



δύο αυτών δυνάμεων στο χρόνο  $dt$  είναι  $dW = F_1 dy_1 - F_2 dy_2$  ή  $dW = p_1 A_1 dy_1 - p_2 A_2 dy_2$  και επειδή  $A_1 dy_1 = p_2 A_2 = dV$  παίρνουμε  $dW = (p_1 - p_2) dV$ .

- Οι δυνάμεις βαρύτητας το έργο των οποίων στο χρόνο  $dt$  ισούται με το αντίθετο της μεταβολής της δυναμικής ενέργειας βαρύτητας  $dW_B = -dU$  ή  $dW_B = -\rho dV g(y_2 - y_1)$  ή  $dW_B = \rho dV g(y_1 - y_2)$ .

- το έργο της αντλίας  $dW_{\text{αντλίας}}$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα έργου ενέργειας παίρνουμε,  $dK = dW + dW_B + dW_{\text{αντλίας}}$  ή

$$\frac{1}{2} \rho dV (v_2^2 - v_1^2) = (p_1 - p_2) dV + \rho dV g(y_1 - y_2) + dW_{\text{αντλίας}} \quad \text{ή}$$

$$\frac{dW_{\text{αντλίας}}}{dV} = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) + (p_2 - p_1) + \rho dV g(y_2 - y_1) \quad \text{ή}$$

$$\frac{dW_{\text{αντλίας}}}{dV} = \frac{1}{2} \rho v_2^2 - \frac{1}{2} \rho v_1^2 + (p_2 - p_1) + \rho g y_2 - \rho g y_1, \quad \text{δηλαδή η προσφερόμενη από την αντλία}$$

ενέργεια ανά μονάδα όγκου ισούται με την μεταβολή της δυναμικής πίεσης

$$\Delta p_\delta = \frac{1}{2} \rho v_2^2 - \frac{1}{2} \rho v_1^2, \quad \text{της στατικής πίεσης } \Delta p = p_2 - p_1 \quad \text{και} \quad \text{υψομετρικής πίεσης}$$

$$\Delta p_v = \rho g y_2 - \rho g y_1 \quad \text{ήτοι:} \quad \frac{dW_{\text{αντλίας}}}{dV} = \Delta p_\delta + \Delta p + \Delta p_v \quad (1).$$

Από την σχέση της παροχής ροής  $\Pi = \frac{dV}{dt}$  παίρνουμε  $dV = \Pi dt$  οπότε η σχέση (1) μας δίνει

$$\frac{dW_{\text{αντλίας}}}{dt} = (\Delta p_\delta + \Delta p + \Delta p_v) \Pi \quad \text{που είναι η ισχύς της αντλίας,} \quad p_{\text{αντλίας}} = (\Delta p_\delta + \Delta p + \Delta p_v) \Pi.$$

Εδώ χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή στην εφαρμογή της εξίσωσης Bernoulli που ισχύει για τμήματα εκτός της αντλίας, για το τμήμα μέχρι την αντλία και το τμήμα μετά από αυτήν.

(προβλήματα 8.70, 8.71, 8.72)