

Η κύλιση σφαίρας σε κατακόρυφη κυκλική στεφάνη

Μια ομογενής μικρή σφαίρα έχει μάζα m ακτίνας r και ροπή αδράνειας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της $I = \frac{2}{5}mr^2$. Η σφαίρα κυλιέται χωρίς ολίσθηση σε οριζόντιο και εισέρχεται χωρίς φαινόμενο κρούσης σε κατακόρυφη κυκλική στεφάνη ακτίνας R έχοντας ταχύτητα του κέντρου μάζας $\vec{v}_0$.

A. Μελέτη της κύλισης στη στεφάνη.

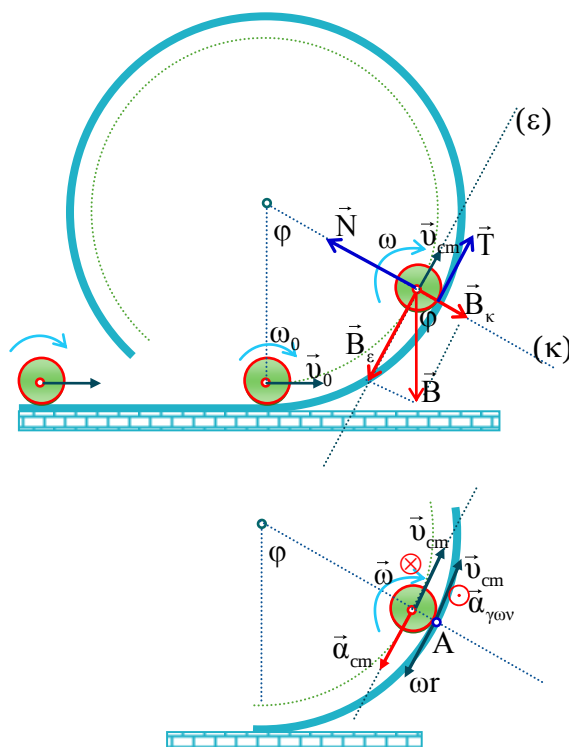
Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η σφαίρα σε μιά τυχαία θέση να ανέρχεται στη στεφάνη.

A.1 Η φορά περιστροφής της σφαίρας και η σχέση των επιταχύνσεων.

Αφού η σφαίρα κυλιέται χωρίς ολίσθηση πρέπει η ταχύτητα του σημείου επαφής A της σφαίρας με τη στεφάνη να είναι μηδενική. Το σημείο αυτό έχει την ταχύτητα της μεταφορικής κίνησης $\vec{v}_{cm}$ και την γραμμική ταχύτητα εξαιτίας της στροφικής κίνησης $\vec{v}_{gp} = \vec{\omega}r$. Για να είναι $v_A = 0$ η γραμμική ταχύτητα του σημείου επαφής της επιφάνειας της σφαίρας $\vec{v}_{gp} = \vec{\omega}r$ να είναι αντίθετη της $\vec{v}_{cm}$ και αυτό προϋποθέτει :

- ✚ αυτοπεριστροφή της σφαίρας κατά την ωρολογιακή φορά περιστροφής ,
- ✚ $\vec{v}_{cm} = -\vec{v}_{gp(A)}$ ή $v_{cm} = \omega r$, από όπου με

$$\text{μια απλή χρονική παραγώγιση παίρνουμε } \frac{dv_{cm}}{dt} = \frac{d(\omega r)}{dt} \text{ ή } \frac{dv_{cm}}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} \text{ ή } a_{cm} = r\alpha_{γων}$$



A.2 Η φορά της στατικής τριβής.

Στην ανωτέρω τυχαία θέση τοποθετούμε τις ασκούμενες στη σφαίρα δυνάμεις , που είναι:

- * η δύναμη του βάρους $\vec{B}$ που αναλύεται σε δύο συνιστώσες στην ακτινική συνιστώσα $\vec{B}_κ$ με $B_κ = mg \sin \varphi$ στην εφαπτομενική συνιστώσα $\vec{B}_ε$ με $B_ε = mg \cos \varphi$,
- * η δύναμη στήριξης $\vec{N}$ που έχει ακτινική κατεύθυνση ως κάθετη στην επιφάνεια επαφής (που είναι εφαπτομενική της τροχιάς),
- * η δύναμη της στατικής τριβής $\vec{T}$... της οποίας αναζητούμε την κατεύθυνση.

Η μεταφορική - κυκλική κίνηση του κέντρου μάζας της σφαίρας κατά την άνοδο είναι επιβραδυνόμενη ... το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας της σφαίρας μειώνεται . Αυτό μπορεί να φανεί εύκολα ενεργειακά από το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας

$\Delta K = W_B + W_N + W_T$ με $W_B < 0$, $W_N = 0$ (η δύναμη είναι ακτινική και σε κάθε στιγμή είναι κάθετη στην μετατόπιση) και $W_T = 0$ (η στατική τριβή στη κύλιση χωρίς ολισθηση δεν έχει έργο ...γιατι;) ...άρα $\Delta K < 0$.

Από την σχέση $v_{cm} = \omega r$ φαίνεται ότι v και ω είναι ανάλογα άρα αν η v μειώνεται το ίδιο συμβαίνει και με την ω . Για να γίνεται όμως αυτό πρέπει να υπάρχει γωνιακή επιτάχυνση αντίρροπη της ω ... και αυτή δημιουργείται μόνο από την ροπή της τριβής (οι δύο άλλες δυνάμεις δεν έχουν ροπή ως προς τον άξονα αυτοπεριστροφής). Άρα η ροπή της τριβής $\vec{\tau}_T$ πρέπει να έχει τάση περιστροφής αντιωρολογιακή ώστε η $\vec{\tau}_T$ να είναι αντίρροπη της γωνιακής ταχύτητας αυτοπεριστροφής $\vec{\omega}$...και για να γίνεται αυτό η στατική τριβή έχει την φορά που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

A.3 Υπολογισμός των επιταχύνσεων α_{cm} , $\alpha_{γων}$ και της στατικής τριβής .

Εφαρμόζουμε τον νόμο Newton για τον εφαπτομενικό άξονα (με θετικά προς την φορά της μεταφορικής - κυκλικής κίνησης του κέντρου μάζας) και την στροφική κίνηση (με τα θετικά προς την φορά αυτοπεριστροφής της σφαίρας).

