

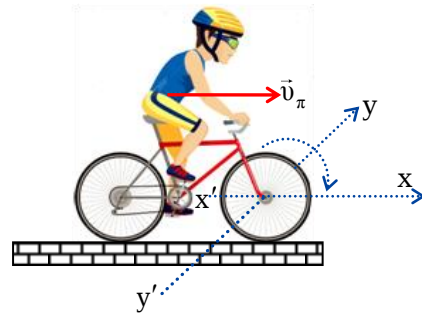
Κύλιση χωρίς ολίσθηση ... η τροχιά και η ταχύτητα ενός σημείου της περιφέρειας του τροχού.

1. Γενικά περί κύλισης

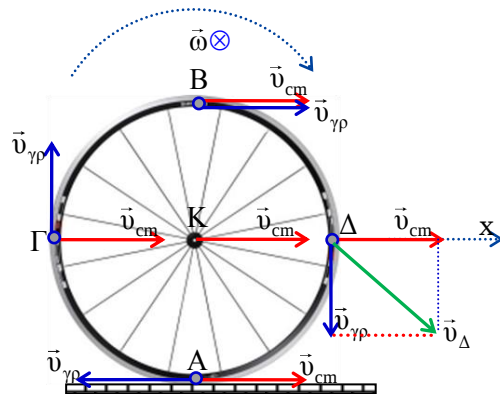
Κύλιση είναι γενικά είναι η σύνθετη κίνηση που μπορεί να κάνει ο τροχός ενός ποδηλάτου και κάθε ανάλογη κίνηση που μπορεί να κάνει ο δίσκος, η στεφάνη, ο κύλινδρος, η σφαίρα ή το καρούλι. Η κύλιση είναι μια σύνθετη κίνηση που αποτελείται από μια στροφική κίνηση που γίνεται γύρω από οριζόντιο άξονα $y'y$ που διέρχεται από το κέντρο μάζας του κυλιόμενου σώματος και από μια μεταφορική κίνηση σε άξονα $x'x$ κάθετο στον άξονα περιστροφής (όπως ο τροχός του ποδηλάτου του σχήματος).

Το κέντρο μάζας K του ποδηλάτου εκτελεί μόνο μεταφορική κίνηση με ταχύτητα μεταφοράς ίση με αυτή του ποδηλάτου $\vec{v}_{cm} = \vec{v}_\pi$. Όλα τα άλλα σημεία του τροχού εκτελούν σύνθετη κίνηση, την μεταφορική με ταχύτητα αυτήν του ποδηλάτου $\vec{v}_{cm} = \vec{v}_\pi$ και την κυκλική κίνηση με γραμμική ταχύτητα $v_{\gamma\rho} = \omega r$ (όπου r η απόσταση του σημείου από το κέντρο του τροχού και ω η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του τροχού). Στο σχήμα έχουν σημειωθεί τέσσερα σημεία στην περιφέρεια του τροχού και κάθε ένα έχει ταχύτητα που προκύπτει από το διανυσματικό άθροισμα των επιμέρους ταχυτήτων $\vec{v} = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_{\gamma\rho}$ με $v_{\gamma\rho} = \omega R$ (R η ακτίνα του τροχού). Έτσι όταν,

- κάποιο σημείο της περιφέρειας του τροχού βρεθεί στην κατώτερη θέση A που είναι σε επαφή με το δάπεδο θα έχει ταχύτητα $\vec{v}_A = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_{\gamma\rho}$ ή $v_A = v_{cm} - \omega R$.
- κάποιο σημείο της περιφέρειας του τροχού βρεθεί στην ανώτερη θέση B θα έχει ταχύτητα $\vec{v}_B = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_{\gamma\rho}$ ή $v_B = v_{cm} + \omega R$.
- κάποιο σημείο της περιφέρειας του τροχού βρεθεί σε απόσταση R από το δάπεδο (θέση Γ ή Δ) θα έχει ταχύτητα $\vec{v}_\Delta = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_{\gamma\rho}$ ή $v_\Delta = \sqrt{v_{cm}^2 + (\omega R)^2}$ ή $v_\Delta = \sqrt{v_{cm}^2 + (\omega R)^2}$.



Ο τροχός του ποδηλάτου εκτελεί κύλιση που είναι σύνθετη κίνηση, ταυτόχρονα στρέφεται γύρω από τον άξονα $y'y$ και μεταφέρεται στο άξονα $x'x \perp y'y$



2. Η κύλιση χωρίς ολίσθηση σε ακίνητο

Η πιο συνηθισμένη και ενδιαφέρουσα κύλιση είναι η κύλιση χωρίς ολίσθηση πάνω στο δάπεδο κύλισης. Για να έχουμε κύλιση χωρίς ολίσθηση, πρέπει το σημείο της

περιφέρειας του κυλιόμενου σώματος που έρχεται σε επαφή με το δάπεδο να έχει την ίδια ταχύτητα με το δάπεδο.

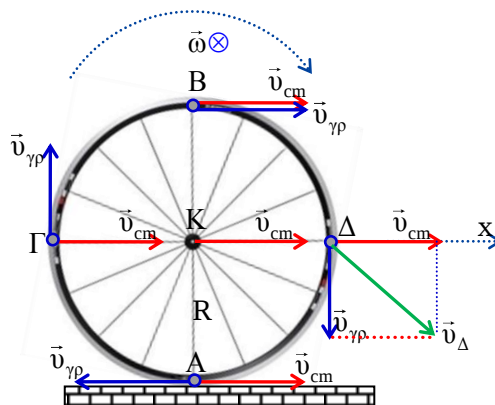
2.1 Η βασική συνθήκη κύλισης

Όταν η κύλιση γίνεται πάνω σε ακίνητο δάπεδο (πρακτικά η πιο συνηθισμένη περίπτωση) το σημείο της περιφέρειας που έρχεται σε επαφή με το δάπεδο να έχει πρέπει να έχει την ταχύτητα του δαπέδου, δηλαδή **ταχύτητα μηδέν**, $\vec{v}_A = 0$.

