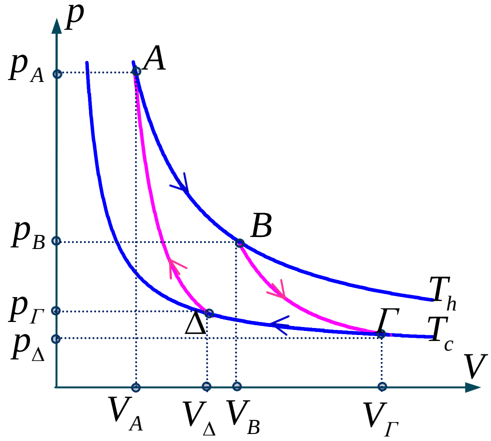
Ο θερμοδυναμικός κύκλος Carnot και η αρμονική σχέση των όγκων του .

Στο σχήμα φαίνεται ο θερμοδυναμικός κύκλος Carnot.

α) Να αποδείξτε ότι οι όγκοι V_A, V_B, V_Γ, V_Δ έχουν πάντοτε τέτοιες τιμές ώστε να πληρούν την σχέση $\frac{V_A}{V_B} = \frac{V_\Delta}{V_\Gamma}$.



β) Εξηγείστε ότι ο λόγος της προσφερόμενης θερμότητας Q_h στη μηχανή προς την αποβαλλόμενη θερμότητα Q_c ισούται με τον λόγο των θερμοκρασιών T_h και T_c των δεξαμενών υψηλής και χαμηλής θερμοκρασίας $\frac{Q_h}{|Q_c|} = \frac{T_h}{T_c}$.

γ) Να δείξετε όση ενέργεια αποβάλλεται μέσω του έργου προς το περιβάλλον στην αδιαβατική εκτόνωση τόση ενέργεια επιστρέφει από το περιβάλλον στο αέριο κατά την αδιαβατική συμπίεση.

Μια θερμική μηχανή Carnot έχει αέριο σε ποσότητα $n = 0{,}2mol$ με λόγο ειδικών γραμμομοριακών θερμοτήτων $\gamma = \frac{5}{3}$. Αν η απόδοση της μηχανής αυτής είναι 40% , η συχνότητά της $f = 20Hz$ η δε μηχανή απορροφά θερμότητα με ρυθμό $20\frac{KJ}{s}$ από δεξαμενή θερμοκρασίας $T_h = 500K$, να βρείτε:

δ) την ισχύ της μηχανής ,

ε) το ωφέλιμο έργο που αποδίδει η μηχανή σε ένα κύκλο της,

στ)τα έργα του αερίου της μηχανής σε κάθε διακριτό τμήμα του θερμοδυναμικού κύκλου . Δίνεται $R = \frac{25}{3}\frac{Joule}{mol.K}$.

Απάντηση:

α) Ισόθερμη εκτόνωση ... νόμος Boyle: $p_A V_A = p_B V_B$ (1)

Αδιαβατική εκτόνωση ...νόμος Poisson $p_B V_B^\gamma = p_\Gamma V_\Gamma^\gamma$ (2)

Ισόθερμη συμπίεση ... νόμος Boyle: $p_\Gamma V_\Gamma = p_\Delta V_\Delta$ (3)

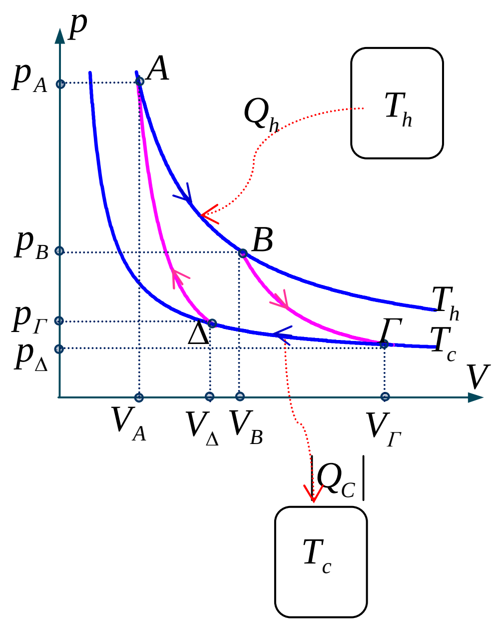
Αδιαβατική συμπίεση...νόμος Poisson $p_\Delta V_\Delta^\gamma = p_A V_A^\gamma$ (4)

Με πολλαπλασιασμό των εξισώσεων αυτών παίρνουμε

$$p_A V_A p_B V_B^{\gamma} p_\Gamma V_\Gamma p_\Delta V_\Delta^{\gamma} = p_B V_B p_\Gamma V_\Gamma^{\gamma} p_\Delta V_\Delta p_A V_A^{\gamma} \quad \Rightarrow \qquad V_A V_B^{\gamma} V_\Gamma V_\Delta^{\gamma} = V_B V_\Gamma^{\gamma} V_\Delta V_A^{\gamma}$$

$$V_B^{\gamma\text{-}1} V_\Delta^{\gamma\text{-}1} = V_\Gamma^{\gamma\text{-}1} V_A^{\gamma\text{-}1} \Rightarrow \left(V_B V_\Delta\right)^{\gamma\text{-}1} = \left(V_\Gamma V_A\right)^{\gamma\text{-}1} \Rightarrow V_B V_\Delta V_\Gamma V_A \Rightarrow \frac{V_A}{V_B} = \frac{V_\Delta}{V_\Gamma}(5)$$