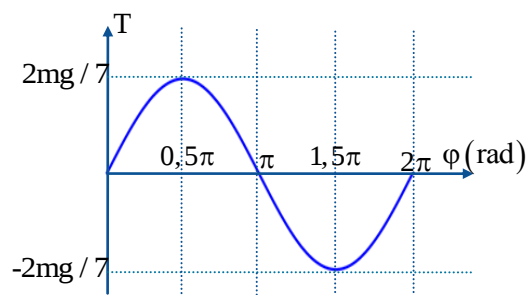
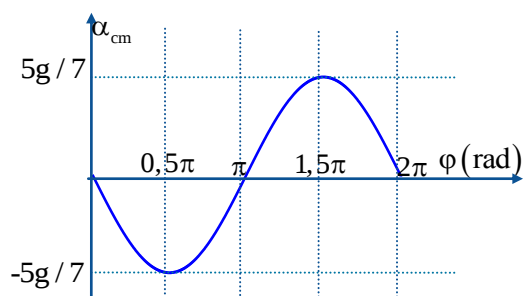
$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}_{cm} \text{ ή } T - mg\eta\mu\phi = m\alpha_{cm} \quad (1).$$

$$\Sigma \tau = I\alpha_{γων} \xrightarrow{\alpha_{cm} = r\alpha_{γων}} \text{ ή } -Tr = \frac{2}{5}mr^2 \frac{\alpha_{cm}}{r} \text{ ή } -T = \frac{2}{5}m\alpha_{cm} \quad (2) . \text{ Με πρόσθεση των (1) και (2)}$$

$$\text{παίρνουμε... } -mg\eta\mu\phi = \frac{7}{5}m\alpha_{cm} \text{ ή } \alpha_{cm} = -\frac{5}{7}g\eta\mu\phi \quad (3) , \alpha_{γων} = -\frac{5}{7}\frac{g}{r}\eta\mu\phi \quad (4) \text{ και από την (2)}$$

$$\text{βρίσκουμε την αλγεβρική τιμή της στατικής τριβής } T = -\frac{2}{5}m\alpha_{cm} \text{ ή } T = -\frac{2}{5}m\left(-\frac{5}{7}g\eta\mu\phi\right) \text{ ή}$$

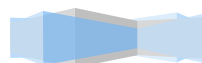
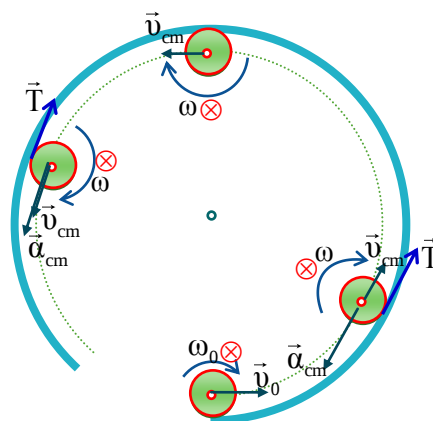
$$T = \frac{2}{7}mg\eta\mu\phi \quad (5)$$



Από το διάγραμμα της επιτάχυνσης (και με βάση ότι τα θετικά είναι προς την φορά της κίνησης) στην άνοδο $0 < \phi < \pi$ έχουμε $\alpha_{cm} < 0$ και $v_{cm}\alpha_{cm} < 0$ η κίνηση είναι επιβραδυνόμενη, ενώ κατά την κάθοδο $\pi < \phi < 2\pi$ έχουμε $\alpha_{cm} > 0$ και $v_{cm}\alpha_{cm} > 0$ η κίνηση είναι επιταχυνόμενη.

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται :

☞ η κατεύθυνση της $\vec{a}_{cm}$ που στην άνοδο είναι αντίρροπη της $\vec{v}_{cm}$ και στην κάθοδο ομόρροπη αυτής,



☞ αλλά και η κατεύθυνση της στατικής τριβής που στην άνοδο έχει ροπή που αντιτίθεται στη αυτοπεριστροφική κίνηση ενώ στην κάθοδο η ροπή της ευνοεί την αυτοπεριστροφή της σφαίρας.

B. Μέχρι που θα φθάσει η σφαίρα και θα είναι σε επαφή με την στεφάνη.

Η σφαίρα θα φθάσει - κάνοντας κυκλική κίνηση χωρίς ολίσθηση- και θα είναι σε επαφή με την στεφάνη μέχρι τη θέση που θα μηδενισθεί η ταχύτητα του κέντρου μάζας $\vec{v}_{cm}$ ή η δύναμη στήριξης $\vec{N}$ και η σφαίρα χάνει την επαφή της με την στεφάνη.

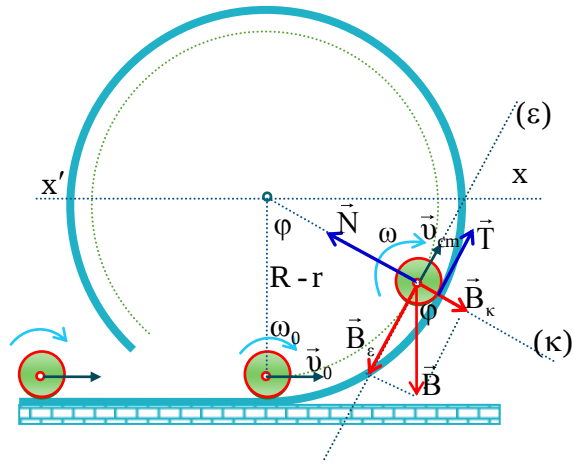
B.1) 1η περίπτωση:

Έστω ότι η σφαίρα δεν έχει ικανή ενέργεια να περάσει πάνω από την $x'x$ δηλαδή θα είναι σε εκτροπή $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$. Το κέντρο μάζας της

σφαίρας γράφει κυκλική κίνηση (μεταφορική κίνηση) ακτίνας $R-r$ και η συνισταμένη δύναμη στον ακτινικό άξονα αυτής της κίνησης έχει κεντρομόλο ρόλο ... $\Sigma \vec{F}_k = m\vec{a}_k$ ή $N - mg\sin\varphi = m \frac{v_{cm}^2}{R-r}$ ή $N = mg\sin\varphi + m \frac{v_{cm}^2}{R-r}$.

Από τη σχέση αυτή παρατηρούμε ότι για $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$ που $0 < \sin\varphi \leq 1$ ακόμη και αν $v = 0$ η δύναμη στήριξης $\vec{N}$ δεν μηδενίζεται ποτέ και η σφαίρα είναι συνεχώς σε επαφή με το ημισφαίριο.