2.2 Σχέση μεταξύ της ταχύτητας $\vec{v}_{cm}$ του κέντρου μάζας της γωνιακής ταχύτητας ω .

Το σημείο της περιφέρειας που έρχεται σε επαφή με το δάπεδο πρέπει να έχει ταχύτητα μηδέν, άρα $v_A = 0 \Rightarrow v_{cm} - v_{\gamma\rho} = 0 \Rightarrow v_{cm} = v_{\gamma\rho}$ ή $v_{cm} = \omega R$... έτσι στην κίνηση χωρίς ολίσθηση

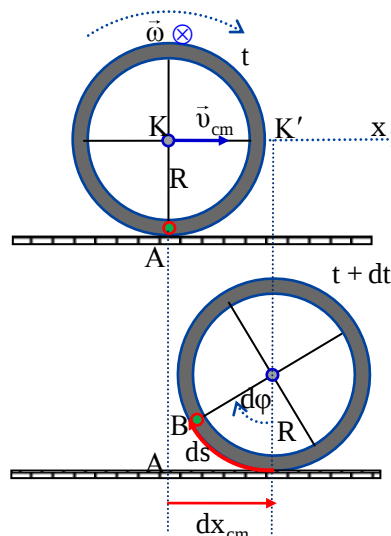
- * η γραμμική ταχύτητα λόγω της στροφικής κίνησης κάθε σημείου της περιφέρειας του τροχού έχει μέτρο ίσο με την μεταφορική ταχύτητα του κέντρου μάζας $v_{cm} = v_{\gamma\rho}$.
- * η ταχύτητα του κέντρου μάζας $\vec{v}_{cm}$ που οφείλεται μόνο στη μεταφορική κίνηση και η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του κυλιόμενου σώματος συνδέονται με τη σχέση $\vec{v}_{cm} = \omega \vec{R}$, όπου R η ακτίνα της περιφέρειας που έρχεται σε επαφή με το δάπεδο.
- * κάθε σημείο της περιφέρειας του τροχού μόλις έρχεται σε επαφή με το δάπεδο (σημείο A) έχει ταχύτητα μηδέν.
- * κάθε σημείο της περιφέρειας του μόλις έρχεται στην ανώτερη θέση (σημείο B) έχει ταχύτητα $v_B = v_{cm} + \omega R$ ή $v_B = 2v_{cm}$ ή $v_B = 2\omega R$
- * κάθε σημείο της περιφέρειας του μόλις έρχεται απόσταση R από το δάπεδο (σημεία Γ και Δ) έχει ταχύτητα $v_\Delta = \sqrt{v_{cm}^2 + (\omega R)^2}$ ή $v_\Delta = v_{cm} \sqrt{2}$ ή $v_\Delta = \omega R \sqrt{2}$.



2.3 Η σχέση των διαστημάτων του κέντρου μάζας και ενός σημείου της περιφέρειας.

Ένας τροχός κυλιέται χωρίς ολίσθηση πάνω σε ακλόνητο δάπεδο και στο σχήμα φαίνονται οι θέσεις αυτού σε δύο διαδοχικές χρονικές στιγμές t και $t+dt$. Στο στοιχειώδη χρόνο κίνησης dt το κέντρο μάζας μετατοπίστηκε κατά KK' ... διανύοντας διάστημα $dx_{cm} = v_{cm} dt$ (1). Στο ίδιο χρόνο ένα σημείο της περιφέρειας του τροχού, έστω το A βρίσκεται στη θέση B. Λόγω της στροφικής κίνησης του τροχού (... προσοχή λόγω της στροφικής κίνησης και όχι λόγω της συνολικής κίνησης) διανύσει διάστημα $ds = R d\phi$
 $\xrightarrow{d\phi = \omega dt} ds = \omega R dt$ (2) ... και επειδή όπως είδαμε στην §2.2 $v_{cm} = \omega R$, από τις (1) και (2) συνάγεται $dx_{cm} = ds$ ή $\sum(dx_{cm}) = \sum(ds)$ ή $\Delta x_{cm} = \Delta s_{\text{περιφέρειας}}$.

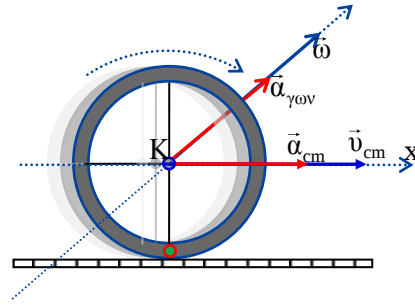
- Η μετατόπιση του κέντρου μάζας ενός κυλιόμενου σώματος ισούται με το διάστημα που διανύει ένα σημείο της περιφέρειας λόγω της στροφικής του κίνησης $\Delta x_{cm} = \Delta s_{\text{περ}}$.



2.3 Η σχέση της γωνιακής επιτάχυνσης $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ και της επιτάχυνσης a_{cm} του c.m.

Για τον τροχό του σχήματος που κυλιέται χωρίς ολίσθηση πάνω σε δάπεδο η ταχύτητα μεταφοράς v_{cm} του κέντρου μάζας (αλλά και κάθε άλλου σημείου) και η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής ω συνδέονται με τη σχέση $v_{cm} = \omega R$. Η σχέση αυτή μας δηλώνει ότι στην κύλιση χωρίς ολίσθηση,

- οι ταχύτητες v_{cm} και ω είναι μεγέθη ανάλογα,
- η μεταφορική και στροφική κίνηση είναι ομοιόμορφες (και οι δύο ομαλές ή και οι δύο επιταχυνόμενες ή και οι δύο επιβραδυνόμενες).



