Οι χρονικες εξισωσεις της Δυναμικής και κινητικής ενεργειαςστην α.α.τ- Γραφικες παραστασεις.

Α. Οι εξισώσεις

Έστω ένας απλός αρμονικός ταλαντωτής μάζας m με εξίσωση απομάκρυνσης $x = A\eta\mu(\omega t)$ και σταθερά επαναφοράς D. Ο ταλαντωτής αυτός έχει δυναμική ενέργεια ταλάντωσης $U = \frac{1}{2}Dx^2$ ή $U = \frac{1}{2}D\left(A\eta\mu(\omega t)\right)^2$ $\Rightarrow U = \frac{1}{2}DA^2\eta\mu^2(\omega t) \xrightarrow[E=\text{ενέργεια}]{E=\frac{1}{2}DA^2} U = E\eta\mu^2(\omega t)$ και κινητική ενέργεια ταλάντωσης $K = \frac{1}{2}m\upsilon^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2}m\left(\omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t)\right)^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sigma\upsilon\nu^2(\omega t)$ $\xrightarrow{D=m\omega^2} K = \frac{1}{2}DA^2\sigma\upsilon\nu^2(\omega t) \Rightarrow K = E\sigma\upsilon\nu^2(\omega t)$.

- Παρατηρώντας την $x = A\eta\mu(\omega t)$ βλέπουμε ότι η απλή αρμονική ταλάντωση έχει,
  - κυκλική συχνότητα ω και συχνότητα $f = \frac{\omega}{2\pi}$,
  - περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega}$.
- Τι γίνεται όμως με τα αντίστοιχα μεγέθη για τις χρονικές εξισώσεις της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης $U = f(t)$ και της κινητικής ενέργεια ταλάντωσης $K = f(t)$;
  - Παρατηρώντας τις εξισώσεις $U = E\eta\mu^2(\omega t)$ και $K = E\sigma\upsilon\nu^2(\omega t)$ δεν μπορούμε να πούμε τα μεγέθη $U = f(t)$ και $K = f(t)$ έχουν κυκλική συχνότητα ω και περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ίδια δηλαδή με αυτής της αρμονικής ταλάντωσης .

Για να βρούμε τα μεγέθη αυτά κάνουμε αποτετραγωνοποίηση στις εξισώσεις $U = E\eta\mu^2(\omega t)$ και $K = E\sigma\upsilon\nu^2(\omega t)$ χρησιμοποιώντας τις σχέσεις

$\sigma\upsilon\nu(2\omega t) = \sigma\upsilon\nu^2(\omega t) - \eta\mu^2(\omega t) \Rightarrow \sigma\upsilon\nu(2\omega t) = 2\sigma\upsilon\nu^2(\omega t) - 1$ ή

$\sigma\upsilon\nu(2\omega t) = 1 - 2\eta\mu^2(\omega t)$ απ' όπου παίρνουμε:

$\boxed{\sigma\upsilon\nu^2(\omega t) = \frac{1+\sigma\upsilon\nu(2\omega t)}{2}}$ και $\boxed{\eta\mu^2(\omega t) = \frac{1-\sigma\upsilon\nu(2\omega t)}{2}}$.

Έτσι οι χρονικές εξισώσεις της δυναμικής και κινητικής ενέργειας γίνονται:

$$U = E\eta\mu^2(\omega t) \Rightarrow U = E\frac{1-\sigma\upsilon\nu(2\omega t)}{2} \Rightarrow \boxed{U = \frac{E}{2} - \frac{E}{2}\sigma\upsilon\nu(2\omega t)}$$

$$K = E\sigma\upsilon\nu^2(\omega t) \Rightarrow K = E\frac{1+\sigma\upsilon\nu(2\omega t)}{2} \Rightarrow \boxed{K = \frac{E}{2} + \frac{E}{2}\sigma\upsilon\nu(2\omega t)}$$

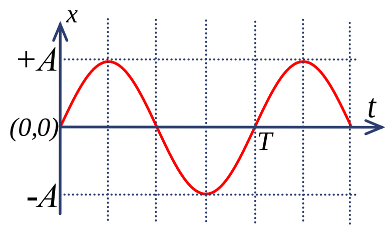
Από τις εξισώσεις αυτές παρατηρούμε ότι τόσο η $U = f(t)$ όσο και η $K = f(t)$ είναι **συνημιτονοειδείς συναρτήσεις** με

- κυκλική συχνότητα $\omega' = 2\omega$ και συχνότητα $f' = \frac{\omega'}{2\pi} \Rightarrow f' = \frac{2\omega}{2\pi} \Rightarrow$ $\boxed{f' = 2f}$, δηλαδή έχουν συχνότητα διπλάσια αυτής της ταλάντωσης,
- περίοδο $T' = \frac{1}{f'} \Rightarrow T' = \frac{1}{2f} \Rightarrow \boxed{T' = \frac{T}{2}}$, δηλαδή έχουν περίοδο το μισό της περιόδου ταλάντωσης.