📌 Άρα αν η σφαίρα έχει ενέργεια μόνο για εκτροπή $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$ (δηλαδή δεν περνάει την $x'x$) θα φθάσει μέχρι τη θέση που θα μηδενισθεί η ταχύτητα του κέντρου μάζας της $v_{cm}=0$ (όπως και η γωνιακή ταχύτητα ω αυτοπεριστροφής).



B.2) 2η περίπτωση:

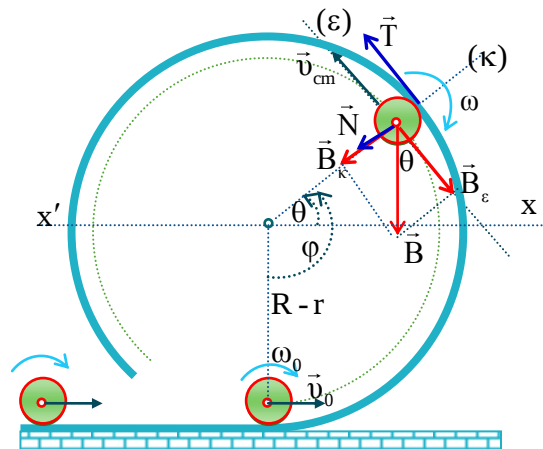
Έστω ότι η σφαίρα έχει ικανή ενέργεια να περάσει πάνω από την $x'x$ χωρίς να μπορεί να κάνει ανακυκλωση, δηλαδή θα είναι σε εκτροπή $0 < \varphi < \pi$ ή $0,5\pi < \theta < \pi$.

Η συνισταμένη δύναμη στον ακτινικό άξονα αυτής της κίνησης έχει κεντρομόλο ρόλο ...

$$\Sigma \vec{F}_k = m\vec{a}_k \text{ ή } N + mg\eta\mu\theta = m \frac{v_{cm}^2}{R-r} \text{ ή}$$

$$N = m \frac{v_{cm}^2}{R-r} - mg\eta\mu\theta.$$

Από τη σχέση αυτή παρατηρούμε ότι αν $N=0$, δηλαδή τη στιγμή που χάνεται η επαφή της σφαίρας με την στεφάνη η σφαίρα έχει ακόμη ταχύτητα $v_{cm} = \sqrt{g(R-r)\eta\mu\theta} \neq 0$...που



σημαίνει χάνεται μεν η επαφή με την στεφάνη και το κέντρο μάζας της σφαίρας δεν κάνει κυκλική κίνησηαλλά λόγω της ταχύτητας η σφαίρα συνεχίζει να ανέρχεται με το κέντρο της να διαγράφει πλάγια βολή.

📌 Άρα αν η σφαίρα έχει ενέργεια ικανή ενέργεια για εκτροπή $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ (δηλαδή περνάει την x'x χωρίς να κάνει ανακύκλωση), το cm της θα κάνει κυκλική κίνηση και η σφαίρα θα είναι σε επαφή με την στεφάνη με τη μέχρι τη θέση που θα μηδενισθεί η δύναμη στήριξης $\vec{N}$.

Σχόλιο: Από την ανωτέρω σχέση $N = m \frac{v_{cm}^2}{R-r} - mg \mu \theta$ για $\theta=0$, δηλαδή αν η σφαίρα απο την αρχή εκτραπεί κατά $\varphi=\pi/2$ rad αν $v_{cm}=0$ τότε και $N=0$.

Γ. Η συνολική κινητική ενέργεια της σφαίρας .

Η κινητική ενέργεια της σφαίρας είναι λόγω μεταφοράς και λόγω της αυτοπεριστροφής της

$$K = K_{μετ} + K_{στρο} \text{ ή } K = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega_2^2 \text{ ή}$$

$$K = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} \frac{2}{5} m r^2 \left(\frac{v_{cm}}{r} \right)^2 \text{ ή}$$

$$K = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{5} m v_{cm}^2 \text{ ή } K = \frac{7}{10} m v_{cm}^2 .$$

Η σχέση της

$$K_0 = \frac{7}{10} m v_0^2 \text{ υπολογίζεται απο το θεώρημα}$$

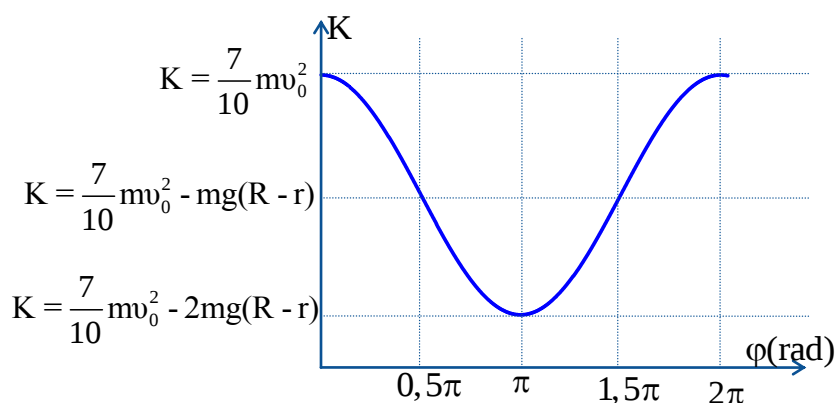
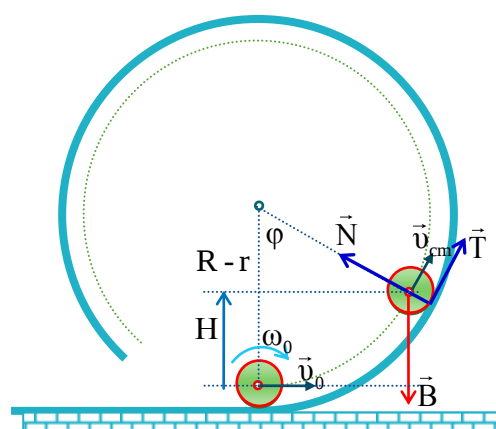
μεταβολής της κινητικής ενέργειας που για το σχήμα έχουμε

$$K - K_0 = W_B + W_N + W_T \xrightarrow{W_N=0, W_T=0} K - K_0 = -mgH \xrightarrow{H=(R-r)(1-\sin\varphi)} \rightarrow$$

$$K - \frac{7}{10} m v_0^2 = -mg(R-r)(1-\sin\varphi) \text{ ή } K = \frac{7}{10} m v_0^2 - mg(R-r)(1-\sin\varphi) \text{ ή}$$

$$K = \frac{7}{10} m v_0^2 - mg(R-r) + mg(R-r)\sin\varphi .$$

Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται πως μεταβάλλεται η κινητική ενέργεια της σφαίρας με την γωνιακή απόκλιση φ της επιβατικής ακτίνας του κέντρου της σφαίρας.



