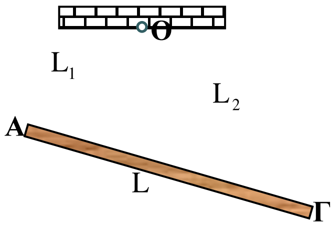
6. Μια άσκηση ισορροπίας στερεού … άσκηση Φυσικής Α΄ και Γ΄ Λυκείου … με αρκετή Γεωμετρία!

Μια ομογενής σανίδα ΑΓ μήκους L=2,45m και μάζας m=12Kg κρέμεται από τα άκρα της με δύο νήματα που θεωρούνται αβαρή και έχουν μήκη $L_1 = 1\text{m}$, $L_2 = 2\text{m}$ και είναι δεμένα σε ένα σημείο Ο μιας οροφής όπως στο σχήμα.



α. Εξηγείστε ότι όλες οι ασκούμενες στην ράβδο δυνάμεις διέρχονται από το ίδιο σημείο.

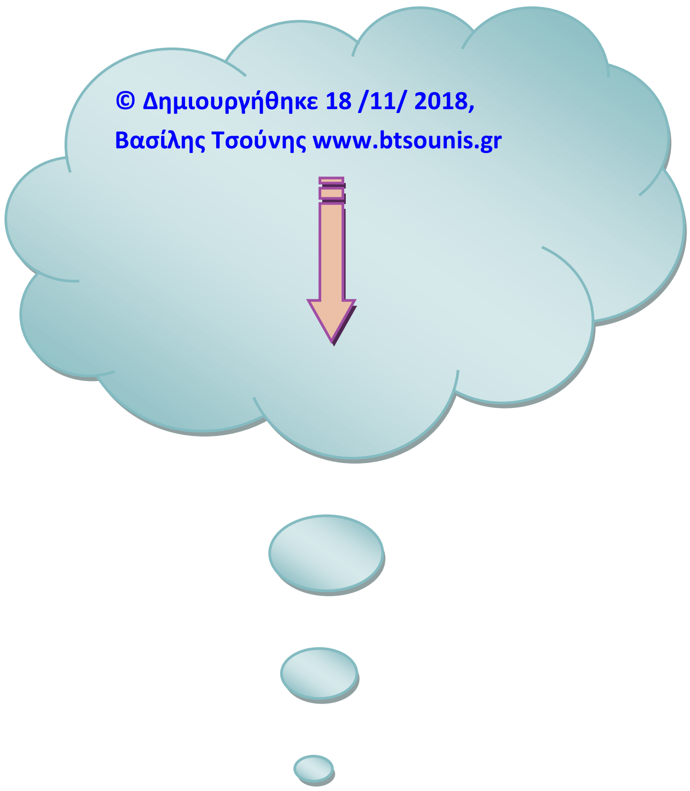
β. Να υπολογισθούν οι δυνάμεις που ασκούν τα νήματα στη ράβδο.

Θεωρείστε g=10m/s^2 και για ευκολία πράξεων $2,45^2 = 6$.

(*) Οι μαθητές της Α΄ Λυκείου να θεωρήσουν ως δεδομένο το α΄ ερώτημα.

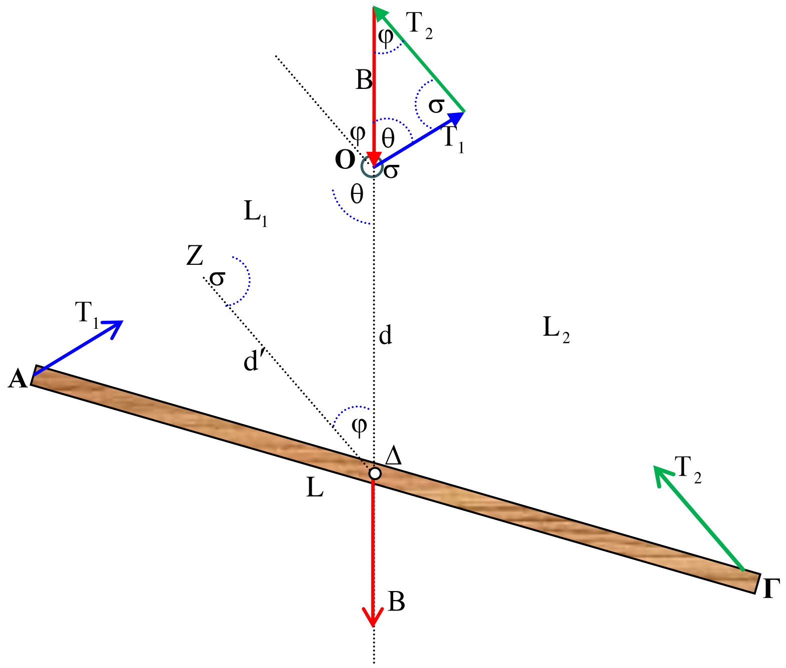
(**) Αν χρειασθεί η μετρική σχέση της διαμέσου τριγώνου να την αναζητήσετε από κάποιο βιβλίο Γεωμετρίας.

