$

άρα α.α.τ με $D = \frac{MR^2}{MR^2 + I} k$. Αν θεωρηθεί αμελητέα η ροπή αδράνειας καταλήγουμε στη γνωστή (;) σχέση $D = k$.

9.110



α) Σώμα Σ: $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow mg = F' \Rightarrow F' = 20N$

τροχαλία: $\Sigma\tau = 0 \Rightarrow F'r = F_1'R \Rightarrow F'\cdot r = F_1' 2r \Rightarrow F_1' = \frac{F'}{2} \Rightarrow F_1' = 10N$

$F_1' = F_{ελ} = K\Delta l_0 \Rightarrow \Delta l_0 = \frac{F_1'}{K} = \frac{10N}{37{,}5N/m} \Rightarrow \Delta l_0 = 0{,}267m \Rightarrow \boxed{\Delta l_0 \simeq 26{,}7cm}$

... $mg = 2K\Delta l_0$ ...

β) Θεωρούμε το σώμα σε τυχαία θετική θέση με θετική φορά κίνησης. Έτσι η απομάκρυνση του σώματος είναι $y>0$ και το ελατήριο είναι επιπλέον παραμορφωμένο κατά Δl

προσοχή!

$$\left.\begin{aligned} y &= \Delta S_{\text{περιφέρειας μικρού}} = r\cdot\Delta\varphi \\ \Delta l &= \Delta S_{\text{περιφέρειας μεγάλου}} = R\Delta\varphi \end{aligned}\right\} \frac{y}{\Delta l} = \frac{r}{R} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{\Delta l}{2} \text{ ή } \Delta l = 2y$$

Επίσης $υ_Σ = υ_{νήματος} = υ_{περιφερική} = \omega r \Rightarrow \frac{dυ_Σ}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow a_Σ = r a_{γων}$

Σώμα Σ: $\Sigma F_y = m a_Σ \Rightarrow mg - F = m a_Σ$ (1)

Τροχαλία: $\Sigma\tau = I a_{γων} \Rightarrow F r - F_2 R = I\frac{a_Σ}{r} \xrightarrow{F_2 = F_{ελ}} F - F_{ελ}\frac{2r}{r} = I\frac{a_Σ}{r^2}$ (2)

$(1)+(2) \Rightarrow mg - 2K(\Delta l_0 + \Delta l) = \left(m + \frac{I}{r^2}\right) a_Σ \Rightarrow \cancel{mg} - \cancel{2K\Delta l_0} - 2K\Delta l = \frac{mr^2+I}{r^2} a_Σ$

$\Rightarrow -2K\cdot 2y = \frac{mr^2+I}{r^2} a_Σ \Rightarrow a_Σ = -\frac{4Kr^2}{I+mr^2} y$, $\Sigma F_y = m a_Σ \Rightarrow$

$$\Sigma F_y = -\frac{4Kmr^2}{I+mr^2}\,y$$

άρα α.α.τ με σταθερά $D=\dfrac{4Kmr^2}{I+mr^2} \Rightarrow$

$$D=\frac{4\cdot 37{,}5\cdot 2\cdot 0{,}01}{0{,}04+2\cdot 0{,}01} \Rightarrow \boxed{D=50\,N/m}$$

Σχόλιο: Αν αγνοούσαμε τη ροπή αδράνειας της τροχαλίας $D=4K$ (!)

$$D=m\omega_{ταλ}^{\prime 2} \Rightarrow \omega'_{ταλ}=\sqrt{D/m} \Rightarrow \boxed{\omega'_{ταλ}=5\,rad/s}$$

Σχόλιο: Εδώ πρέπει να τονισθεί ότι άλλο η $\omega'_{ταλ}$ που είναι η κυκλική συχνότητα ταλάντωσης και είναι σταθερή ... και άλλο η γωνιακή ταχύτητα (περιστροφής) της τροχαλίας που είναι μεταβλητή και είναι αρμονική συνάρτηση του χρόνου.