Έτσι αν η μεταφορική κίνηση είναι επιταχυνόμενη με επιτάχυνση a_{cm} και η στροφική θα είναι επίσης επιταχυνόμενη με γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\omega\nu}$.

Από τον ορισμό της επιτάχυνσης μεταφοράς a_{cm} έχουμε $a_{cm} = \frac{dv_{cm}}{dt}$ και επειδή $v_{cm} = \omega R$

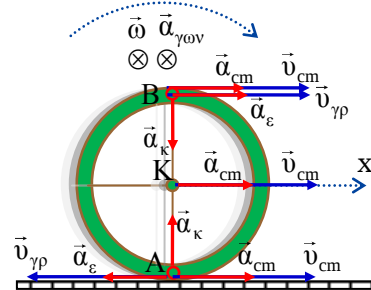
παίρνουμε $a_{cm} = \frac{d(\omega R)}{dt}$ ή $a_{cm} = R \frac{d\omega}{dt}$ (1). Η γωνιακή επιτάχυνση ορίζεται από τη σχέση

$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt}$ και με αντικατάσταση στην (1) παίρνουμε τη σχέση a_{cm} και $\alpha_{\gamma\omega\nu}$: $a_{cm} = R\alpha_{\gamma\omega\nu}$.

2.4 Η σχέση επιτρόχιας και της γωνιακής επιτάχυνσης

Κάθε σημείο της περιφέρειας του τροχού έχει τρεις επιταχύνσεις:

- την επιτρόχια επιτάχυνση που δίνεται από τη σχέση $a_e = \frac{dv_{\gamma p}}{dt}$ και περιγράφει το ρυθμό μεταβολής του **μέτρου** της γραμμικής ταχύτητας. Αν η κίνηση είναι επιταχυνόμενη η επιτρόχια επιτάχυνση $\vec{a}_e$ είναι ομόρροπη της γραμμικής ταχύτητας $\vec{v}_{\gamma p}$ και αν είναι επιβραδυνόμενη είναι αντίρροπη αυτής.



- την επιτάχυνση μεταφοράς που δίνεται από τη σχέση $a_{cm} = \frac{dv_{cm}}{dt}$ και περιγράφει το ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας μεταφοράς $\vec{v}_{cm}$. Αν η κίνηση είναι επιταχυνόμενη η επιτάχυνση μεταφοράς $\vec{a}_{cm}$ είναι ομόρροπη της ταχύτητας $\vec{v}_{cm}$ και αν είναι επιβραδυνόμενη είναι αντίρροπη αυτής.

- την κεντρομόλο επιτάχυνσης $a_k = \frac{v_{\gamma p}^2}{R}$ ή $a_k = \omega^2 R$ που έχει ακτινική κατεύθυνση και περιγράφει το ρυθμό μεταβολής της **διεύθυνσης** της γραμμικής ταχύτητας.

Πέρα από τις επιταχύνσεις αυτές ο τροχός έχει την γωνιακή επιτάχυνση που περιγράφει το ρυθμό μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας και ορίζεται από τη σχέση $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt}$.

Για ένα σημείο της περιφέρειας του τροχού που κυλίεται χωρίς ολίσθηση η επιτρόχιος επιτάχυνση είναι $\alpha_\varepsilon = \frac{dv_{\gamma p}}{dt} \xrightarrow{v_{\gamma p} = \omega R} \alpha_\varepsilon = \frac{d(\omega R)}{dt}$ ή $\alpha_\varepsilon = R \frac{d\omega}{dt} \xrightarrow{\alpha_{\gamma\omega\omega} = d\omega/dt} \alpha_\varepsilon = R\alpha_{\gamma\omega\omega}$ και επειδή $\alpha_{cm} = R\alpha_{\gamma\omega\omega}$ για τις ανωτέρω επιταχύνσεις ισχύει $\alpha_\varepsilon = R\alpha_{\gamma\omega\omega} = \alpha_{cm}$.

Στην κύλιση χωρίς ολίσθηση οι επιταχύνσεις στην κατεύθυνση x'x της μεταφορικής κίνησης,

- για το σημείο του τροχού που έρχεται σε επαφή με το έδαφος (σημείο A) είναι $\alpha_A = \alpha_{cm} - \alpha_{\gamma p}$ ή $\alpha_A = 0$.
- για το σημείο του τροχού όταν έρχεται στην ανώτερη θέση (σημείο B) είναι $\alpha_B = \alpha_{cm} + \alpha_{\gamma p}$ ή $\alpha_B = 2\alpha_{cm}$.