Δ. Η συνθήκη ανακύκλωσης της σφαίρας .

Για να γίνει η ανακύκλωση πρέπει το σώμα να φθάσει στην ανώτερη θέση και να είναι και σε επαφή με την στεφάνη. Για την ανώτερη θέση, γράφουμε τον 2ο νόμο Newton στον ακτινικό άξονα όπου η συνισταμένη δύναμη έχει κεντρομόλο ρόλο

$$\Sigma \vec{F}_k = m\vec{a}_k \quad \text{ή} \quad N + mg = m \frac{v_{cm}^2}{R-r}$$

$$N = m \frac{v_{cm}^2}{R-r} - mg . \quad \text{Για να υπάρχει επαφή με την}$$

$$\text{στεφάνη πρέπει } N > 0 \quad \text{ή} \quad N = m \frac{v_{cm}^2}{R-r} - mg > 0 \quad \text{ή}$$

$$v_{cm} > \sqrt{g(R-r)} \quad \text{και επειδή είμαστε στην ανώτερη}$$

θέση ακόμη και $N=0$ να γίνει στιγμιαία δηλαδή ακόμη και να είναι $v_{cm} = \sqrt{g(R-r)}$ η σφαίρα «πέρασε» και είναι και πάλι σε επαφή με την στεφάνη.

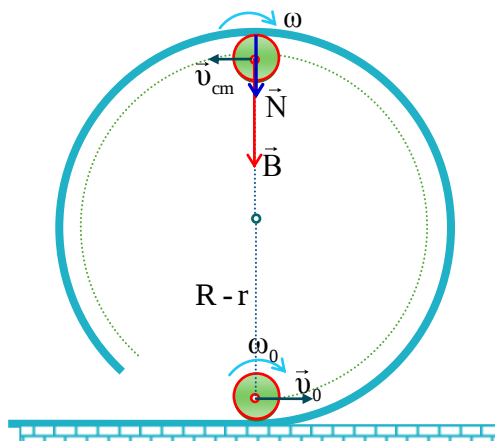
👉 **Αρα για να γίνει ανακύκλωσης το σώμα όχι μόνο πρέπει να φθάσει στο ανώτερο σημείο αλλά να έχει και ταχύτητα $v_{cm} \geq \sqrt{g(R-r)}$ ή $v_{cm,min} = \sqrt{g(R-r)}$.**

Από δε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας μεταξύ της αρχικής και της ανώτερης θέσης μπορούμε να βρούμε την αρχική ταχύτητα v_0 για να γίνει η ανακύκλωση...

$$K - K_0 = W_B + W_N + W_T \xrightarrow{W_N=0, W_T=0} \frac{7}{10} m v_{cm}^2 - \frac{7}{10} m v_0^2 = -mg2(R-r) \quad \text{ή}$$

$$v_{cm}^2 = v_0^2 - \frac{20}{7} g(R-r) \quad \text{ή} \quad v_{cm}^2 = v_0^2 - \frac{20}{7} g(R-r) \geq \left(\sqrt{g(R-r)} \right)^2 \quad \text{ή} \quad v_0 \geq \sqrt{\frac{27}{7} g(R-r)}$$

👉 **Αρα η απαραίτητη ταχύτητα του cm στο κατώτερο σημείο για να γίνει ανακύκλωση είναι $v_0 \geq \sqrt{\frac{27}{7} g(R-r)}$.**



Ε. Για ποια αρχική ταχύτητα η σφαίρα φθάνει μέχρι $\varphi = \pi/2$..

Για την θέση ($\varphi = \pi/2$) που θέλουμε να φθάσει το σώμα, γράφουμε τον 2ο νόμο Newton στον ακτινικό άξονα όπου η συνισταμένη δύναμη έχει

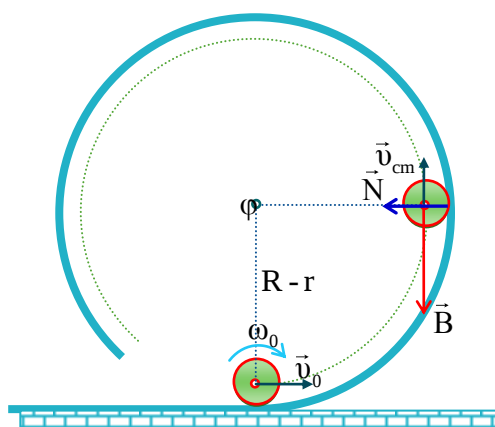
$$\text{κεντρομόλο ρόλο } \Sigma \vec{F}_k = m\vec{a}_k \quad \text{ή} \quad N = m \frac{v_{cm}^2}{R-r}$$

Από εδώ φαίνεται ότι $N=0$ και $v_{cm}=0$ ταυτόχρονα. Αρα για να φθάσει το σώμα μέχρι την θέση αυτή πρέπει εκεί να μηδενισθεί η ταχύτητά του.

Από δε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας μεταξύ της αρχικής και της θέσης αυτής μπορούμε να βρούμε την απαραίτητη αρχική ταχύτητα v_0 .

$$K - K_0 = W_B + W_N + W_T \xrightarrow{W_N=0, W_T=0}$$

$$0 - \frac{7}{10} m v_0^2 = -mg(R-r) \quad \text{ή} \quad v_0^2 = \frac{10}{7} g(R-r) \quad \text{ή} \quad v_0 = \sqrt{\frac{10}{7} g(R-r)}$$



Στ. Βασικά συμπεράσματα για το που θα φθάσει η σφαίρα και θα είναι σε επαφή με την στεφάνη.