πλάτος ταλάντωσης του σώματος Σ: προφανώς $\boxed{A=0{,}1\,m}$

Παρατήρηση

$$y=A\,ημ(\omega'_{ταλ}t+\varphi_0) \Rightarrow y=0{,}10\,ημ\left(5t+\frac{\pi}{2}\right)\ \text{S.I}$$

$$υ_Σ=\omega A\,συν(\omega'_{ταλ}t+\varphi_0) \Rightarrow υ_Σ=0{,}5\,συν\left(5t+\frac{\pi}{2}\right)\ \text{SI}$$

$$\omega_{τροχαλίας}=\omega=\frac{υ_Σ}{r} \Rightarrow \omega=5\,συν\left(5t+\frac{\pi}{2}\right)\ (\text{SI})$$

γ) $K_{τροχ\,max}=\dfrac{1}{2}I\omega^2_{τροχ\,max}=\dfrac{1}{2}\cdot 0{,}04\cdot 25 \Rightarrow \boxed{K_{τροχ\,max}=0{,}5\,J}$

δ) $K_{ταλ}+U_{ταλ}=E_{ταλ} \Rightarrow \dfrac{1}{2}mυ^2+\dfrac{1}{2}Dy^2=\dfrac{1}{2}DA^2 \Rightarrow υ^2=\dfrac{D(A^2-y^2)}{m}=\omega^2(A^2-y^2)$

$\upsilon = \pm\omega\sqrt{A^2-y^2} \Rightarrow 0{,}4 = \pm 5\sqrt{0{,}1^2-y^2} \ldots \boxed{y=\pm 6cm}$

$a_\Sigma = -\omega^2 y = -25(\pm 6\cdot 10^{-2}) \Rightarrow a_\Sigma = \pm 1{,}5\, m/s^2$

$a_\Sigma = r\, a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = \pm 15\, rad/s^2$

$\Sigma\tau = I\cdot a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \Sigma\tau = 0{,}04\, kgm^2 \cdot (\pm 15\, rad/s^2) \Rightarrow \boxed{\Sigma\tau = \pm 0{,}6\, Nm}$

ε) Προσοχή.

Εδώ δεν πρέπει να χαλαρώσει το νήμα με το οποίο είναι δεμένο το σώμα Σ (πρέπει $F>0$) και αφετέρου να μη χαλαρώσει το νήμα με το οποίο είναι δεμένο το ελατήριο ... αυτό συμβαίνει ότι το ελατήριο πρέπει να έλθει το πολύ μέχρι το φυσικό του μήκος.

• Από την $\Sigma F_y = m a_\Sigma \Rightarrow mg - F = m a_\Sigma \Rightarrow F = m(g-a_\Sigma)$

$\Rightarrow F = m(g-(-\omega^2 y)) \Rightarrow F = m(g+\omega^2 y) \geq 0 \Rightarrow \omega^2 y \geq -g$

$\Rightarrow y \geq -\frac{10}{25} m \Rightarrow y \geq -0{,}4m$

δηλαδή οπουδήποτε να είναι πάνω από την $y = -0{,}4m$

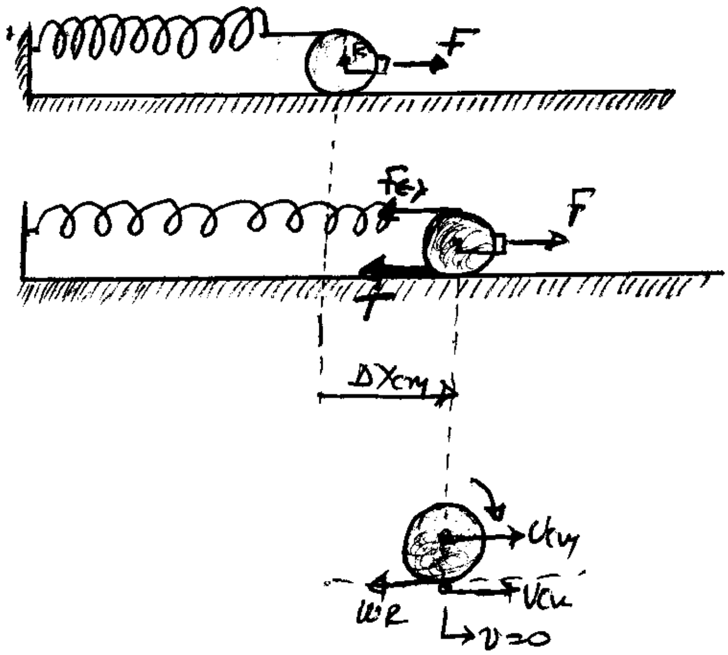
Αν δεν υπήρχε το ελατήριο $A_{max} = 0{,}4m$

