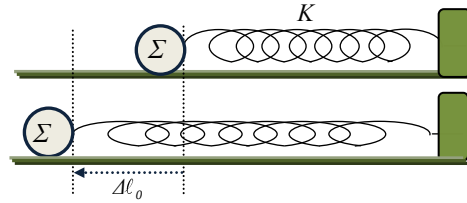


«Ταλάντωση» με σταθερή τριβή ολίσθησης, ολικός χρόνος και ολικό διάστημα κίνησης.

Πάνω σε οριζόντιο δάπεδο υπάρχει ένα σώμα Σ μάζας $m = 1\text{Kg}$ που είναι δεμένο στο άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $K = 100\text{N/m}$ και ηρεμεί στη θέση που αυτό έχει το φυσικό του μήκος. Το σώμα Σ παρουσιάζει με το δάπεδο συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0,5$.



Απομακρύνουμε το σώμα από την αρχική θέση ισορροπίας του κατά $\Delta\ell_0 = 0,5\text{m}$ και το αφήνουμε ελεύθερο χωρίς αρχική ταχύτητα.

α) Να υπολογίσετε την ελάχιστη ενέργεια που δαπανήθηκε για την ανωτέρω μεταφορά.

Το σώμα Σ εκτελεί μια παλινδρομική κίνηση με διαδοχικούς στιγμιαίους μηδενισμούς της ταχύτητας, μέχρι που να σταματήσει οριστικά.

β) Εξηγήστε ότι μεταξύ δύο διαδοχικών στιγμιαίων μηδενισμών της ταχύτητας έχουμε μείωση κατά την ίδια σταθερή ποσότητα για,

β.1) την παραμόρφωση του ελατηρίου,

β.2) το διανυόμενο διάστημα.

γ) Για την κίνηση του σώματος μεταξύ δύο διαδοχικών στιγμιαίων μηδενισμών της ταχύτητας έχουμε για την ενέργεια ελαστικότητας:

γ.1) μείωση κατά ίσα ποσά,

γ.2) μείωση κατά ίσα ποσοστά,

γ.3) μείωση με σταθερή τη μέση τιμή της μεταβολής της ανά μονάδα μήκους.

Επιλέξτε με δικαιολόγηση τη σωστή πρόταση.

δ) Να υπολογίσετε το συνολικό διάστημα που διανύει το σώμα μέχρι να σταματήσει οριστικά.

ε) Εξηγήστε ότι η κίνηση του σώματος μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών της ταχύτητας είναι τμήμα μισής απλής αρμονικής ταλάντωσης. Κάθε μία από τις «μισές» αυτές ταλαντώσεις έχει σταθερή ημιπερίοδο η οποία και να υπολογισθεί.

στ) Υπολογίστε τα διαδοχικά πλάτη και εξηγήστε ότι για κάθε ημιπερίοδο το πλάτος της αντίστοιχης ταλάντωσης μειώνεται κατά σταθερό ποσό.

ζ) Υπολογίστε την μείωση της ενέργειας ταλάντωσης ανά ημιπερίοδο εξετάζοντας αν η ενέργεια αυτή μειώνεται κατά ίσα ποσά.

η) Να βρείτε το συνολικό χρόνο μέχρι τον μηδενισμό της ταχύτητας.

θ) Αν τώρα απομακρύνουμε το σώμα έτσι ώστε το ελατήριο να έχει επιμήκυνση $\Delta\ell = 0,25\text{m}$ και τη χρονική στιγμή $t = 0$ το βάλλουμε με θετική

ταχύτητα $v = 2\sqrt{3}m/s$, ώστε το ελατήριο να συσπειρώνεται, να βρείτε το συνολικό διάστημα και το τον χρόνο μέχρι η ταχύτητα του σώματος να μηδενισθεί για δεύτερη φορά.

Δεχθείτε:

- ✚ το σώμα ως υλικό σημείο,
- ✚ ότι ο συντελεστής οριακής τριβής είναι ίσος με τον συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu_{στ} = \mu = 0,5$ και $g = 10ms^{-2}$.

