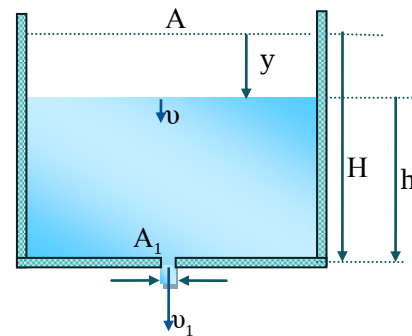
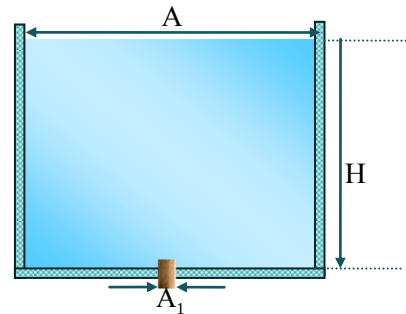


Ο χρόνος εκροής ενός ρευστού από ένα πρισματικό δοχείο.

Ένα πρισματικό δοχείο με εμβαδόν βάσης $A=0,25\text{m}^2$ περιέχει νερό μέχρι ύψος $H=1,8\text{m}$. Στον πυθμένα του δοχείου υπάρχει ένα άνοιγμα με εμβαδόν διατομής A_1 τέτοιο ώστε $A=\sqrt{10001} A_1$ [προσεγγιστικά ($A \cong 100A_1$)] που αρχικά διατηρείται κλειστό με ένα πώμα. Τη χρονική στιγμή $t_0=0$ αφαιρούμε το πώμα και εκρέει το νερό με ταυτόχρονη κάθοδο της ελεύθερης στάθμης του νερού.



α. Να βρείτε την συνάρτηση που δίνει την ταχύτητα καθόδου της ελεύθερης στάθμης του νερού με την μετατόπισή της από την αρχική στάθμη y .

β. Να βρείτε την συνάρτηση που δίνει την ταχύτητα καθόδου της ελεύθερης στάθμης του νερού με χρονική στιγμή t .

γ. Να βρείτε την χρονική στιγμή t που ολοκληρώνεται η εκροή του νερού.

δ. Να γίνει σε βαθμολογημένους άξονες η γραφική παράσταση της ταχύτητας καθόδου της ελεύθερης στάθμης του νερού με χρονική στιγμή t . Ποιο μέγεθος δείχνει το εμβαδόν της ανωτέρω γραφικής παράστασης;

ε. Να βρείτε τη συνάρτηση που δίνει τη παροχή εκροής του νερού με το χρόνο και να γίνει η αντίστοιχη γραφική παράσταση. Ποιο μέγεθος δείχνει το εμβαδόν της ανωτέρω γραφικής παράστασης;

Απάντηση

Απαντήσεις

α. Κάποια χρονική στιγμή t που η στάθμη του νερού έχει κατεβεί κατά y η ταχύτητα εκροής είναι v_1 και η ταχύτητα καθόδου της ελεύθερης στάθμης του νερού v . Επειδή η παροχή είναι σταθερή έχουμε για τις ανωτέρω ταχύτητες τη σχέση

$$Av = A_1 v_1 \quad \text{ή} \quad v_1 = \frac{A}{A_1} v \quad (1).$$

Την ίδια στιγμή εφαρμόζουμε στην ίδια ρευματική γραμμή την εξίσωση Bernoulli για το σημείο εκροής του νερού και αντίστοιχο σημείο της ελεύθερης στάθμης του νερού ...

$$p_{at} + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_{at} + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g(H - y) \quad \text{ή} \quad v_1^2 = v^2 + 2g(H - y) \xrightarrow{(1)} \frac{A^2}{A_1^2} v^2 = v^2 + 2g(H - y) \quad \text{ή}$$

$$\left(\frac{A^2}{A_1^2} - 1 \right) v^2 = 2g(H - y) \quad \text{ή} \quad v^2 = \frac{2g(H - y)}{\frac{A^2}{A_1^2} - 1} \xrightarrow{\text{S.I.}} v^2 = \frac{2 \cdot 10 \cdot (1,8 - y)}{\left(\frac{\sqrt{10001}}{1000} \right)^2 - 1} \quad \text{ή} \quad v^2 = \frac{36 - 20y}{10000}$$

ή $v^2 = 36 \cdot 10^{-4} - 20 \cdot 10^{-4} y$ (S.I) που είναι η εξίσωση της ταχύτητας καθόδου με την μείωση της ελεύθερης στάθμης του νερού.

Σημειώστε ότι:

- Μόλις αρχίζει η εκροή $y=0$ και η αρχική ταχύτητα καθόδου της στάθμης είναι $v_{\text{αρχ}}^2 = 36 \cdot 10^{-4} - 20 \cdot 10^{-4} \cdot 0$ ή $v_{\text{αρχ}} = 0,06 \text{ m/s}$ και από την σχέση (1) η ταχύτητα εκροής

$$\text{είναι } v_1 = \frac{A}{A_1} v \quad \text{ή} \quad v_1 = \sqrt{10001} v \quad \text{ή} \quad v_1 \cong 100 v \quad \text{ή} \quad v_1 \cong 100 \cdot 0,06 \text{ m/s} \quad \text{ή} \quad v_1 \cong 6 \text{ m/s} \dots$$

[ότι θα βρίσκαμε και από τη σχέση Torricelli $v_1 = \sqrt{2gH}$ ύστερα από την προσέγγιση $A \gg A_1$].