Τώρα όμως πρέπει η επιπλέον παραμόρφωση Δl να είναι μικρότερη από την Δl_0 (γιατί;)

$\Delta l \le \Delta l_0 \Rightarrow 2A \le \Delta l_0 \Rightarrow A \le \frac{\Delta l_0}{2} = \frac{0{,}267m}{2} \Rightarrow A \le 13{,}35cm$

Άρα τελικά $\boxed{\Delta l_{max} = 13{,}35cm}$

9.111



a) $\Delta\varphi = N\cdot 2\pi = \frac{2}{5\pi}2\pi$

$\Rightarrow \Delta\varphi = 0{,}8\,rad$

$\Delta S = R\Delta\varphi = 0{,}1\cdot 0{,}8 = 0{,}08\,m$

$\Rightarrow \ldots \Delta X_{cm} = 0{,}08\,m$

$\Delta X_{cm} = \frac{1}{2}a_{cm}t^2$

$\Delta\varphi = \frac{1}{2}a_{gw}t^2$

$a_{cm} = Ra_{gw}$

$a_{NHM} = a_{cm} + Ra_{gw} = 2a_{cm}$

$\Delta X_{NHM} = 2\Delta X_{cm}$

$$\Delta K = W_{o\delta} \Rightarrow K_{kyn} = W_F + W_{F_{tr}} + \cancel{W_T}^{0} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} K_{kyn} = F\Delta X_{cm} - \frac{1}{2}K\Delta l^2 \\ \Delta l = \Delta X_{NHM} = 2\Delta X_{cm} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_{kyn} = F\cdot\Delta X_{cm} - \frac{4}{2}K\Delta X_{cm}^2 \Rightarrow K_{kyn} = [F - 2K\cdot\Delta X_{cm}]\cdot\Delta X_{cm}$$

$$\Rightarrow K_{kyn} = (60N - 2\cdot 75\,N/m\cdot 0{,}08\,m)\cdot 0{,}08 \Rightarrow \boxed{K_{kyn} = 3{,}84\,J}$$

$$K_{kyn} = \frac{3}{4}MV_{cm}^2 \Rightarrow V_{cm} = \sqrt{\frac{4\cdot K_{kyn}}{3M}} = \sqrt{\frac{4\cdot 3{,}84}{3\cdot 2}} \Rightarrow V_{cm} = 1{,}6\,m/s$$

$$L = I\omega \Rightarrow L = \frac{1}{2}MR^2\omega = \frac{1}{2}MR^2\frac{V_{cm}}{R} = \frac{1}{2}MRV_{cm}^2 \Rightarrow L = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 0{,}1\cdot 1{,}6^2$$

$$\Rightarrow \boxed{L = 0{,}256\,kgm^2/s}$$

b) $\ldots K_{kyn} = [F - 2K\Delta X_{cm}]\Delta X_{cm} = 0 \Rightarrow \Delta X_{cm} = \frac{F}{2K} = \frac{60N}{2\cdot 75\,N/m}$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta X_{cm} = 0{,}40\,m}$$

γ) προσδιορισμός της θέσης ισορροπίας

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \alpha_{cm} = 0 \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = 0 \Rightarrow \Sigma\tau = 0 \Rightarrow T \cdot R - f_{\sigma\tau} R = 0$