(***) Αφιερωμένη σε όλους που προσπαθούν ενάντια στην υποβάθμιση της Φυσικής αλλά και της Γεωμετρίας βασικής πηγής του τρόπου «σκέπτεσθαι» και της μεθόδου του «δημιουργείν».



Απάντηση:

α. Οι φορείς των δυνάμεων $\vec{T}_1$ και $\vec{T}_2$ των δύο νημάτων διέρχονται από το Ο … από εκεί διέρχεται η και ο φορέας της δύναμης του βάρους $\vec{B}$. Για την απόδειξη αυτή ας θεωρήσουμε ότι ο φορέας του βάρους δεν διέρχεται από το Ο αλλά απέχει από αυτό απόσταση r. Αφού η σανίδα ισορροπεί το άθροισμα των ροπών ως προς Ο είναι μηδέν $\Sigma\tau_{(O)}=0$ ή



$\underbrace{\tau_{T_1}}_{=0}+\underbrace{\tau_{T_1}}_{=0}+\tau_B=0$ ή $Br=0 \xrightarrow{B\neq0} r=0$ …δηλαδή η απόσταση του φορέα του βάρους από το Ο είναι μηδέν …άρα διέρχεται από το Ο.

β. Επειδή η σανίδα ισορροπεί $\Sigma\vec{F}=0$ ή $\vec{T}_1+\vec{T}_2+\vec{B}=0$ αν κάνουμε τις ασκούμενες στην σανίδα δυνάμεις $\vec{T}_1$,$\vec{T}_2$ και $\vec{B}$ διαδοχικές με αρχή το Ο, αυτές θα δημιουργούν « κλειστό» τρίγωνο όπως φαίνεται στο σχήμα . Στο τρίγωνο των δυνάμεων έχουν σημειωθεί οι γωνίες φ, θ, σ που όμως είναι άγνωστες . Αν από το μέσον Δ της ΑΓ φέρουμε παράλληλο με την ΓΟ αυτή τέμνει την ΑΟ στο Ζ που είναι το μέσον της … $\frac{A\Delta}{A\Gamma}=\frac{AZ}{AO}=\frac{\Delta Z}{\Gamma O}$ ή $\frac{1}{2}=\frac{AZ}{AO}=\frac{\Delta Z}{\Gamma O}$ ή

$AZ=\frac{AO}{2}$ και $\Delta Z=\frac{\Gamma O}{2}$ άρα $AZ=\mathbf{ZO}=\frac{\mathbf{L_1}}{\mathbf{2}}$ (1) και $\mathbf{\Delta Z}=\frac{\mathbf{L_2}}{\mathbf{2}}$ (2)

Αν προσέξουμε το τρίγωνο ΟΖΔ έχει γωνίες φ, θ, σ που έχει και το τρίγωνο των δυνάμεων …δηλαδή τα δύο τρίγωνα είναι όμοια. Η τρίτη πλευρά ΔΟ=d του τριγώνου ΟΖΔ ως η διάμεσος του ΟΑΓ βρίσκεται από την μετρική σχέση $OA^2+O\Gamma^2=2O\Delta^2+\frac{A\Gamma^2}{2}$ ή

$L_1^2+L_2^2=2d^2+\frac{L^2}{2}$ ή $2L_1^2+2L_2^2-L^2=4d^2$ ή $d=\frac{\sqrt{2\left(L_1^2+L_2^2\right)-L^2}}{2} \xrightarrow{S.I} d=1m$ (3).

Εφαρμόζουμε τον νόμο των ημιτόνων τόσο στο τρίγωνο των δυνάμεων όσο και στο τρίγωνο

ΟΖΔ και έχουμε $\dfrac{T_1}{ημφ}=\dfrac{T_2}{ημθ}=\dfrac{B}{ημσ}$ (4) και $\dfrac{ΖΟ}{ημφ}=\dfrac{ΖΔ}{ημθ}=\dfrac{ΟΔ}{ημσ}\xrightarrow{1,2}$ ή

$\dfrac{L_1/2}{ημφ}=\dfrac{L_2/2}{ημθ}=\dfrac{d}{ημσ}$ (5) ….Διαιρώντας τις (4) και (5) κατά μέλη έχουμε $\dfrac{2T_1}{L_1}=\dfrac{2T_2}{L_2}=\dfrac{Mg}{d}$

και από εδώ παίρνουμε : $T_1=Mg\dfrac{L_1}{2d}\xrightarrow{S.I}\mathbf{T_1=60N}$ και $T_2=Mg\dfrac{L_2}{2d}\xrightarrow{S.I}\mathbf{T_2=120N}$