2.5 Η ταχύτητα σε τυχαίο σημείο της περιφέρειας

Ο τροχός του σχήματος που κυλίεται χωρίς ολίσθηση πάνω σε δάπεδο. Η ταχύτητα ενός τυχαίου σημείου Γ της περιφέρειας είναι

$$v_\Gamma = \sqrt{v_{cm}^2 + v_{\gamma p}^2 + 2v_{cm}v_{\gamma p}\cos\varphi} \xrightarrow{v_{cm}=v_{\gamma p}}$$

$$v_\Gamma = \sqrt{v_{cm}^2 + v_{cm}^2 + 2v_{cm}v_{cm}\cos\varphi} \quad \text{ή}$$

$$v_\Gamma = \sqrt{2v_{cm}^2(1+\cos\varphi)} \quad \text{ή}$$

$$v_\Gamma = \sqrt{2v_{cm}^2 2\sin^2\frac{\varphi}{2}} \quad \text{ή}$$

$$v_\Gamma = 2v_{cm}\sin\frac{\varphi}{2} \xrightarrow{v_{cm}=\omega R}$$

$$v_\Gamma = 2\omega R\sin\frac{\varphi}{2} \quad (1).$$

Από το ισοσκελές τρίγωνο ΚΓΑ και το νόμο των συνημιτόνων έχουμε

$$r^2 = R^2 + R^2 - 2R \cdot R \cdot \cos(\pi - \varphi) \quad \text{ή} \quad r^2 = 2R^2 + 2R^2\cos\varphi \quad \text{ή} \quad r^2 = 2R^2(1+\cos\varphi) \quad \text{ή}$$

$$r^2 = 2R^2 2\sin^2\frac{\varphi}{2} \quad \text{ή} \quad r = 2R\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \quad (2).$$

Από (1) και (2) έχουμε $v_\Gamma = \omega r$.

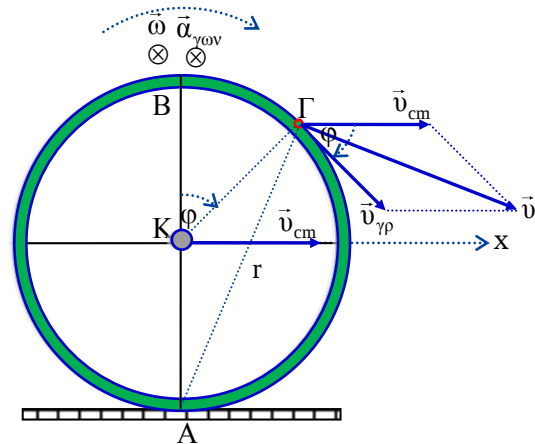
Με βάση τα ανωτέρω αλλά και την γεωμετρία του σχήματος καταλήγουμε στα εξής συμπεράσματα:

Η ταχύτητα κάθε σημείου της περιφέρειας του τροχού,

α. είναι κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα μήκους r που ενώνει το σημείο αυτό με το σημείο επαφής του τροχού με το δάπεδο,

β. είναι ανάλογη με της ανωτέρω απόστασης r ($v_\Gamma = \omega r$),

γ. η κύλιση ενός τροχού μπορεί να θεωρηθεί ως στροφική κίνηση περί στιγμιαίο άξονα περιστροφής, ο οποίος διέρχεται από το σημείο επαφής του τροχού με το δάπεδο και ο οποίος μεταφέρεται χωρίς να αλλάζει διεύθυνση.



2.5 Η ταχύτητα και η τροχιά ενός σημείου της περιφέρειας

Έστω ένας τροχός ακτίνας R που κυλιέται ομαλά με κύλιση χωρίς ολίσθηση πάνω σε οριζόντιο δάπεδο. Για τον τροχό του σχήματος θα μελετήσουμε την κίνησή του σε ορθογώνιο σύστημα αναφοράς (x,y) , που έχει ως αρχή $(0,0)$ το σημείο A του τροχού που τη χρονική στιγμή $t_0=0$ είναι σε επαφή με το δάπεδο.

Το κέντρο μάζας του τροχού για το δεδομένο σύστημα έχει χρονικές εξισώσεις $x_{cm} = v_{cm}t$ και $y_{cm} = R$ και η τροχιά που διαγράφει είναι ευθύγραμμη.

Η θέση του σημείου A της περιφέρειας του τροχού που την $t=0$ είναι σε επαφή με το δάπεδο και είναι στη θέση $(x,y) = (0,0)$ προσδιορίζεται από τις χρονικές εξισώσεις,

$$x_A = x_K - R\eta\mu(\omega t) \text{ ή } x_A = x_{cm} - R\eta\mu(\omega t) \text{ ή}$$

$$x_A = v_{cm}t - R\eta\mu(\omega t) \quad (1) \text{ και}$$

$$y_A = y_K - R\sigma\upsilon\nu(\omega t) \text{ ή } y_A = y_{cm} - R\sigma\upsilon\nu(\omega t)$$

$$\text{ή } y_A = R - R\sigma\upsilon\nu(\omega t) \quad (2).$$

$$\text{Επειδή } \omega = \frac{2\pi}{T} \text{ και } v_{cm} = \omega R \text{ ή } v_{cm} = \frac{2\pi}{T} R$$

οι ανωτέρω χρονικές εξισώσεις (1) και (2) για το σημείο A γράφονται,

$$x_A = \frac{2\pi R}{T}t - R\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad (3) \text{ και}$$

$$y_A = R - R\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad (4).$$

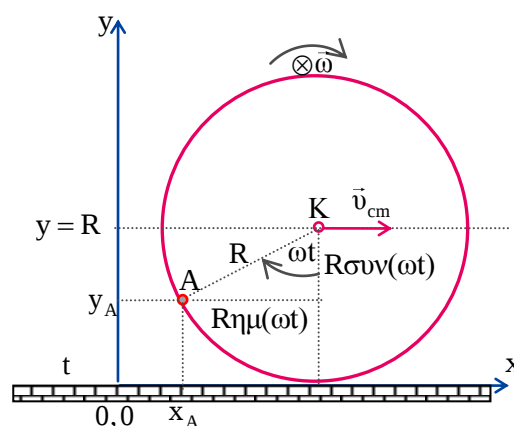
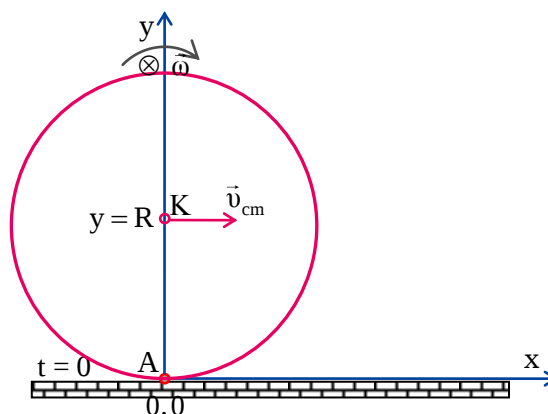
Η καμπύλη που διαγράφει το σημείο A έχει συντεταγμένες που δίνονται από τις εξισώσεις (3) και (4) ... και από τις εξισώσεις αυτές μπορούμε να βρούμε την εξίσωση τροχιάς που διαγράφει το σημείο A .