1. Αν η αρχική ταχύτητα του κέντρου μάζας της σφαίρας είναι $v_0 < \sqrt{\frac{10}{7}g(R-r)}$ η σφαίρα φθάνει σε γωνιακή εκτροπή $\varphi < \pi/2$ rad και η απαραίτητη συνθήκη για την τελική θέση είναι $v_{cm}=0$.
2. Αν η αρχική ταχύτητα του κέντρου μάζας της σφαίρας είναι $v_0 = \sqrt{\frac{10}{7}g(R-r)}$ η σφαίρα φθάνει σε γωνιακή εκτροπή $\varphi = \pi/2$ rad και η απαραίτητη συνθήκη για την τελική θέση είναι $v_{cm}=0$ ή και $N=0$.
3. Αν η ταχύτητα στο ανώτερο σημείο είναι $v_{cm} > \sqrt{g(R-r)}$ ή η αρχική ταχύτητα του κέντρου μάζας της σφαίρας είναι $v_0 \geq \sqrt{\frac{27}{7}g(R-r)}$ η σφαίρα κάνει ανακύκλωση.
4. Αν η αρχική ταχύτητα του κέντρου μάζας της σφαίρας είναι $\sqrt{\frac{10}{7}g(R-r)} < v_0 < \sqrt{\frac{27}{7}g(R-r)}$ η σφαίρα φθάνει σε γωνιακή εκτροπή $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ rad και η απαραίτητη συνθήκη για την τελική θέση είναι $N=0$.

Ζ. Εφαρμογή: Για ποιά αρχική ταχύτητα του cm της σφαίρας αυτή θα έχει μέγιστη γωνιακή εκτροπή κατά $\varphi=60^\circ$.

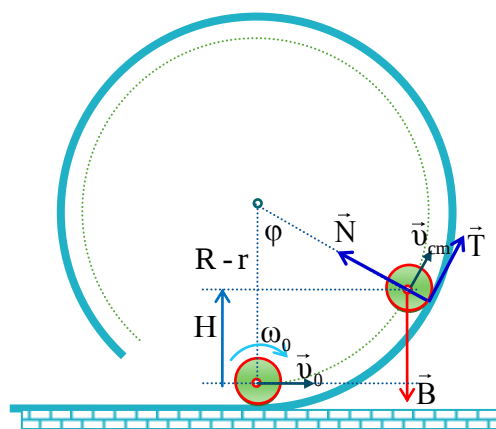
Αφού η σφαίρα θα έχει γωνιακή εκτροπή $\varphi < \pi/2$ rad η απαραίτητη συνθήκη για την τελική θέση είναι $v_{cm}=0$. Από δε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας μεταξύ της αρχικής και της θέσης αυτής μπορούμε να βρούμε την απαραίτητη αρχική ταχύτητα v_0 .

$$K - K_0 = W_B + W_N + W_T \quad \xrightarrow{W_N=0, W_T=0}$$

$$0 - \frac{7}{10}mv_0^2 = -mgH \quad \text{ή}$$

$$v_0^2 = \frac{10}{7}g[(R-r) - (R-r)\sin\varphi] \quad \xrightarrow{\varphi=60^\circ} \quad \text{ή}$$

$$v_0^2 = \frac{10}{7}g\left[(R-r) - (R-r)\frac{1}{2}\right] \quad \text{ή} \quad v_0 = \sqrt{\frac{5}{7}g(R-r)}$$

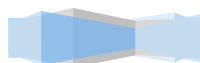


Η. Εφαρμογή: Για ποιά αρχική ταχύτητα του cm της σφαίρας αυτή θα έχει μέγιστη γωνιακή εκτροπή κατά $\varphi=120^\circ$ με τη σφαίρα σε επαφή με τη στεφάνη.

Αφού η σφαίρα θα έχει γωνιακή εκτροπή $\pi/2 < \varphi < \pi$ η απαραίτητη συνθήκη για την τελική θέση είναι ο μηδενισμός της δύναμης στήριξης $N=0$. Η συνισταμένη δύναμη στον ακτινικό

άξονα αυτής της κίνησης έχει κεντρομόλο ρόλο ... $\Sigma \vec{F}_k = m\vec{a}_k$ ή $N + mg\eta\mu\theta = m \frac{v_{cm}^2}{R-r}$ ή

$N = m \frac{v_{cm}^2}{R-r} - mg\eta\mu\theta$ με $\theta=30^\circ$. Από τη σχέση αυτή παρατηρούμε ότι αν $N=0$, δηλαδή τη



στιγμή που χάνεται η επαφή της σφαίρας με την στεφάνη η σφαίρα έχει ακόμη ταχύτητα

$$v_{cm} = \sqrt{g(R-r)\eta\mu\theta} \neq 0$$

$$\xrightarrow{\eta\mu\theta=\eta\mu 30^\circ=0,5} v_{cm} = \sqrt{0,5g(R-r)}$$

(1) . Από δε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας μεταξύ της αρχικής και της θέσης αυτής μπορούμε να βρούμε την απαραίτητη αρχική ταχύτητα v_0 .

$$K - K_0 = W_B + W_N + W_T$$

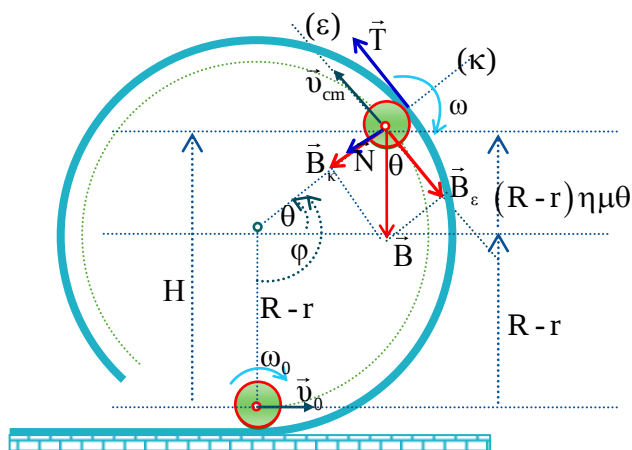
$$\xrightarrow{W_N=0, W_T=0}$$

$$\frac{7}{10}mv_{cm}^2 - \frac{7}{10}mv_0^2 = -mgH \text{ και επειδή από το σχήμα } H=(R-r) + (R-r)\eta\mu\theta \text{ ή } H=(R-r) + (R-r)$$

$$\eta\mu 30^\circ \text{ ή } H=(R-r) + (R-r) 0,5 \text{ ή } H=1,5(R-r) \dots \frac{7}{10}mv_{cm}^2 - \frac{7}{10}mv_0^2 = -mg \cdot 1,5(R-r) \text{ ή}$$

$$v_{cm}^2 - v_0^2 = -\frac{15}{7}g(R-r) \xrightarrow{(1)} 0,5g(R-r) - v_0^2 = -\frac{15}{7}g(R-r) \text{ ή } \frac{g(R-r)}{2} - v_0^2 = -\frac{15}{7}g(R-r) \text{ ή}$$

$$7g(R-r) - 14v_0^2 = -30g(R-r) \text{ ή } v_0 = \sqrt{\frac{37g(R-r)}{14}}$$



Θ. Εφαρμογή: Στη περίπτωση Η μέχρι ποιό ύψος θα φθάσει η σφαίρα ...