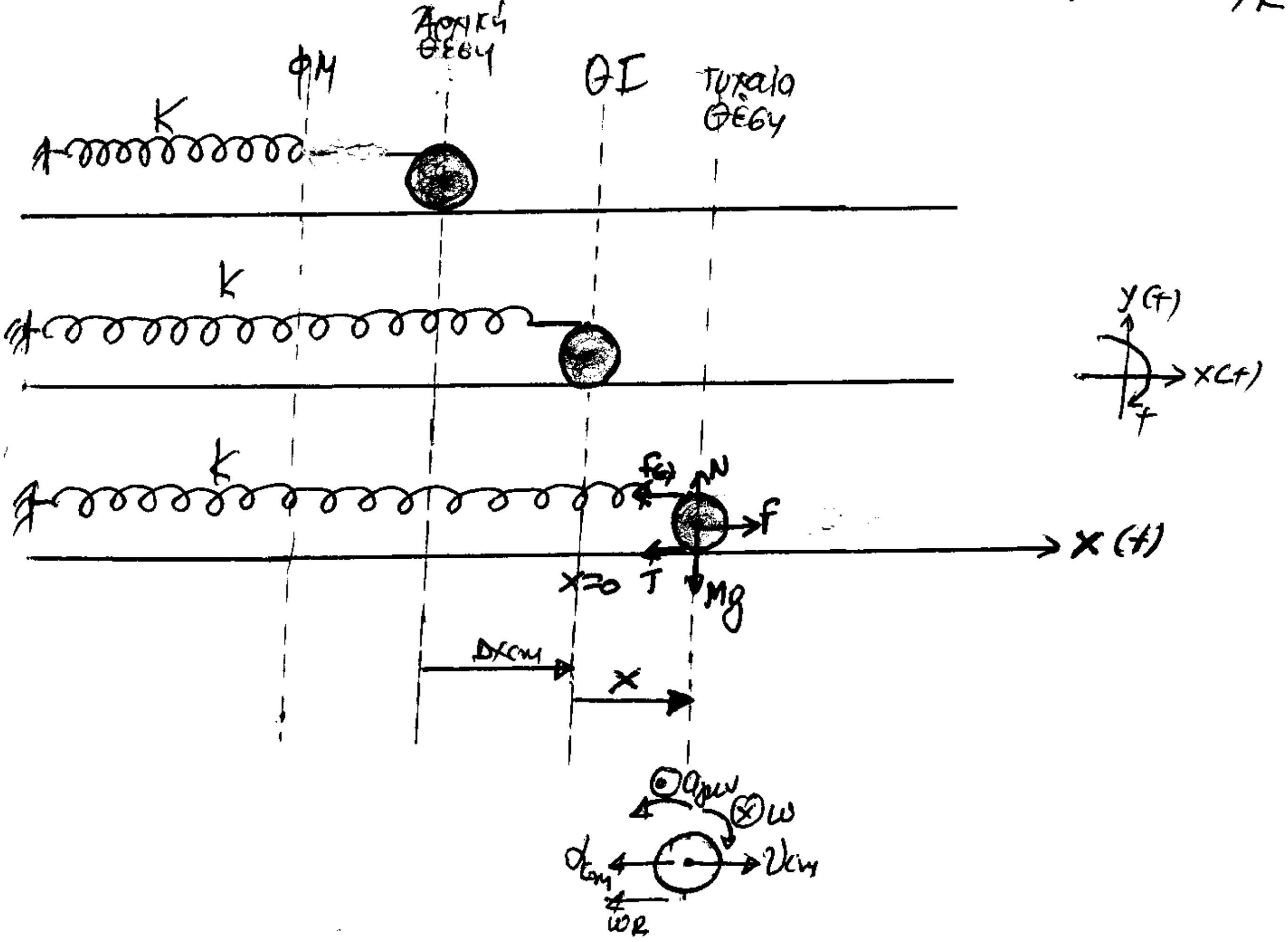
$\Rightarrow T = f_{\sigma\tau}$ (!)

[... και διαφορετικά $\Delta x_{\iota\sigma} = \frac{\Delta x_{max}}{2} = \frac{F}{4k}$!]