Απάντηση:

α) Τριβή ολίσθησης $T = \mu N = \mu mg \Rightarrow$

$$T = 0,5 \cdot 1Kg \cdot 10m/s^2 \Rightarrow T = 5N$$

$$E_{\pi\rho\sigma\sigma} = \frac{1}{2} K \Delta\ell_0^2 + |W_T| \Rightarrow$$

$$E_{\pi\rho\sigma\sigma} = \frac{1}{2} 100 \frac{N}{m} (0,5m)^2 + |-5N \cdot 0,5m| \Rightarrow$$

$$E_{\pi\rho\sigma\sigma} = 15J.$$

β.1) Όταν αφήνουμε ελεύθερο το σώμα Σ αυτό μετατοπίζεται έως ότου η ταχύτητά του μηδενίζεται στιγμιαία. Μετά, εφόσον η δύναμη του ελατηρίου είναι μεγαλύτερη από την στατική τριβή, η κίνηση συνεχίζεται μέχρι τον νέο στιγμιαίο μηδενισμό της ταχύτητας.

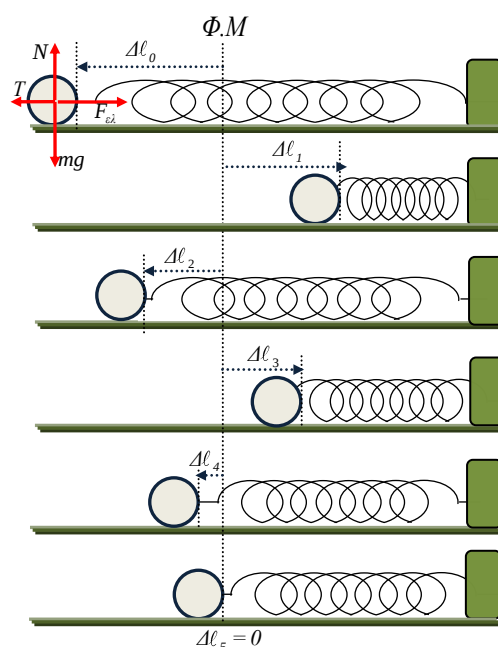
Για την πρώτη μετατόπιση του σώματος

Σ από την θέση που το ελατήριο έχει παραμόρφωση $\Delta\ell_0$ έως την θέση που το ελατήριο έχει παραμόρφωση $\Delta\ell_1$ γράφουμε Θ.Μ.Κ.Ε $\Delta K = W_{F_{ελ}} + W_T \Rightarrow$

$$0 - 0 = \frac{1}{2} K \Delta\ell_0^2 - \frac{1}{2} K \Delta\ell_1^2 - T(\Delta\ell_0 + \Delta\ell_1) \Rightarrow \frac{1}{2} K(\Delta\ell_0 - \Delta\ell_1)(\Delta\ell_0 + \Delta\ell_1) = T(\Delta\ell_0 + \Delta\ell_1) \Rightarrow$$

$$\Delta\ell_0 - \Delta\ell_1 = \frac{2T}{K} \Rightarrow \Delta\ell_0 - \Delta\ell_1 = 0,1m. \text{ Όποια τέτοια μετατόπιση και να πάρουμε}$$

έχουμε σταθερή μείωση της παραμόρφωσης του ελατηρίου κατά $0,1m$.



$$\begin{array}{l}
 1^{\text{η}} \text{ μετατόπιση: } \Delta \ell_0 - \Delta \ell_1 = \frac{2T}{K} \\
 2^{\text{η}} \text{ μετατόπιση: } \Delta \ell_1 - \Delta \ell_2 = \frac{2T}{K} \\
 3^{\text{η}} \text{ μετατόπιση: } \Delta \ell_2 - \Delta \ell_3 = \frac{2T}{K} \\
 \dots\dots\dots \\
 \nu^{\text{η}} \text{ μετατόπιση: } \Delta \ell_{\nu-1} - \Delta \ell_{\nu} = \frac{2T}{K}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} 1^{\text{η}} \\ 2^{\text{η}} \\ 3^{\text{η}} \\ \dots \\ \nu^{\text{η}} \end{array}} \right\} \text{Με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε:}$$