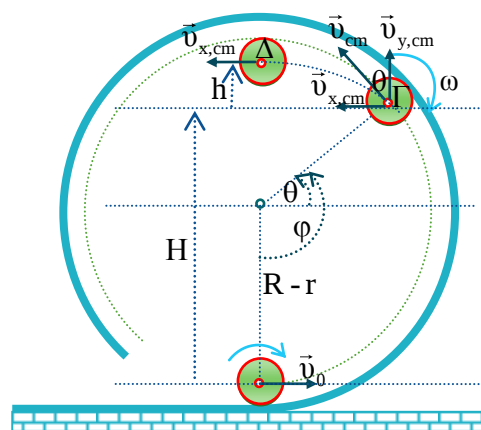
Στο προηγούμενο πρόβλημα η σφαίρα χάνει την επαφή με την στεφάνη σε ύψος $H=1,5(R+r)$, σε γωνιακή εκτροπή $\varphi=120^\circ$ ή $\theta=30^\circ$ και εκείνη τη στιγμή το κέντρο μάζας της έχει ταχύτητα $v_{cm} = \sqrt{0,5g(R-r)}$. Από τη θέση αυτή και μετά το κέντρο μάζας της σφαίρας γράφει πλάγια βολή και ταυτόχρονα η σφαίρα αυτοπεριστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα που είχε τη στιγμή που έχασε την

επαφή , ήτοι $\omega = \frac{\sqrt{0,5g(R-r)}}{r}$. Αν αναλύσουμε

την ταχύτητα $\vec{v}_{cm}$ της στιγμή που χάνεται η

επαφή σε δυο συνιστώσες μια οριζόντια $\vec{v}_{x,cm}$ και μια κατακόρυφη $\vec{v}_{y,cm}$ και μελετηθεί η

κίνηση σε οριζόντιο και κατακόρυφο άξονα, η κίνηση στον οριζόντιο άξονα είναι ομαλή και στον κατακόρυφο (κατά την άνοδο) επιβραδυνόμενη. Η σφαίρα ανέρχεται μέχρι το ανώτερο σημείο Δ που είναι πίο ψηλά κατά h και εκεί το κέντρο μάζας της έχει $v_{y,cm} = 0$. Με το θεώρημα μεταβολής της κινητικής του ενέργειας από το Γ μέχρι το Δ βρίσκουμε το ύψος h.



$$K_\Delta - K_\Gamma = W_B \Rightarrow \left[\frac{1}{2}mv_{x,cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \right] - \left[\frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \right] = -mgh \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv_{x,cm}^2 - \frac{1}{2}m(v_{x,cm}^2 + v_{y,cm}^2) = -mgh \quad \text{ή} \quad h = \frac{v_{y,cm}^2}{2g} \quad \text{ή} \quad h = \frac{v_{cm}^2 \sin^2 \theta}{2g} \quad \text{ή} \quad h = \frac{v_{cm}^2 \sin^2 30^\circ}{2g} \quad \text{ή}$$

$$h = \frac{\left(\sqrt{0,5g(R-r)}\right)^2 \cdot 3/4}{2g} \dots \text{ή} \dots h = 0,1875(R-r). \quad \text{Άρα το κέντρο μάζας της σφαίρας}$$

$$\text{ανήλθε από την αρχική θέση κατά} \quad H' = H + h \xrightarrow[h=0,1875(R-r)]{H=1,5(R-r)} H' = 1,6875(R-r).$$

Θ. Πρόβλημα

Μια σφαίρα μάζας $m=1,12\text{Kg}$ και ακτίνας $r=0,02\text{m}$ κυλίεται χωρίς ολίσθηση σε οριζόντιο δάπεδο και εισέρχεται σε κατακόρυφη κυκλική στεφάνη ακτίνας $R=1,14\text{m}$ έχοντας ταχύτητα του κέντρου μάζας $v_0=5\text{m/s}$.

Όταν η επιβατική ακτίνα της στεφάνης που ακολουθεί το κέντρο μάζας της σφαίρας διαγράφει γωνία $\varphi = 0,5\pi \text{ rad}$, να υπολογίσετε:

α. την ταχύτητα $\vec{v}_{cm}$ του κέντρου μάζας της σφαίρας και την γωνιακή ταχύτητα ω αυτοπεριστροφής της σφαίρας,

β. την δύναμη στήριξης $\vec{N}$ και τη δύναμη της τριβής $\vec{T}$ που ασκεί η στεφάνη στη σφαίρα,

γ. την κινητική ενέργεια της σφαίρας,

δ. την στροφορμή της σφαίρας,

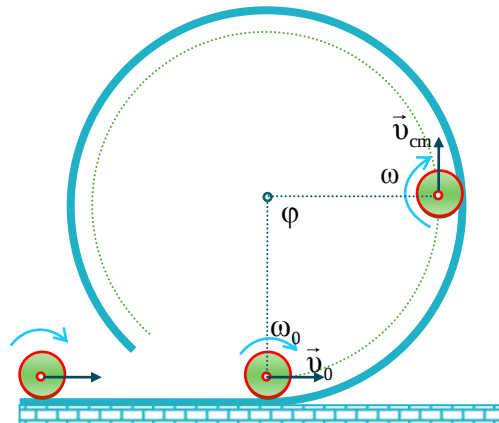
ε. τους ρυθμούς μεταβολής της κινητικής ενέργειας και στροφορμής της σφαίρας,

Μετά την ανωτέρω θέση η σφαίρα συνεχίζοντας την κύλιση ανέρχεται..., να βρείτε,

στ. το ύψος από την αρχική θέση που θα ανέλθει η σφαίρα και θα είναι ακόμη σε επαφή με την στεφάνη.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της

$$I = \frac{2}{5}mr^2 \quad \text{και} \quad g=10\text{m/s}^2.$$



Η απάντηση

α.) Εφαρμόζοντας το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας από την αρχική θέση μέχρι και τη θέση ύστερα από εκτροπή κατά $\varphi=0,5\pi$ rad έχουμε,