- Όταν ολοκληρωθεί η εκροή $y=H=1,8\text{m}$ η τελική ταχύτητα καθόδου της στάθμης είναι $v^2 = 36 \cdot 10^{-4} - 20 \cdot 10^{-4} \cdot 1,8$ ή $v = 0,00 \text{ m/s}$ και από την σχέση (1) η ταχύτητα εκροής

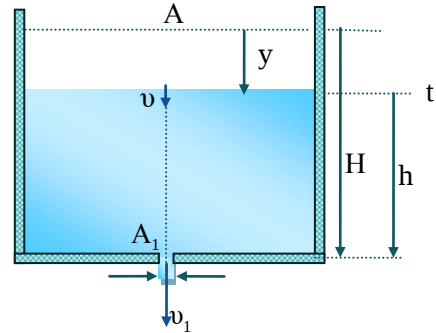
$$\text{είναι } v_1 = \frac{A}{A_1} v \quad \text{ή} \quad v_1 = 0.$$

β. Η σχέση $v^2 = 36 \cdot 10^{-4} - 20 \cdot 10^{-4} y$ αντιστοιχεί στη σχέση της κινηματικής $v^2 = v_{\text{αρχ}}^2 - 2|a|y$ στην ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση ... και με μια απλή ταυτοποίηση παίρνουμε $v_{\text{αρχ}} = 0,06 \text{ m/s}$ και $2|a| = 20 \cdot 10^{-4}$ ή $|a| = 10^{-3}$ ή $a = -10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Η επιτάχυνση a βγαίνει πιο απλά αν παραγωγίσουμε χρονικά την σχέση

$$v^2 = 36 \cdot 10^{-4} - 20 \cdot 10^{-4} y \quad \dots \quad \frac{d(v^2)}{dt} = \frac{d}{dt}(36 \cdot 10^{-4} - 20 \cdot 10^{-4} y) \quad \text{ή} \quad 2v \frac{dv}{dt} = -20 \cdot 10^{-4} \frac{dy}{dt} \quad \text{ή}$$

$$2v a = -20 \cdot 10^{-4} v \quad \text{ή} \quad a = -10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$



Με βάση αυτά τα δεδομένα η κάθοδος της ελεύθερης στάθμης του νερού γίνεται με ταχύτητα που μειώνεται με σταθερή επιβράδυνση και έχει χρονική εξίσωση $v = v_{αρχ} - |a|t$ ή

$$v = 0,06 - 10^{-3}t \text{ (S.I.) (2)}$$

γ. Μόλις ολοκληρώνεται η εκροή $v=0$ και η ανωτέρω σχέση δίνει ...

$$0 = 0,06 - 10^{-3}t \text{ ή } t = 60 \text{ s}$$

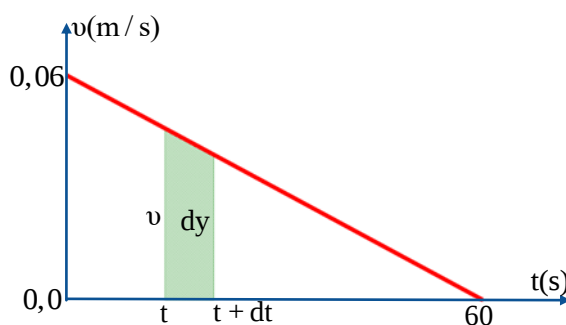
δ. Η γραφική παράσταση της $v = f(t)$

$v = 0,06 - 10^{-3}t$ (S.I.) αποδίδεται στο διάγραμμα. Ένα στοιχειώδες τμήμα αυτού του εμβαδού εκφράζει την μετατόπιση της ελεύθερης επιφάνειας

του νερού... $dE = vdt$ ή $dE = \frac{dy}{dt}dt$ ή

$dE = dy$. Προφανώς όλο το εμβαδόν δείχνει την συνολική μετατόπιση της ελεύθερης επιφάνειας του νερού ...

$E_{ολ} = \frac{1}{2} 60s \cdot 0,06 \frac{m}{s}$ ή $\Delta y_{ολικό} = 1,8m$ αναμενόμενο αφού τόσο είναι το αρχικό ύψος του νερού...



ε. Η παροχή εκροής είναι

$$\Pi = A_1 v_1 = Av \xrightarrow[A=0,25m^2]{(2)}$$

$$\Pi = 0,25 \cdot (0,06 - 10^{-3}t) \text{ ή}$$

$$\Pi = 15 \cdot 10^{-3} - 0,25 \cdot 10^{-3}t \text{ (S.I.)}$$

Η γραφική παράσταση της $\Pi = f(t)$

$$\Pi = 15 \cdot 10^{-3} - 0,25 \cdot 10^{-3}t \text{ (S.I.)}$$

αποδίδεται στο διάγραμμα. Ένα στοιχειώδες τμήμα αυτού του εμβαδού

εκφράζει τον στοιχειώδη όγκο εκροής του νερού ... $dE = \Pi dt$ ή $dE = \frac{dV}{dt}dt$ ή

$dE = dV$. Προφανώς όλο το εμβαδόν δείχνει τον συνολικό όγκο του νερού στο δοχείο.

$E_{ολ} = \frac{1}{2} 60s \cdot 15 \cdot 10^{-3} \frac{m^3}{s}$ ή $V_{ολικός} = 0,45 m^3$ αναμενόμενο αφού τόσος είναι ο όγκος του

νερού στο δοχείο αφού $V = AH = 0,25m^2 \cdot 1,8m$ ή $V = 0,45m^3$