$$\left\{ \begin{array}{l} x_A = \frac{2\pi R}{T}t - R\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \\ y_A = R - R\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_A - \frac{2\pi R}{T}t = R\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \\ y_A - R = -R\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left(x_A - \frac{2\pi R}{T}t\right)^2 = R^2\eta\mu^2\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \\ (y_A - R)^2 = R^2\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \end{array} \right\}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε την εξίσωση τροχιάς του A που είναι

$$\left(x_A - \frac{2\pi R}{T}t\right)^2 + (y_A - R)^2 = R^2 \dots \text{ και ονομάζεται κυκλοειδής.}$$

Ας δούμε ποιές είναι οι συντεταγμένες του σημείου A για το ανωτέρω σύστημα αναφοράς σε συγκεκριμένες στιγμές μιας περιόδου...



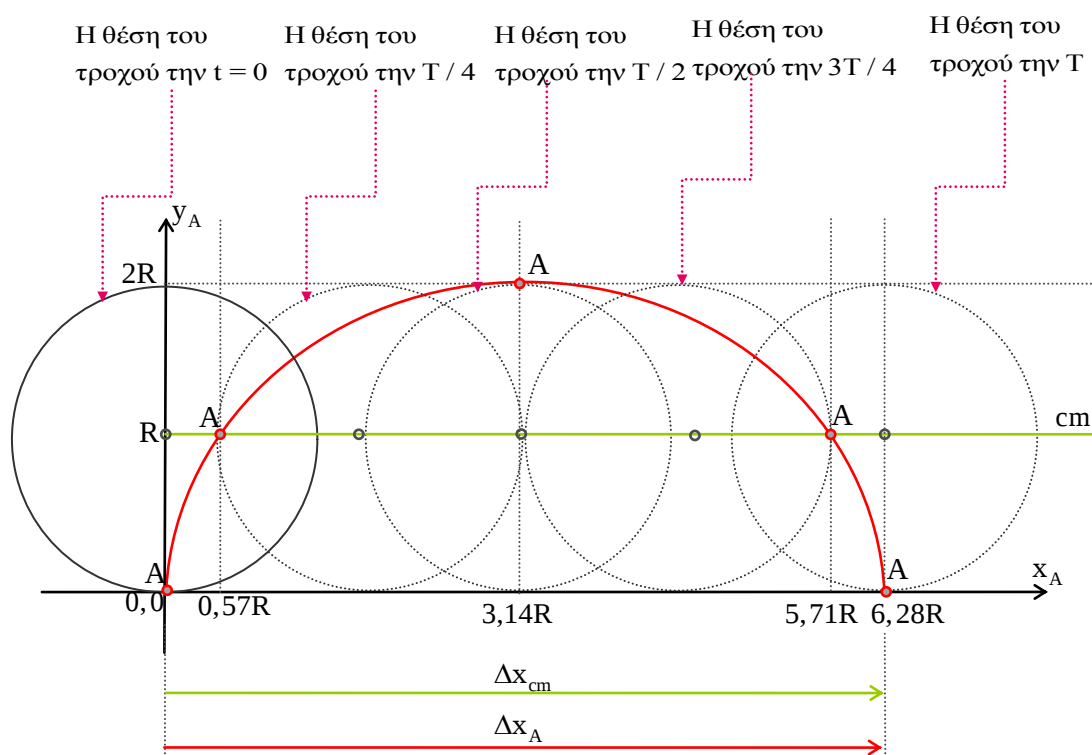
t	0	T/4	T/2	3T/4	T
x _A	0	0,57R	3,14R	5,71R	6,28R
y _A	0	R	2R	R	0

Όμοια οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας K του τροχού για το ανωτέρω σύστημα αναφοράς σε συγκεκριμένες στιγμές μιας περιόδου προσδιορίζονται από της εξισώσεις

$$x_{cm} = v_{cm}t = \frac{2\pi R}{T}t \text{ και } y_{cm} = R \text{ ...και είναι}$$

t	0	T/4	T/2	3T/4	T
x _{cm}	0	1,57R	3,14R	4,71R	6,28R
y _{cm}	0	R	2R	R	0

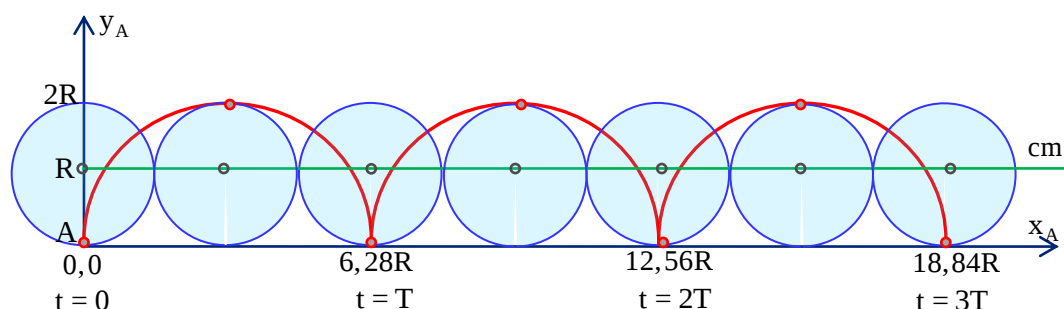
Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται, οι θέσεις του τροχού τις χρονικές στιγμές 0, T/4, T/2, 3T/4 και T, η τροχιά του σημείου A (**κόκκινη γραμμή**) και η τροχιά του κέντρου μάζας (**πράσινη γραμμή**)