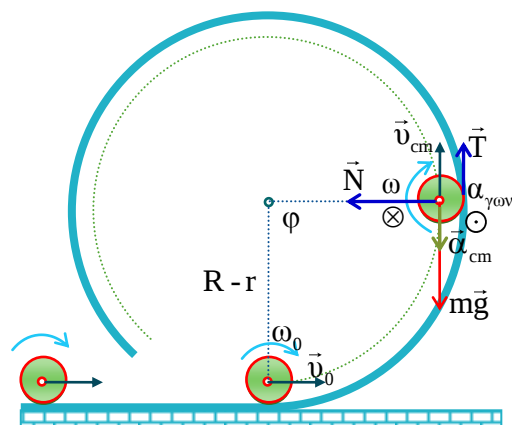
$$K - K_0 = W_B + W_N + W_T \xrightarrow{W_N=0, W_T=0}$$

$$\frac{7}{10}mv_{cm}^2 - \frac{7}{10}mv_0^2 = -mg(R-r) \Rightarrow$$

$$v_{cm}^2 = v_0^2 - \frac{10}{7}g(R-r) \quad \text{ή}$$

$$v_{cm}^2 = 52 - \frac{10}{7} \cdot 10 \cdot 1,12 \quad \text{ή} \quad v_{cm} = 3 \text{ m/s}$$

$$\omega = \frac{v_{cm}}{r} \quad \text{ή} \quad \omega = \frac{3 \text{ m/s}}{0,02 \text{ m}} \quad \text{ή} \quad \omega = 150 \text{ rad/s}.$$



β.) Εφαρμόζουμε τον 2ο νόμο Newton στον ακτινικό άξονα ...όπου η συνισταμένη δύναμη στον ακτινικό άξονα αυτής της κίνησης έχει κεντρομόλο ρόλο ... $\Sigma \vec{F}_k = m\vec{a}_k$ ή $N = m \frac{v_{cm}^2}{R-r}$ ή

$$N = 1,12 \frac{3^2}{1,12} \quad \text{ή} \quad N = 9 \text{ N}.$$

Εφαρμόζουμε τον 2ο νόμο Newton τόσο στον εφαπτομενικό άξονα για τη μεταφορική κίνηση (με θετικά προς την φορά της μεταφορικής - κυκλικής κίνησης του κέντρου μάζας) και την στροφική κίνηση (με τα θετικά προς την φορά αυτοπεριστροφής της σφαίρας).

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}_{cm} \quad \text{ή} \quad T - mg = ma_{cm} \quad (1).$$

$$\Sigma \tau = I\alpha_{γων} \xrightarrow{\alpha_{cm} = r\alpha_{γων}} \quad \text{ή} \quad -Tr = \frac{2}{5}mr^2 \frac{\alpha_{cm}}{r} \quad \text{ή} \quad -T = \frac{2}{5}ma_{cm} \quad (2).$$

$$\text{Με πρόσθεση των (1) και (2) παίρνουμε...} \quad -mg = \frac{7}{5}ma_{cm} \quad \text{ή} \quad a_{cm} = -\frac{5}{7}g \quad \text{ή} \quad a_{cm} = -\frac{50}{7} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad \text{και}$$

$$\alpha_{γων} = -\frac{5}{7} \frac{g}{r} \quad \text{ή} \quad \alpha_{γων} = -\frac{2500}{7} \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

$$\text{Από σχέση (2) βρίσκουμε την αλγεβρική τιμή της στατικής τριβής} \quad T = -\frac{2}{5}ma_{cm} \quad \text{ή}$$

$$T = -\frac{2}{5}m\left(-\frac{5}{7}g\right) \quad \text{ή} \quad T = \frac{2}{7}mg \xrightarrow{\text{S.I}} T = \frac{2}{7}1,12 \cdot 10 \quad \text{ή} \quad T = 3,2 \text{ N}.$$

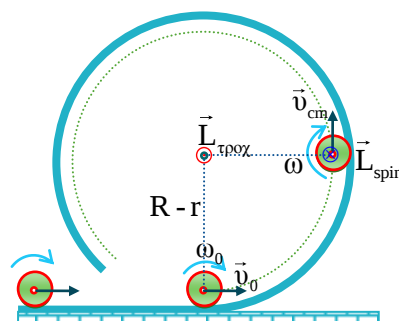
$$\text{γ.)} \quad K = \frac{7}{10}mv_{cm}^2 \quad \text{ή} \quad K = \frac{7}{10}1,12 \cdot 3^2 \quad \text{ή} \quad K = 7,056 \text{ Joule} \quad . \text{ Για τον υπολογισμό της σχέσης}$$

$$K = \frac{7}{10}mv_{cm}^2 \quad \text{βλέπε ανωτέρω περίπτωση Γ.}$$

δ.) Εδώ θέλει ιδιαίτερη προσοχή διότι υπάρχει στροφορμή λόγω αυτοπεριστροφής (spin) αλλά και στροφορμή λόγω της μεταφορικής κίνησης του κέντρου μάζας ... που είναι σε διαφορετικούς αλλά παράλληλους άξονες και αντίρροπες!.

$$\text{Η τροχιακή στροφορμή είναι} \quad L_{τροχ} = mv_{cm}(R-r) \quad \text{ή}$$

$$L_{τροχ} = 1,12 \cdot 3 \cdot 1,12 \quad \text{ή} \quad L_{τροχ} = 3,7632 \text{ Kg m}^2/\text{s}$$



Η στροφορμή λόγω αυτοπεριστροφής (spin) είναι $L_{\text{spin}} = I\omega$ ή $L_{\text{spin}} = \frac{2}{5}mr^2\omega$ ή

$$L_{\text{spin}} = \frac{2}{5}1,12 \cdot 0,02^2 \cdot 150 \text{ ή } L_{\text{spin}} = 0,02688 \text{ Kg m}^2 / \text{s}.$$

Η συνολική στροφορμή είναι $L = L_{\text{τροχ}} - L_{\text{spin}}$ ή $L = 3,73632 \text{ Kg m}^2 / \text{s} \dots [\text{αθροίζονται;;}]$

[Η στροφορμή ενός στερεού σώματος που στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω , περί άξονα $z'z'$ κάθετο στο επίπεδό του που διέρχεται από το κέντρο μάζας του, έχει τιμή $L = I_{\text{cm}}\omega$ και είναι ίδια και ως προς οποιοδήποτε άλλον άξονα παράλληλο με τον άξονα περιστροφής $z'z'$]