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F = T + f_{\sigma\tau} \Rightarrow F = 2 f_{\sigma\tau} \Rightarrow F = 2k\Delta\ell_0 \Rightarrow \Delta\ell_0 = \frac{F}{2k}$

$\to F = 2k \cdot 2\Delta x_{cm}$

$\Rightarrow F = 4k\Delta x_{cm} \Rightarrow \Delta x_{cm} = \frac{F}{4k}$



$\Sigma F_x = M\alpha_{cm} \Rightarrow F - f_{\sigma\tau} - T = M\alpha_{cm}$ (1)

$\Sigma\tau = I\,\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow TR - f_{\sigma\tau} R = I\frac{\alpha_{cm}}{R} \Rightarrow T \cdot R - f_{\sigma\tau} R = \frac{1}{2}MR^2\frac{\alpha_{cm}}{R} \Rightarrow T - f_{\sigma\tau} = \frac{1}{2}M\alpha_{cm}$ (2)

$(1)+(2) \Rightarrow F - 2f_{\sigma\tau} = \frac{3}{2}M\alpha_{cm} \Rightarrow F - 2 \cdot k\Delta\ell = \frac{3}{2}M\alpha_{cm}$ (3)

$\Delta\ell = 2(\Delta x_{cm} + x) = 2\Delta x_{cm} + 2x = 2 \cdot \frac{F}{4k} + 2x$ (4)

$(3,4) \Rightarrow F - 2K\left[\frac{2F}{4K} + 2x\right] = \frac{3}{2} M a_{cm} \Rightarrow -4Kx = \frac{3}{2} M a_{cm}$

$\Rightarrow a_{cm} = -\frac{8K}{3M} x$

$\Sigma F_x = M a_{cm} \Rightarrow \Sigma F_x = M\left(-\frac{8K}{3M} x\right) \Rightarrow \boxed{\Sigma F_x = -\frac{8K}{3} x}$

άρα α.α.τ με $D = \frac{8K}{3} = \frac{8 \cdot 75}{3} \Rightarrow \boxed{D = 200 N/m}$!!

δ.1) Το πλάτος της ταλάντωσης είναι η απόσταση του ταλαντωτή από τη θέση ισορροπίας όταν αυτό ξεκινάει την ταλάντωση έχοντας $v=0$

... $A = \Delta x_{cm,ταλ} = \frac{F}{4K} = \frac{60N}{4 \cdot 75 N/m} \Rightarrow \boxed{A = 0{,}20 m}$

$D = M\omega^2_{ταλ} \Rightarrow \omega_{ταλ} = 10 rad/s$ $\boxed{T_{ταλ} = \frac{2\pi}{10} s}$

δ.2) $x = 0{,}20\eta\mu\left(10t + \frac{3\pi}{2}\right)$ SI

$v_{cm} = 2\sigma\upsilon\nu\left(10t + \frac{3\pi}{2}\right)$ SI

δ.3) $a_{cm} = \frac{dv_{cm}}{dt} = 6 m/s^2$ ... προσοχή μέτρο προς κέντρο άρα μπορεί $a_{cm} = +6 m/s^2$ αλλά και $a_{cm} = -6 m/s^2$

$\Sigma F_x = M a_{cm} \Rightarrow$

$\Rightarrow F - F_{\sigma\tau} - T = M a_{cm}$

$\Sigma \tau = I a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T - F_{\sigma\tau} = \frac{1}{2} M a_{cm}$ $\Bigg\} \Rightarrow F - 2F_{\sigma\tau} = \frac{3}{2} M a_{cm}$

- Αν $a_{cm} = +6 m/s^2 \Rightarrow 60 - 2F_{\sigma\tau} = \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot (+6) \Rightarrow F_{\sigma\tau} = 21N$
  $T - 21 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (+6) \Rightarrow \boxed{T = 27N}$

- Αν $a_{cm} = -6 m/s^2 \Rightarrow 60 - 2F_{\sigma\tau} = \frac{3}{2} 2(-6) \Rightarrow F_{\sigma\tau} = 39N$
  $T - 39 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (-6) \Rightarrow \boxed{T = 33N}$

8.4)

$\Sigma F_x = M a_{cm} \Rightarrow \quad F - F_{fr} - T = M a_{cm}$

$\Sigma \tau = I \alpha_{gw} \Rightarrow \quad T - F_{fr} = \frac{1}{2} M a_{cm}$

$F - 2T = \frac{1}{2} M a_{cm} \Rightarrow F - \frac{1}{2} M a_{cm} = 2T$

$\Rightarrow 60 - \frac{1}{2} M \left(-\frac{8k}{3M} x\right) = 2T \Rightarrow 60 + \frac{4k}{3} x = 2T$