Από το διάγραμμα παρατηρούμε:

- το κέντρο μάζας του τροχού κινείται ευθύγραμμα (**πράσινη γραμμή**) [εκτελεί μόνο μεταφορική κίνηση με σταθερή ταχύτητα $\vec{v}_{cm}$] ... και όταν τροχός διαγράφει μία στροφή (χρόνος T) η μετατόπισή του είναι $\Delta x_{cm} = 6,28R$.
- το σημείο A που την $t_0=0$ είναι σε επαφή με το δάπεδο διαγράφει κυκλοειδή τροχιά (**κόκκινη γραμμή**) [εκτελεί σύνθετη κίνηση ... μεταφορική κίνηση με σταθερή ταχύτητα $\vec{v}_{cm}$... και ομαλή κυκλική κίνηση με γραμμική ταχύτητα $v_{\gamma\pi} = \omega R = v_{cm}$] και όταν τροχός διαγράφει μία στροφή (χρόνος T) η μετατόπισή του είναι $\Delta x_A = 6,28R$, όσο και του κέντρου μάζας αλλά το μήκος του της τροχιάς που διέγραψε προφανώς είναι διαφορετικό.

Στη συνέχεια φαίνεται άλλο ένα διάγραμμα με τις θέσεις του τροχού (έξι στιγμιότυπα) στο χρονικό διάστημα $[0,3T]$, την τροχιά του σημείου A (**κόκκινη γραμμή**) και την τροχιά του κέντρου μάζας (**πράσινη γραμμή**).

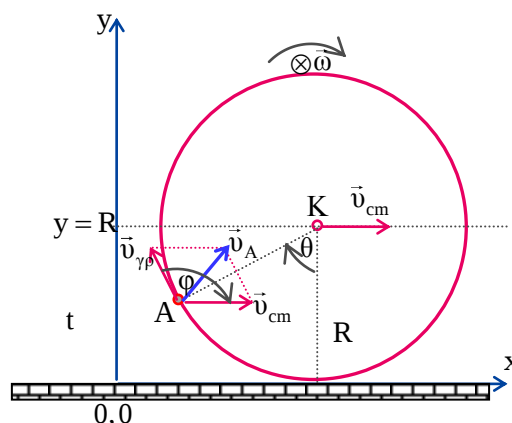


Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σημείου A.

Στο σχήμα φαίνεται- για το προηγούμενο σύστημα αναφοράς - η θέση του τροχού τη χρονική στιγμή t που η επιβατική ακτίνα R του σημείου A (που την $t=0$ ήταν σε επαφή με το δάπεδο ... θέση $0,0$) έχει διαγράψει γωνία $\theta=\omega t$. Θα υπολογίσουμε την χρονική εξίσωση της ταχύτητας με δύο τρόπους.

1ος τρόπος: «παραδοσιακός»....

Το σημείο A έχει δύο συνιστώσες της ταχύτητας την $\vec{v}_{cm}$ από τη μεταφορική κίνηση και την $v_{\gamma\theta} = \omega R$ εξαιτίας της στροφικής κίνησης ...και επειδή έχουμε κύλιση χωρίς ολίσθηση θα είναι $v_{\gamma\theta} = \omega R = v_{cm}$. Οι δύο αυτές συνιστώσες την τυχαία χρονική στιγμή t - όπως φαίνεται στο σχήμα - σχηματίζουν γωνία $\varphi = \pi - \theta$ και η ταχύτητα $\vec{v}_A$ του σημείου A υπολογίζεται από την σύνθεση των ανωτέρω επιμέρους ταχυτήτων $\vec{v}_A = \vec{v}_{\gamma\theta} + \vec{v}_{cm}$ ή $v_A^2 = v_{\gamma\theta}^2 + v_{cm}^2 + 2v_{\gamma\theta}v_{cm}\sin\varphi \xrightarrow[\varphi=\pi-\theta]{v_{\gamma\theta}=v_{cm}}$



$$v_A^2 = v_{cm}^2 + v_{cm}^2 + 2v_{cm}v_{cm}\sin(\pi - \theta) \quad \text{ή} \quad v_A^2 = 2v_{cm}^2(1 - \sin\theta) \xrightarrow[1-\sin\theta=2\eta\mu^2\frac{\theta}{2}]{\theta=\omega t} v_A^2 = 2v_{cm}^2 2\eta\mu^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\xrightarrow{\theta=\omega t} v_A^2 = 2v_{cm}^2 2\eta\mu^2 \left(\frac{\omega t}{2} \right) \quad \text{ή} \quad v_A = \left| 2v_{cm}\eta\mu \left(\frac{\omega t}{2} \right) \right| \quad \text{ή} \quad v_A = \left| 2v_{cm}\eta\mu \left(\frac{\pi}{T} t \right) \right|$$

2ος τρόπος: Με βάση το ανωτέρω σύστημα αναφοράς (x,y)