β) $\dfrac{Q_h}{|Q_c|} = \dfrac{Q_{AB}}{|Q_{\Gamma\Delta}|} = \dfrac{W_{AB}}{W_{\Gamma\Delta}} \Rightarrow$



$$\frac{Q_h}{|Q_c|} = \frac{nRT_h \ell n \dfrac{V_B}{V_A}}{\left| nRT_C \ell n \dfrac{V_\Delta}{V_\Gamma} \right|} \Rightarrow$$

$$\frac{Q_h}{|Q_c|} = \frac{nRT_h \ell n \dfrac{V_B}{V_A}}{\text{-}nRT_C \ell n \dfrac{V_\Delta}{V_\Gamma}} \Rightarrow$$

$$\frac{Q_h}{|Q_c|} = \frac{nRT_h \ell n \dfrac{V_B}{V_A}}{nRT_C \ell n \dfrac{V_\Gamma}{V_\Delta}} \Rightarrow \frac{Q_h}{|Q_c|} = \frac{T_h \ell n \dfrac{V_B}{V_A}}{T_C \ell n \dfrac{V_\Gamma}{V_\Delta}}$$

$$\xrightarrow{(5)....\frac{V_B}{V_A} = \frac{V_\Gamma}{V_\Delta}} \frac{Q_h}{|Q_c|} = \frac{T_h}{T_C}.$$

γ) Αδιαβατική εκτόνωση ΒΓ: $Q_{B\Gamma} = \Delta U_{B\Gamma} + W_{B\Gamma} \xrightarrow{Q_{B\Gamma}=0}$

$W_{B\Gamma} = -\Delta U_{B\Gamma} \Rightarrow W_{B\Gamma} = \text{-}nC_V(T_c \text{-} T_h) \Rightarrow W_{B\Gamma} = nC_V(T_h - T_c)(6)$

Αδιαβατική συμπίεση ΔΑ: $Q_{\Delta A} = \Delta U_{\Delta A} + W_{\Delta A} \xrightarrow{Q_{\Delta A}=0}$

$W_{\Delta A} = -\Delta U_{\Delta A} \Rightarrow W_{\Delta A} = \text{-}nC_V(T_h \text{-} T_c) \Rightarrow |W_{\Delta A}| = nC_V(T_h - T_c)(7)$

Από (6) και (7) έχουμε $W_{B\Gamma} = |W_{\Delta A}|$

δ) $e = \dfrac{W_{\omega\varphi}}{Q_h} \Rightarrow e = \dfrac{\dfrac{W_{\omega\varphi}}{t}}{\dfrac{Q_h}{t}} \Rightarrow e = \dfrac{P_{\omega\varphi}}{\left(Q_h / t\right)} \Rightarrow P_{\omega\varphi} = e\left(Q_h / t\right) \Rightarrow$

$P_{\omega\varphi} = 0{,}4.20KW \Rightarrow P_{\omega\varphi} = 8KW$

ε) $P_{\omega\varphi} = \dfrac{W_{\omega\varphi}}{t}$ και για ένα θερμοδυναμικό κύκλο $P_{\omega\varphi} = \dfrac{W_{\omega\varphi(\kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\varsigma)}}{T} \Rightarrow$

$W_{\omega\varphi(\kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\varsigma)} = P_{\omega\varphi} T$ ...όπου Τ η περίοδος του κύκλου που είναι $T = \dfrac{1}{f}$

...οπότε $W_{\omega\varphi(\kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\varsigma)} = P_{\omega\varphi}\dfrac{1}{f} \Rightarrow W_{\omega\varphi(\kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\varsigma)} = 8000W\dfrac{1}{20Hz} \Rightarrow$

$W_{\omega\varphi(\kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\varsigma)} = 400J$

στ) Δίνεται $\dfrac{Q_h}{t} = 20000\dfrac{J}{s} \Rightarrow Q_h = 20000t$ (S.I) και για ένα θερμοδυναμικό κύκλο $Q_{h(\kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\varsigma)} = 20000.T$ όπου T η περίοδος του κύκλου που είναι $T = \dfrac{1}{f}$....άρα $Q_{h(\kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\varsigma)} = 20000\dfrac{J}{s}.\dfrac{1}{20}s \Rightarrow Q_{h(\kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\varsigma)} = 1000J$

$Q_{h(\kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\varsigma)} - |Q_{c(\kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\varsigma)}| = W_{(\kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\varsigma)} \Rightarrow ...|Q_{c(\kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\varsigma)}| = 600J$

Ισόθερμη εκτόνωση : $Q_h = W_{AB} \Rightarrow W_{AB} = 1000J$

Ισόθερμη συμπίεση : $Q_c = W_{\Gamma\Delta} \Rightarrow W_{\Gamma\Delta} = -600J$

Αδιαβατική εκτόνωση: Από τις σχέσεις $\gamma = \dfrac{C_p}{C_v} \Rightarrow C_p = \gamma C_v$ και $C_p - C_v = R$ παίρνουμε... $C_v = \dfrac{R}{\gamma - 1}$ $C_v = \dfrac{3R}{2}$.

Επίσης $\dfrac{|Q_c|}{Q_h} = \dfrac{T_c}{T_h} \Rightarrow \dfrac{600}{1000} = \dfrac{T_c}{500} \Rightarrow T_c = 300K$ και με αντικατάσταση στην (6) έχουμε $W_{B\Gamma} = nC_V(T_h - T_c) \Rightarrow W_{B\Gamma} = n\dfrac{3R}{2}(T_h - T_c) \Rightarrow$

$W_{B\Gamma} = 0{,}2mol\dfrac{3}{2}\dfrac{25Joule}{3mol.K}(500K - 300K) \Rightarrow W_{B\Gamma} = 500J$ ...και $W_{\Delta A} = -500J$