$\Rightarrow T = 30 + \frac{2k}{3} x = 30 + \frac{2 \cdot 75}{3} x \Rightarrow T = 30 + 50x$

$\Rightarrow T = 30 + 50x \leq \mu M g \Rightarrow 30 + 50x \leq 20\mu \Rightarrow$

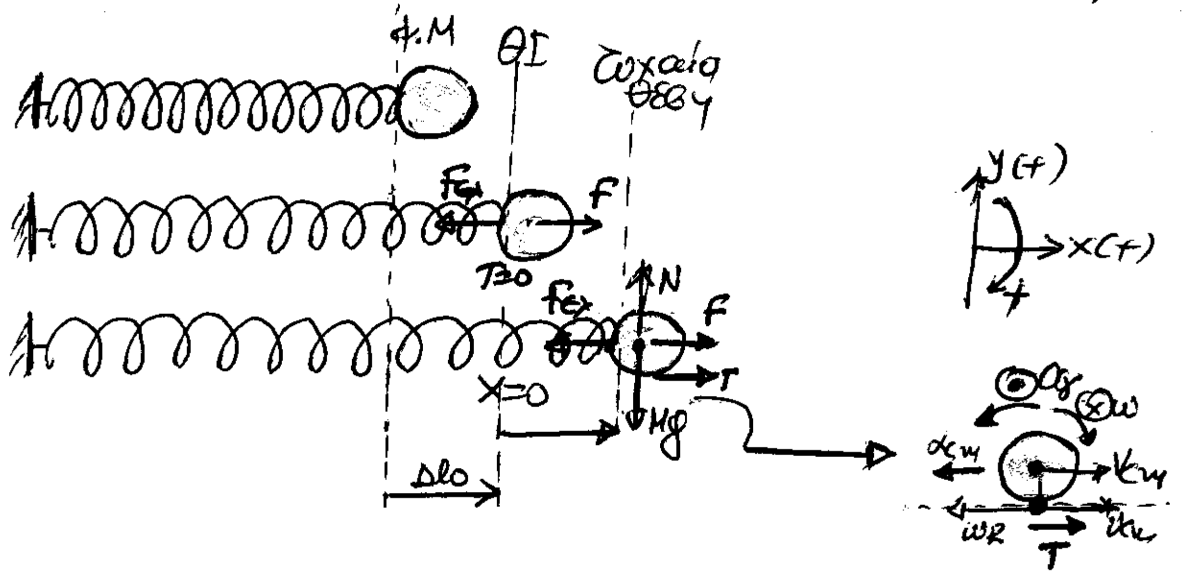
$\mu \geq 1{,}5 + 2{,}5x \xrightarrow{x_{max} = A} \mu \geq 2$!!

9.112

(5) προσδιορίζουμε τη θέση ισορροπίας

α) $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow a_{cm} = 0$ και $a_{γων} = 0 \Rightarrow T = 0$!!

$\hookrightarrow F = F_{ελ} \Rightarrow F = k\Delta l_0$ και $\Delta l_0 = \dfrac{F}{k} = \dfrac{15N}{75N/m} \Rightarrow \boxed{\Delta l_0 = 0{,}2m}$



$$\left.\begin{array}{l} \Sigma F_x = M a_{cm} \Rightarrow F + T - F_{ελ} = M a_{cm} \\ \Sigma \tau = I a_{γων} \Rightarrow -T \cdot R = \frac{1}{2} M R^2 \frac{a_{cm}}{R} \Rightarrow -T = \frac{1}{2} M a_{cm} \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} F - F_{ελ} = \tfrac{3}{2} M a_{cm}$$

$$\Rightarrow F - k(\Delta l_0 + x) = \frac{3}{2} M a_{cm} \Rightarrow \cancel{F} - \cancel{k\Delta l_0} - kx = \frac{3}{2} M a_{cm} \Rightarrow \boxed{a_{cm} = \frac{-2k}{3M} x}$$

$\Sigma F_x = M a_{cm} \Rightarrow \Sigma F_x = M\left(-\dfrac{2k}{3M} x\right) \Rightarrow \Sigma F_x = -\dfrac{2k}{3} x$, άρα α.α.τ