Από τις ανωτέρω χρονικές εξισώσεις για A ... $x_A = v_{cm}t - R\eta\mu(\omega t)$ $y_A = R - R\sigma\upsilon\nu(\omega t)$ με μια απλή χρονική παραγώγιση παίρνουμε τις συνιστώσες της ταχύτητας στους άξονες (x,y)...

$$v_{Ax} = \frac{dx}{dt} \quad \text{ή} \quad v_{Ax} = \frac{d(v_{cm}t - R\eta\mu(\omega t))}{dt} \quad \text{ή} \quad v_{Ax} = v_{cm} - \omega R\sigma\upsilon\nu(\omega t) \quad \text{ή} \quad v_{Ax} = v_{cm} - v_{cm}\sigma\upsilon\nu(\omega t)$$

$$v_{Ay} = \frac{dy}{dt} \quad \text{ή} \quad v_{Ay} = \frac{d(R - R\sigma\upsilon\nu(\omega t))}{dt} \quad \text{ή} \quad v_{Ay} = \omega R\eta\mu(\omega t) \quad \text{ή} \quad v_{Ay} = v_{cm}\eta\mu(\omega t)$$

Οι δύο αυτές συνιστώσες σε κάθε χρονική στιγμή t σχηματίζουν γωνία $\pi/2$ και η ταχύτητα $\vec{v}_A$ του σημείου A υπολογίζεται από την σύνθεση των ανωτέρω επιμέρους ταχυτήτων

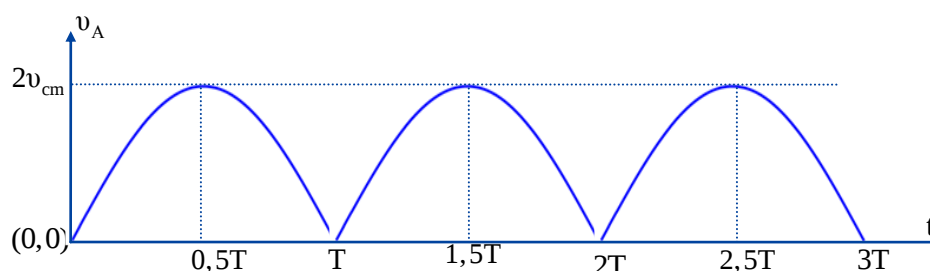
$$\vec{v}_A = \vec{v}_{Ax} + \vec{v}_{Ay} \quad \text{ή} \quad v_A^2 = v_{Ax}^2 + v_{Ay}^2 \quad \text{ή} \quad v_A^2 = (v_{cm} - v_{cm} \sin(\omega t))^2 + (v_{cm} \eta \mu(\omega t))^2 \quad \text{ή} \quad v_{cm}^2$$

$$v_A^2 = v_{cm}^2 + v_{cm}^2 \sin^2(\omega t) - 2v_{cm}^2 \sin(\omega t) + v_{cm}^2 \eta \mu^2(\omega t) \quad \text{ή} \quad v_A^2 = 2v_{cm}^2 - 2v_{cm}^2 \sin(\omega t) \quad \text{ή}$$

$$v_A^2 = 2v_{cm}^2 (1 - \sin(\omega t)) \quad \text{ή} \quad v_A^2 = 2v_{cm}^2 \left(2\eta \mu^2\left(\frac{\omega t}{2}\right) \right) \quad \text{ή} \quad v_A^2 = 4v_{cm}^2 \eta \mu^2\left(\frac{\omega t}{2}\right) \quad \text{ή}$$

$$v_A = \left| 2v_{cm} \eta \mu\left(\frac{\omega t}{2}\right) \right| \quad \text{ή} \quad v_A = \left| 2v_{cm} \eta \mu\left(\frac{\pi}{T} t\right) \right| \quad \dots \text{ και η χρονική γραφική παράσταση της}$$

ταχύτητας του A φαίνεται στο διάγραμμα του σχήματος....



... προσέχουμε ότι τις χρονικές στιγμές 0, T, 2T, 3T που το A είναι στο κατώτερο σημείο η ταχύτητά του είναι μηδέν $v_A = 0$ [οι επιμέρους ταχύτητες $\vec{v}_{cm}$ και $\vec{v}_{\gamma\rho}$ είναι αντίρροπες]

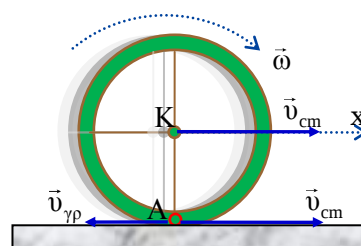
ενώ τις χρονικές στιγμές 0,5T - 1,5T - 2,5T που το A είναι στο ανώτερο σημείο η ταχύτητά του είναι $v_A = 2v_{cm}$ [οι επιμέρους ταχύτητες $\vec{v}_{cm}$ και $\vec{v}_{\gamma\rho}$ είναι ομόρροπες]

3. Κύλιση με ολίσθηση.

Στην περίπτωση που το σημείο του τροχού που είναι σε κάθε στιγμή σε επαφή με το ακίνητο δάπεδο έχει ταχύτητα διαφορετική του μηδενός, ο τροχός ολισθαίνει ως προς το δάπεδο και έτσι έχουμε κύλιση με ολίσθηση. Στην περίπτωση αυτή διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

α. Κύλιση με ολίσθηση «προς τα εμπρός».