$\Delta \ell_0 - \Delta \ell_{\nu} = \nu \frac{2T}{K} \Rightarrow \Delta \ell_{\nu} = \Delta \ell_0 - \nu \frac{2T}{K} \Rightarrow \Delta \ell_{\nu} = 0,5 - \nu \cdot 0,1 \text{ (S.I)} \text{ με } \nu \in \mathbb{Z}^+.$ Η σχέση αυτή δίνει την παραμόρφωση του ελατηρίου στο τέλος της ν -ιοστής μετατόπισης.

$1^{\text{η}}$ μετατόπιση: Από $\Delta \ell_0 = 0,5m$ έως $\Delta \ell_1 = 0,4m$

$2^{\text{η}}$ μετατόπιση: Από $\Delta \ell_1 = 0,4m$ έως $\Delta \ell_2 = 0,3m$

$3^{\text{η}}$ μετατόπιση: Από $\Delta \ell_2 = 0,3m$ έως $\Delta \ell_3 = 0,2m$

$4^{\text{η}}$ μετατόπιση: Από $\Delta \ell_3 = 0,2m$ έως $\Delta \ell_4 = 0,1m$ και

$5^{\text{η}}$ μετατόπιση: Από $\Delta \ell_4 = 0,1m$ έως $\Delta \ell_5 = 0m$.

Παρατηρούμε ότι μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών της ταχύτητας η παραμόρφωση του ελατηρίου μειώνεται κατά την ίδια ποσότητα $0,1m$.

Άλλωστε: $\Delta \ell_{\nu} - \Delta \ell_{\nu-1} = (0,5 - \nu \cdot 0,1) - (0,5 - (\nu-1) \cdot 0,1) \Rightarrow \Delta \ell_{\nu} - \Delta \ell_{\nu-1} = 0,1m = \text{σταθ.}$

β.2)

$1^{\text{η}}$ μετατόπιση: μήκος $S_1 = \Delta \ell_0 + \Delta \ell_1 = 0,9m$

$2^{\text{η}}$ μετατόπιση: μήκος $S_2 = \Delta \ell_1 + \Delta \ell_2 = 0,7m$

$3^{\text{η}}$ μετατόπιση: μήκος $S_3 = \Delta \ell_2 + \Delta \ell_3 = 0,5m$

$4^{\text{η}}$ μετατόπιση: μήκος $S_4 = \Delta \ell_3 + \Delta \ell_4 = 0,3m$

$5^{\text{η}}$ μετατόπιση: μήκος $S_5 = \Delta \ell_4 + \Delta \ell_5 = 0,1m$

Παρατηρούμε ότι η μείωση του μήκους της τροχιάς για δύο διαδοχικές μετατοπίσεις είναι $\Delta S = 0,2m$

Γενικά το μήκος ν -ιοστής τροχιάς είναι:

$$S_{\nu} = \Delta \ell_{\nu} + \Delta \ell_{\nu-1} = (0,5 - \nu \cdot 0,1) + (0,5 - (\nu-1) \cdot 0,1) \Rightarrow S_{\nu} = 1 - (2\nu-1) \cdot 0,1 \text{ (S.I)} \quad \text{Η}$$

μείωση του μήκους της τροχιάς για δύο διαδοχικές μετατοπίσεις θα είναι

$$\Delta S = S_{\nu-1} - S_{\nu} = [1 - (2(\nu-1) - 1) \cdot 0,1] - [1 - (2\nu-1) \cdot 0,1] \Rightarrow \Delta S = S_{\nu-1} - S_{\nu} = 0,2m = \text{σταθ.}$$