με $D = \dfrac{2k}{3} = \dfrac{2 \cdot 75 N/m}{3} \Rightarrow \boxed{D = 50 N/m}$

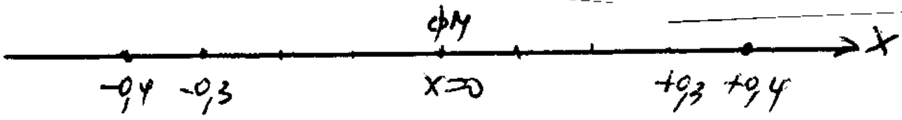
β) $D = M\omega_{ταλ}^2 \Rightarrow \omega_{ταλ} = \sqrt{50/2}\ rad/s \Rightarrow \boxed{\omega_{ταλ} = 5\ rad/s}$

$A = \Delta l_0 \Rightarrow \boxed{A = 0{,}2m}$

γ) $\left.\begin{array}{l} K_{max} = \dots = \frac{3}{4} M v_{cm\,max}^2 \\ v_{cm\,max} = \omega_{ταλ} A = 1 m/s \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{K_{max} = 1{,}5 Joule}$

δ) $A' = \Delta l_0 + A \Rightarrow A' = 0{,}4m$ (η ΘΙ είναι το Φ.Μ)

$D = \dfrac{2k}{3}$ (βλ. 1ο παράδειγμα) ... $\omega_{ταλ} = 5\ rad/s$



$\Delta l = 30\,cm = 0{,}3\,m \Rightarrow x = \pm 0{,}3\,m$

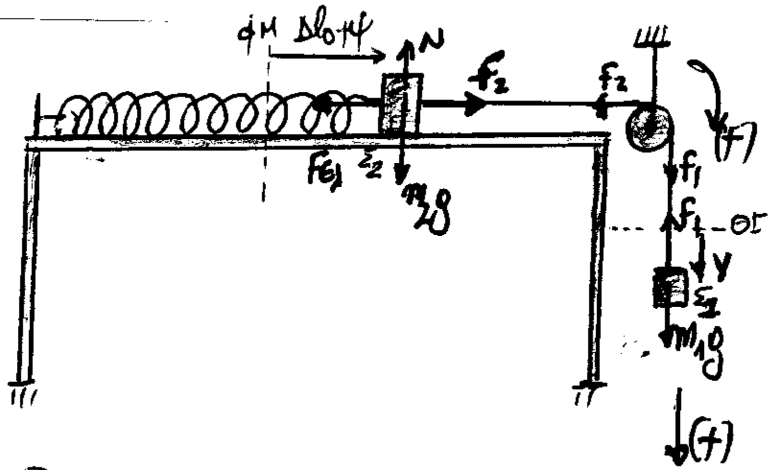
$T = -\frac{1}{2} M \alpha_{cm} = -\frac{1}{2} M \cdot \left(-\frac{2k}{3M} x\right) \Rightarrow T = +\frac{1}{3} k x \xrightarrow{x=\pm 0{,}3\,m} T = \frac{1}{3} \cdot 75 \frac{N}{m} (\pm 0{,}3\,m)$

$\Rightarrow T = \pm 0{,}75\,N$

$\delta\tau = T R = \pm 7{,}5\,N \cdot 0{,}1\,m \Rightarrow \boxed{\delta\tau = \pm 0{,}75\,Nm}$

$\delta\tau = I \alpha_{\gamma\omega\nu} = I \cdot \frac{\alpha_{cm}}{R} = \ldots$

9.113



Στην αρχική κατάσταση ισορροπία
... $m_1 g = F_1 = k\Delta l_0 \Rightarrow \Delta l_0 = \frac{m_1 g}{k}$
$\Rightarrow \Delta l_0 = 0{,}04\,m$
Εκτρέπουμε το Σ_1 και το θέτουμε σε μια τυχαία θετική θέση $y>0$ με $v_1>0$. Στην κατάσταση αυτή το ελατήριο είναι παραμορφωμένο κατά $\Delta l_0 + y$
Επίσης $v_{\Sigma 1} = \omega r = v_{\Sigma 2} \Rightarrow \alpha_1 = r\alpha_{\gamma\omega\nu} = \alpha_2 = \dots = \alpha$