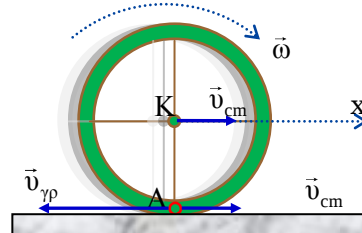
Φανταστείτε ένα αυτοκίνητο που κινείται κανονικά και «έπεσε» σε παγωμένο δρόμο ή σε περιοχή που έχουν χυθεί λιπαντικά και λάδια. Το αυτοκίνητο ολισθαίνει και η μεταφορική κίνηση είναι πολύ πιο γρήγορη από την στροφική. Η ταχύτητα μεταφοράς $\vec{v}_{cm}$ είναι μεγαλύτερη της γραμμικής ταχύτητας της περιφέρειας $v_{\gamma\rho} = \omega R$. Επειδή $v_{cm} > \omega R$ το σημείο του τροχού που έρχεται σε επαφή με το δάπεδο έχει ταχύτητα $v_A = v_{cm} - \omega R > 0$ και ομόρροπη της $\vec{v}_{cm}$.



$$v_{cm} > v_{\gamma\rho} \\ v_A = v_{cm} - \omega R > 0$$

β. Κύλιση με ολίσθηση «προς τα πίσω».

Φανταστείτε ένα αυτοκίνητο που ξεκινάει από την ηρεμία ενώ είναι πάνω με μια περιοχή με πάγο. Οι τροχοί του αυτοκινήτου περιστρέφονται πολύ πιο γρήγορα από την αντίστοιχη μεταφορική κίνηση. Η ταχύτητα μεταφοράς $\vec{v}_{cm}$ είναι μικρότερη της γραμμικής

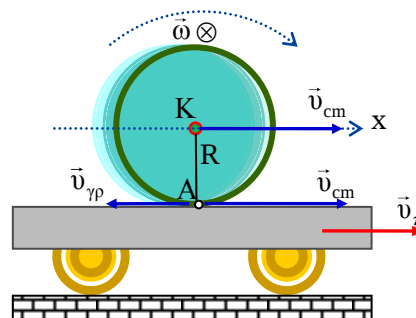


$$v_{cm} < v_{\gamma\rho} \\ v_A = v_{cm} - \omega R < 0$$

ταχύτητας της περιφέρειας $v_{\gamma\rho} = \omega R$. Επειδή $v_{cm} < \omega R$ το σημείο του τροχού που έρχεται σε επαφή με το δάπεδο έχει ταχύτητα $v_A = v_{cm} - \omega R < 0$ δηλαδή έχει μέτρο $v_A = \omega R - v_{cm}$ και φορά αντίρροπη της $\vec{v}_{cm}$ (μπορεί να χαρακτηρίζεται κύλιση με ολίσθηση προς τα πίσω...αυτό δεν σημαίνει και κίνηση του αυτοκινήτου προς τα πίσω...).

4. Κύλιση χωρίς ολίσθηση πάνω σε κινούμενη πλατφόρμα.

Στο σχήμα φαίνεται ένας δίσκος που κυλιέται πάνω σε κινούμενη πλατφόρμα η οποία μεταφέρεται με ταχύτητα $\vec{v}_\pi$. Το σημείο του δίσκου που έρχεται σε επαφή με την πλατφόρμα έχει ταχύτητα $v_A = v_{cm} - v_{\gamma\rho}$ ή $v_A = v_{cm} - \omega R$. Εδώ για να κυλιέται ο δίσκος χωρίς ολίσθηση πάνω στη μεταφερόμενη πλατφόρμα πρέπει η ταχύτητα $\vec{v}_A$ του κατώτερου σημείου του δίσκου να ισούται με την ταχύτητα $\vec{v}_\pi$ της πλατφόρμας, $v_A = v_\pi$ ή $v_{cm} - \omega R = v_\pi$.



5. Εφαρμογή: Η «παράξενη» κύλιση ενός καρουλιού με τον κύλινδρό του.

Το καρούλι είναι μια ενιαία διάταξη που αποτελείται από έναν κύλινδρο ακτίνας r και δύο ομόκεντρους δίσκους - τροχούς ακτίνων $R > r$ και η κύλιση προφανώς γίνεται με τους κυλίνδρους σε επαφή με το δάπεδο (όπως στο 1ο σχήμα).

Έστω τώρα ένα καρούλι με ακτίνες τροχών και κυλίνδρου R και r με $R=2r$ που κυλιέται (ανορθόδοξα) με τον κύλινδρο πάνω σε ένα κράσπεδο. Στην κύλιση αυτή σε επαφή με το κράσπεδο είναι μόνο ο κύλινδρος και οι τροχοί στρέφονται μαζί με το κύλινδρο (το καρούλι είναι ενιαίο σώμα) χωρίς να έχουν καμία επαφή με το κράσπεδο (όπως στο 2ο σχήμα ή στο 3ο σχήμα που δείχνει την κύλιση σε τομή). Αν ο άξονας του καρουλιού έχει ταχύτητα μεταφοράς $v_{cm} = 10 \text{ m/s}$,

A. η ταχύτητα ενός σημείου B της περιφέρειας των τροχών όταν βρίσκεται στο ανώτερο σημείο έχει αλγεβρική τιμή ταχύτητας

- A.1)** $v_B = -15 \text{ m/s}$ **A.2)** $v_B = 20 \text{ m/s}$
A.3) $v_B = 30 \text{ m/s}$ **A.4)** $v_B = -20 \text{ m/s}$

B. η ταχύτητα ενός σημείου A της περιφέρειας του τροχών όταν βρίσκεται στο κατώτερο σημείο έχει αλγεβρική τιμή ταχύτητας

- B.1)** $v_B = -5 \text{ m/s}$ **B.2)** $v_B = -10 \text{ m/s}$
B.3) $v_B = 10 \text{ m/s}$ **B.4)** $v_B = 0$

Σε κάθε περίπτωση επιλέξτε με δικαιολόγηση τη σωστή πρόταση.