γ) Για μια νιοστή μετατόπιση ο μέσος ρυθμός μείωσης της ενέργειας ελαστικότητας ανά μονάδα μετατόπισης είναι:

$$\frac{\Delta E_{ελ,ν}}{S_ν} = \frac{\frac{1}{2}K\Delta\ell_{ν-1}^2 - \frac{1}{2}K\Delta\ell_ν^2}{\Delta\ell_{ν-1} + \Delta\ell_ν} \Rightarrow \frac{\Delta E_{ελ,ν}}{S_ν} = \frac{1}{2}K(\Delta\ell_{ν-1} - \Delta\ell_ν) \Rightarrow \frac{\Delta E_{ελ,ν}}{S_ν} = \frac{1}{2}100(0,1) \Rightarrow \frac{\Delta E_{ελ,ν}}{S_ν} = 5 \frac{J}{m} = \text{σταθερό. Άρα η } \gamma\text{-3 πρόταση είναι σωστή.}$$

γ-1) Η μείωση της ενέργειας ελαστικότητας για κάθε μετατόπιση είναι $\Delta E_{ελ,ν} = 5S_ν$ δηλαδή ανάλογη του μήκους της μετατόπισης μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών της ταχύτητας, έτσι:

$$1^{\text{η}} \text{ μετατόπιση: } \Delta E_{ελ,1} = 5S_1 = 5 \cdot 0,9 = 4,5J$$

$$2^{\text{η}} \text{ μετατόπιση: } \Delta E_{ελ,2} = 5S_2 = 5 \cdot 0,7 = 3,5J$$

$$3^{\text{η}} \text{ μετατόπιση: } \Delta E_{ελ,3} = 5S_3 = 5 \cdot 0,5 = 2,5J$$

$$4^{\text{η}} \text{ μετατόπιση: } \Delta E_{ελ,4} = 5S_4 = 5 \cdot 0,3 = 1,5J$$

$$5^{\text{η}} \text{ μετατόπιση: } \Delta E_{ελ,5} = 5S_5 = 5 \cdot 0,1 = 0,5J$$

Παρατηρούμε ότι δεν έχουμε σταθερή μείωση της ενέργειας ελαστικότητας για κάθε μετατόπιση μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών της ταχύτητας.

Άρα η γ-1 πρόταση είναι λανθασμένη.

γ-2) Το ποσοστό μείωσης για κάθε μετατόπιση είναι

$$\pi\% = \frac{\frac{1}{2}K\Delta\ell_{ν-1}^2 - \frac{1}{2}K\Delta\ell_ν^2}{\frac{1}{2}K\Delta\ell_{ν-1}^2} 100\% . \text{ Και εδώ αν βρούμε τα διαδοχικά ποσοστά}$$

μείωσης αυτά δεν έχουν την ίδια τιμή... και η γ-2 πρόταση είναι λανθασμένη.

δ) Το σώμα θα σταματήσει σε εκείνο τον στιγμιαίο μηδενισμό της ταχύτητας, που η δύναμη του ελατηρίου είναι μικρότερη από την μέγιστη στατική τριβή.

$F_{ελ,ν} \leq T_{στ,max} \Rightarrow K\Delta\ell_ν \leq T_{στ,max} \Rightarrow 100 \cdot (0,5 - \nu \cdot 0,1) \leq 5 \Rightarrow \nu \geq 4,5$ και επειδή $\nu \in \mathbb{Z}^+$ η πρώτη τιμή του ν που $F_{ελ,ν} \leq T_{στ,max}$ είναι για $\nu=5$, όπου $\Delta\ell_5 = 0,5 - 5 \cdot 0,1 = 0$ δηλαδή σταματάει στη θέση που το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος, διαγράφοντας πέντε διαδρομές μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών της ταχύτητας.

$$S_{ολ} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 \Rightarrow S_{ολ} = (0,9 + 0,7 + 0,5 + 0,3 + 0,1)m \Rightarrow S_{ολ} = 2,5m$$

Παρατηρείστε, ότι πρόκειται για αριθμητική πρόοδο με λόγο $-0,2m$.