[βλέπε στο βιβλίο μου ΣΥΝΘΕΤΑ ΘΕΜΑΤΑ σελίδα 339]

$$\epsilon.) K = \frac{7}{10}mv_{\text{cm}}^2 \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \frac{d\left(\frac{7}{10}mv_{\text{cm}}^2\right)}{dt} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \frac{14}{10}mv_{\text{cm}} \frac{dv_{\text{cm}}}{dt} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \frac{14}{10}mv_{\text{cm}}a_{\text{cm}} \Rightarrow$$

$$\frac{dK}{dt} = \frac{14}{10} \cdot 1,12 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{50}{7}\right) \text{ ή } \frac{dK}{dt} = -33,6 \frac{\text{J}}{\text{s}} \dots \text{ και διαφορετικά } \dots$$

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dK_{\text{μετ}}}{dt} + \frac{dK_{\text{στρ}}}{dt} \text{ ή } \frac{dK}{dt} = \Sigma F_{\epsilon} \cdot v_{\text{cm}} + \Sigma \tau \cdot \omega \text{ ή } \frac{dK}{dt} = (T - mg) \cdot v_{\text{cm}} + Tr \cdot \omega \text{ ή}$$

$$\frac{dK}{dt} = Tv_{\text{cm}} - mgv_{\text{cm}} + Tr \cdot \frac{v_{\text{cm}}}{r} \text{ ή } \frac{dK}{dt} = -mgv_{\text{cm}} \text{ ή } \frac{dK}{dt} = -1,12 \cdot 10 \cdot 3 \text{ ή } \frac{dK}{dt} = -33,6 \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

$$L_{\text{τροχ}} = mv_{\text{cm}}(R - r) \Rightarrow \frac{dL_{\text{τροχ}}}{dt} = \frac{d(mv_{\text{cm}}(R - r))}{dt} \Rightarrow \frac{dL_{\text{τροχ}}}{dt} = m(R - r) \frac{dv_{\text{cm}}}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{dL_{\text{τροχ}}}{dt} = m(R - r)a_{\text{cm}} \text{ ή } \frac{dL_{\text{τροχ}}}{dt} = m(R - r)a_{\text{cm}} \text{ ή } \frac{dL_{\text{τροχ}}}{dt} = 1,12 \cdot 1,12 \cdot \frac{50}{7} \text{ ή } \frac{dL_{\text{τροχ}}}{dt} = 8,96 \frac{\text{Kg m}^2}{\text{s}^2}$$

$$L_{\text{spin}} = I\omega \Rightarrow \frac{dL_{\text{spin}}}{dt} = \Sigma \tau = Tr \text{ ή } \frac{dL_{\text{spin}}}{dt} = 3,2 \cdot 0,02 \text{ ή } \frac{dL_{\text{spin}}}{dt} = 0,064 \frac{\text{Kg m}^2}{\text{s}^2}$$

στ.) Αφού η σφαίρα θα έχει γωνιακή εκτροπή $\pi/2 < \varphi < \pi$ η απαραίτητη συνθήκη για την τελική θέση είναι ο μηδενισμός της δύναμης στήριξης $N=0$. Η συνισταμένη δύναμη στον ακτινικό άξονα αυτής της κίνησης έχει κεντρομόλο ρόλο ... $\Sigma \vec{F}_k = m\vec{a}_k$ ή

$$N + mg\eta\mu\theta = m \frac{v_{\text{cm}}^2}{R - r} \text{ ή}$$

$$N = m \frac{v_{\text{cm}}^2}{R - r} - mg\eta\mu\theta. \text{ Από τη σχέση}$$

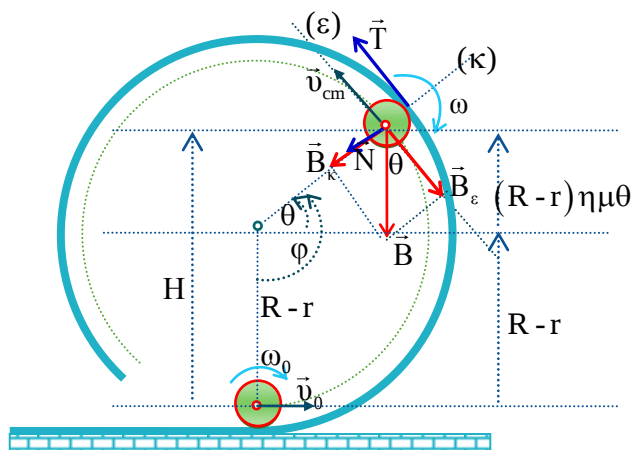
αυτή παρατηρούμε ότι αν $N=0$, δηλαδή

τη στιγμή που χάνεται η επαφή της σφαίρας με την στεφάνη η σφαίρα έχει ακόμη ταχύτητα

$$v_{\text{cm}} = \sqrt{g(R - r)\eta\mu\theta} \neq 0 \quad (3)$$

Από δε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας μεταξύ της αρχικής και της θέσης

$$\text{έχουμε: } K - K_0 = W_B + W_N + W_T \xrightarrow{W_N=0, W_T=0} \frac{7}{10}mv_{\text{cm}}^2 - \frac{7}{10}mv_0^2 = -mgH \text{ και επειδή από το}$$



$$\begin{aligned} \text{σχήμα } H &= (R-r) + (R-r) \eta \mu \theta \dots \frac{7}{10} m v_{\text{cm}}^2 - \frac{7}{10} m v_0^2 = -mg[(R-r) + (R-r) \eta \mu \theta] \quad \text{ή} \\ \frac{7}{10} v_{\text{cm}}^2 - \frac{7}{10} v_0^2 &= -g[(R-r) + (R-r) \eta \mu \theta] \quad \text{ή} \quad v_{\text{cm}}^2 - v_0^2 = -\frac{10}{7} g(R-r) - \frac{10}{7} g(R-r) \eta \mu \theta \\ \xrightarrow{v_{\text{cm}} = \sqrt{g(R-r) \eta \mu \theta}} & \left(\sqrt{g(R-r) \eta \mu \theta} \right)^2 - v_0^2 = -\frac{10}{7} g(R-r) - \frac{10}{7} g(R-r) \eta \mu \theta \dots\dots\dots \\ \eta \mu \theta &= \frac{7v_0^2 - 10g(R-r)}{17g(R-r)} \quad \text{ή} \quad \eta \mu \theta = 0,33 \end{aligned}$$

Από το σχήμα το ύψος H που φθάνει η σφαίρα είναι $H = (R-r) + (R-r) \eta \mu \theta$ ή
 $H = (R-r)(1 + \eta \mu \theta)$ ή $H = 1,12(1 + 0,33)$ ή $H = 1,49\text{m}$