α) Σ_1: $\Sigma F_y = m_1 \alpha \Rightarrow m_1 g - F_1 = m_1 \alpha$ (1)
Τροχαλία $\Sigma \tau = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow F_1 r - F_2 r = \frac{1}{2} M r^2 \frac{\alpha}{r} \Rightarrow F_1 - F_2 = \frac{1}{2} M\alpha$ (2)
Σ_2: $\Sigma F_x = m_2 \alpha \Rightarrow F_2 - k(\Delta l_0 + y) = m_2 \alpha \Rightarrow F_2 - k\Delta l_0 - ky = m_2 \alpha$ (3)

$(1)+(2)+(3) \Rightarrow \cancel{m_1 g - k\Delta l_0} - ky = (m_1 + m_2 + \frac{M}{2})\alpha \Rightarrow \alpha = -\frac{2ky}{2m_1 + 2m_2 + M}$

$\Rightarrow \alpha = -\frac{2\cdot 250\cdot}{2\cdot 1 + 2\cdot 1 + 1} y \Rightarrow \boxed{\alpha = -100y}$ SI

Σ_1: $\Sigma F_y = m_1 \alpha \Rightarrow \Sigma F_1 = 1\cdot(-100y) \Rightarrow \Sigma F_1 = -100y$ α.α.τ με $D_1 = 100\,N/m$

Σ_2: $\Sigma F_y = m_2 \alpha \Rightarrow \Sigma F_2 = 1\cdot(-100y) \Rightarrow \Sigma F_2 = -100y$ α.α.τ με $D_2 = 100\,N/m$

β) $A = \Delta l_0 = 4\,cm$
$D_1 = m_1 \omega_{\tau\alpha\lambda}^2 \Rightarrow \omega_{\tau\alpha\lambda} = \sqrt{D_1/m_1} \Rightarrow \omega_{\tau\alpha\lambda} = 10\,rad/s \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{10}\,s \Rightarrow \boxed{T = 0{,}628\,s}$

δ) $\alpha = -\omega_{\tau\alpha\lambda}^2 \cdot y = -100y \Rightarrow -3{,}2 = -100y \Rightarrow y = 3{,}2\,cm$

... $v = \pm\omega\sqrt{A^2 - y^2} = \dots \Rightarrow v = 2{,}4\,cm/s \Rightarrow v = 2{,}4\cdot 10^{-2}\,m/s$

$v = \omega_{\tau\rho o\chi}\cdot r \Rightarrow \omega_{\tau\rho o\chi} = \frac{v}{r} = \frac{2{,}4\cdot 10^{-2}}{0{,}1} \Rightarrow \omega_{\tau\rho o\chi} = 0{,}24\,rad/s$

$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{a}{r} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = -32\ rad/s^2$$

$$L_{\tau\rho o\chi} = I_{\tau\rho o\chi} \cdot \omega_{\tau\rho o\chi} \Rightarrow \frac{dL_{\tau\rho o\chi}}{dt} = I_{\tau\rho o\chi} \cdot a_{\gamma\omega\nu} = \frac{1}{2} M r^2 \cdot a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \ldots \boxed{\frac{dL_{\tau\rho o\chi}}{dt} = -0{,}16\ kg\,m^2/s^2}$$

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma\tau \cdot \omega = \frac{dL}{dt} \cdot \omega = -0{,}16 \cdot 0{,}24 \Rightarrow \frac{dK}{dt} = 3{,}84 \cdot 10^{-2}\ J/s$$

δ) πρέπει το νήμα να είναι τεντωμένο

$$(1) \Rightarrow m_1 g - F_1 = m_1 a \Rightarrow 10 - F_1 = -100y \Rightarrow F_1 = 10 + 100y \geq 0$$

$\Rightarrow y \leq -0{,}1m$ Άρα για να είναι συνεχώς τεντωμένο
το νήμα πρέπει το Σ_1 να είναι κάτω από την $y = -0{,}1m$

$$\boxed{A_{max} = 0{,}1m}$$