ε) Αν το σώμα εκτελούσε απλή αρμονική ταλάντωση αυτή θα είχε κέντρο ταλάντωσης τη θέση όπου

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T = K\Delta\ell_{ισ} \Rightarrow \Delta\ell_{ισ} = \frac{T}{K} \Rightarrow$$

$\Delta\ell_{ισ} = 0,05m$ $\Delta\ell = 5cm$. Για κίνηση προς τα δεξιά η τριβή έχει κατεύθυνση προς τα αριστερά και το κέντρο της ταλάντωσης θα είναι $\Delta\ell = 5cm$ αριστερά του φυσικού μήκους. Αντίθετα για κίνηση του σώματος προς τα αριστερά το κέντρο της ταλάντωσης θα είναι $\Delta\ell = 5cm$ δεξιά του φυσικού μήκους. Ας θεωρήσουμε μια κίνηση προς τα δεξιά και το σώμα σε τυχαία συσπείρωση του ελατηρίου.

$\Sigma \vec{F}_x = \vec{T} + \vec{F}_{ελ} \Rightarrow \Sigma F_x = -T - F_{ελ} \Rightarrow \Sigma F_x = -T - K\Delta\ell'$ και επειδή $T = K\Delta\ell_{ισ}$, $\Delta\ell' = x - \Delta\ell_{ισ}$ παίρνουμε $\Sigma F_x = -K\Delta\ell_{ισ} - K(x - \Delta\ell_{ισ}) \Rightarrow \Sigma F_x = -Kx$ άρα η κίνηση αυτή μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών της ταχύτητας είναι μισή περίοδος απλής αρμονικής ταλάντωσης με σταθερά επαναφοράς $D = K \Rightarrow D = 100N/m$ και κυκλική συχνότητα $D = m\omega^2 \Rightarrow \omega = 10rad/s$. Κάθε τέτοια μισή ταλάντωση διαρκεί για μισή περίοδο που είναι $t' = \frac{T}{2} = \frac{2\pi}{2\omega} \Rightarrow t' = 0,314s$.

Όλα τα ανωτέρω ισχύουν για κάθε κίνηση μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών της ταχύτητας.

στ) Το πλάτος της «μισής» αυτής ταλάντωσης για την νιοστή διαδρομή θα είναι $A_v = \frac{\Delta\ell_{v-1} + \Delta\ell_v}{2} \Rightarrow A_v = \frac{S_v}{2} \Rightarrow A_v = \frac{1 - (2v-1) \cdot 0,1}{2} \Rightarrow A_v = \frac{1,1 - 2v}{2}$ (S.I) με

$$v \in \mathbb{Z}^+ \text{ ή } A_v = \frac{110 - 20v}{2} cm$$

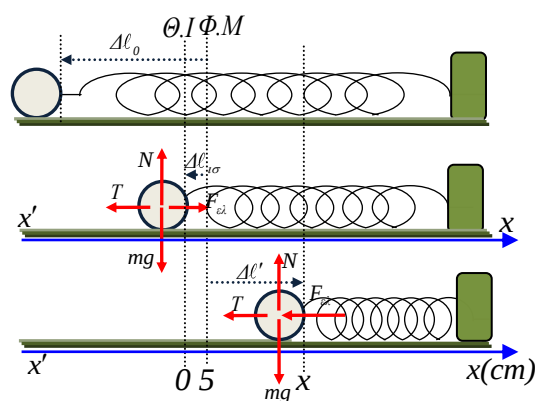
$$1^{\eta} \text{ ταλάντωση: } v=1, A_1 = \frac{110 - 20 \cdot 1}{2} cm \Rightarrow A_1 = 45cm$$

$$2^{\eta} \text{ ταλάντωση: } v=2, A_2 = \frac{110 - 20 \cdot 2}{2} cm \Rightarrow A_2 = 35cm$$

$$3^{\eta} \text{ ταλάντωση: } v=3, A_3 = \frac{110 - 20 \cdot 3}{2} cm \Rightarrow A_3 = 25cm$$

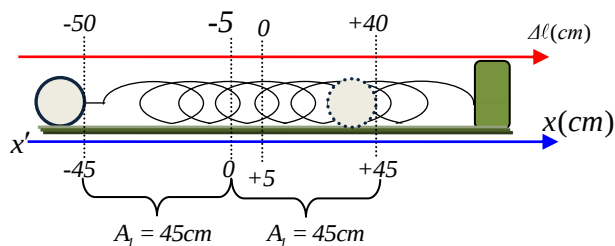
$$4^{\eta} \text{ ταλάντωση: } v=4, A_4 = \frac{110 - 20 \cdot 4}{2} cm \Rightarrow A_4 = 15cm$$

$$5^{\eta} \text{ ταλάντωση: } v=5, A_5 = \frac{110 - 20 \cdot 5}{2} cm \Rightarrow A_5 = 5cm$$

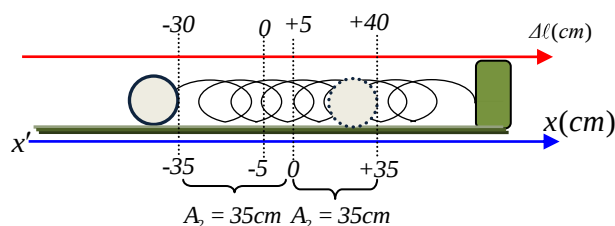


Παρατηρείστε για κάθε διαδρομή το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται κατά το ίδιο ποσό $\Delta A = 10\text{cm}$.

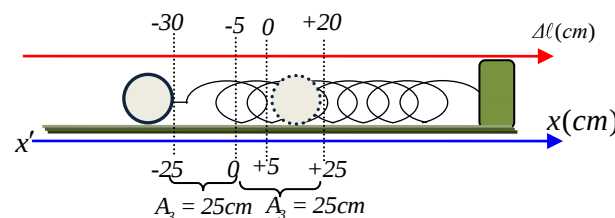
Η πρώτη μισή ταλάντωση:



Η δεύτερη μισή ταλάντωση:



Η τρίτη μισή ταλάντωση:
κ.λ.π



ζ) Ενέργεια ταλάντωσης:

$$1^{\text{η}} \text{ ταλάντωση: } E_1 = \frac{1}{2} D A_1^2 \Rightarrow E_1 = \frac{1}{2} 100 (0,45)^2 \Rightarrow E_1 = 10,125\text{J}$$

$$2^{\text{η}} \text{ ταλάντωση: } E_2 = \frac{1}{2} D A_2^2 \Rightarrow E_2 = \frac{1}{2} 100 (0,35)^2 \Rightarrow E_2 = 6,125\text{J}$$

$$3^{\text{η}} \text{ ταλάντωση: } E_3 = \frac{1}{2} D A_3^2 \Rightarrow E_3 = \frac{1}{2} 100 (0,25)^2 \Rightarrow E_3 = 3,125\text{J}$$

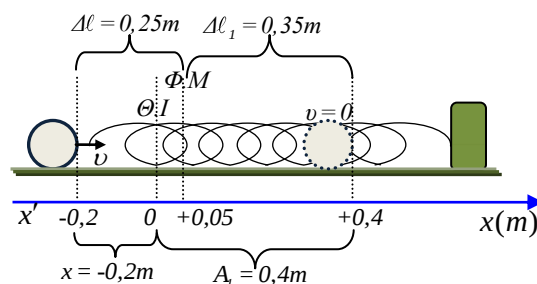
$$4^{\text{η}} \text{ ταλάντωση: } E_4 = \frac{1}{2} D A_4^2 \Rightarrow E_4 = \frac{1}{2} 100 (0,15)^2 \Rightarrow E_4 = 1,125\text{J}$$

$$5^{\text{η}} \text{ ταλάντωση: } E_5 = \frac{1}{2} D A_5^2 \Rightarrow E_5 = \frac{1}{2} 100 (0,05)^2 \Rightarrow E_5 = 0,125\text{J}$$

Παρατηρούμε ότι δεν έχουμε μείωση της ενέργειας κατά ίσα ποσά ανά ημιπερίοδο.

η) Ο συνολικός χρόνος κίνησης ισούται με τον χρόνο πέντε όμοιων ημιπεριοδών $t_{\text{ολ}} = 5t_l \Rightarrow t_{\text{ολ}} = 5,0,314\text{s} \Rightarrow t_{\text{ολ}} = 1,57\text{s}$.

θ) Το σώμα μέχρι τον πρώτο μηδενισμό της ταχύτητας θα εκτελέσει τμήμα απλής αρμονικής ταλάντωσης κινούμενο προς τα δεξιά με κέντρο $0,05m$ αριστερά του φυσικού μήκους του ελατηρίου, διότι εκεί είναι $\Sigma Fx = 0 \Rightarrow T = K\Delta\ell'$



...

Μόλις αρχίζει η ταλάντωση, ο ταλαντωτής έχει απομάκρυνση $x = -(0,25m - 0,05m) = -0,2m$ και ταχύτητα ταλάντωσης $v = +2\sqrt{3}m/s$.

Το πλάτος της ταλάντωσης A_1 προσδιορίζεται ενεργειακά,

$$\frac{1}{2}Dx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}DA_1^2 \xrightarrow{D=K} A_1 = \sqrt{x^2 + \frac{mv^2}{K}} \Rightarrow A_1 = 0,40m.$$

Η εξίσωση ταλάντωσης από την $t_0 = 0$ μέχρι τον πρώτο μηδενισμό της ταχύτητας είναι $x = A_1\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow x = 0,4\eta\mu(10t + \varphi_0)$ και επειδή την $t_0 = 0$,

έχουμε $x = -0,2m$ και $v > 0$ βρίσκουμε $\varphi_0 = \frac{11\pi}{6} rad$, άρα $x = 0,4\eta\mu(10t + \frac{11\pi}{6})$

(S.I). Ο χρόνος κίνησης από την στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τον πρώτο μηδενισμό της ταχύτητας βρίσκεται αν στην ανωτέρω εξίσωση θέσουμε $x = +0,4m$, οπότε

$$\eta\mu(10t_1 + \frac{11\pi}{6}) = +1 \Rightarrow 10t_1 + \frac{11\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ και για πρώτη φορά } k=1 \dots$$

$$10t_1 = \frac{5\pi}{2} - \frac{11\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow t_1 = \frac{2\pi}{30}.$$

Μετά τον πρώτο μηδενισμό της ταχύτητας θα εκτελέσει νέο τμήμα απλής αρμονικής ταλάντωσης κινούμενο προς τα αριστερά με κέντρο $0,05m$ δεξιά τώρα του φυσικού μήκους του ελατηρίου, διότι εκεί είναι $\Sigma Fx = 0 \Rightarrow T = K\Delta\ell'$.

Μόλις αρχίζει η ταλάντωση, ο ταλαντωτής έχει παραμόρφωση $\Delta\ell_1 = 0,35m$,

απομάκρυνση από την νέο κέντρο ταλάντωσης

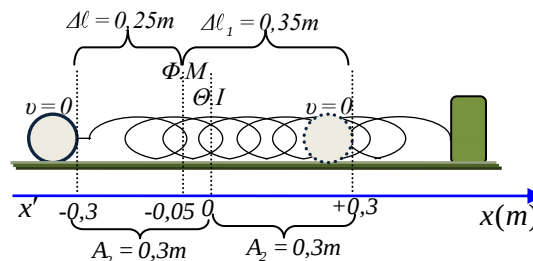
$$x = +(0,35m - 0,05m) = +0,30m \text{ και}$$

ταχύτητα ταλάντωσης $v = 0$.

Προφανώς τώρα η θέση αυτή είναι η ακραία θέση και συνεπώς το πλάτος της ταλάντωσης είναι $A_2 = 0,30m$. Ο

χρόνος τώρα μέχρι τον μηδενισμό της ταχύτητας είναι μισή περίοδος

$$t_2 = \frac{T}{2} = \frac{2\pi}{2\omega} \Rightarrow t_2 = \frac{\pi}{10}s \Rightarrow t_2 = \frac{3\pi}{30}s.$$



Χρόνος κίνησης: $t = t_1 + t_2 \Rightarrow t = \frac{5\pi}{30} \text{ s}$.

Συνολικό διάστημα κίνησης : $S = 0,20 + 0,40 + 0,30 \cdot 2 \Rightarrow S_{\text{ολ}} = 1,20 \text{ m}$.