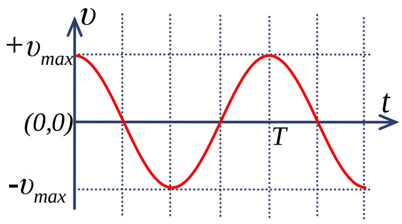
Β. Οι γραφικές παραστάσεις

Β.1 Οι γραφικές παραστάσεις των $x = f(t)$ και $\upsilon = f(t)$.

Η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης $x = A\eta\mu(\omega t)$ είναι ημιτονοειδής συνάρτηση με ακρότατα $\pm A$ γύρω από την θέση $x = 0$, αρχίζει από την $x = 0$ και περιέχεται μεταξύ των ευθειών που είναι κάθετες στον $x'x$ στις θέσεις $x = +A$ και $x = -A$.



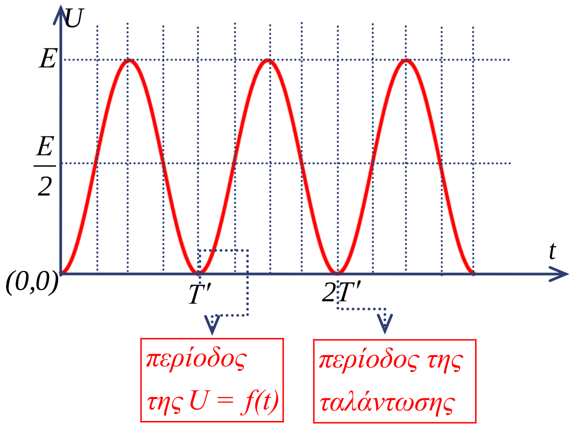
Η γραφική παράσταση της ταχύτητας $\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu(\omega t)$ είναι συνημιτονοειδής συνάρτηση με ακρότατα $\pm\upsilon_{max}$ γύρω από την θέση $\upsilon = 0$, αρχίζει από την υ_{max} και περιέχεται μεταξύ των ευθειών που είναι κάθετες στον $\upsilon'\upsilon$ στις θέσεις $\upsilon = +\upsilon_{max}$ και $\upsilon = -\upsilon_{max}$.



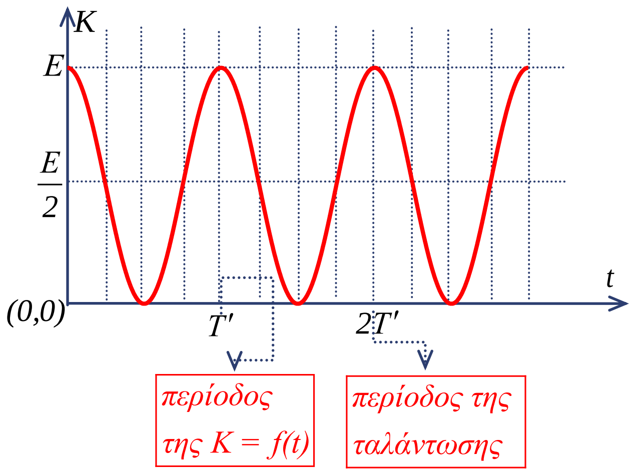
Β.2 Οι γραφικές παραστάσεις των $U = f(t)$ και $K = f(t)$.

Για τη γραφική παράσταση της δυναμικής ενέργειας $U = f(t)$ δεν ενδείκνυται η $U = E\eta\mu^2(\omega t)$, αλλά αυτή που προκύπτει από τον αποτετραγωνισμό, δηλαδή η $U = \frac{E}{2} - \frac{E}{2}\sigma\upsilon\nu(2\omega t)$ που είναι συνημιτονοειδής με ακρότατα $\pm\frac{E}{2}$ γύρω από την θέση $U = \frac{E}{2}$, περιέχεται μεταξύ των ευθειών που είναι κάθετες στον άξονα της δυναμικής ενέργειας στις θέσεις $U_{max} = \frac{E}{2} + \frac{E}{2} = E$ και

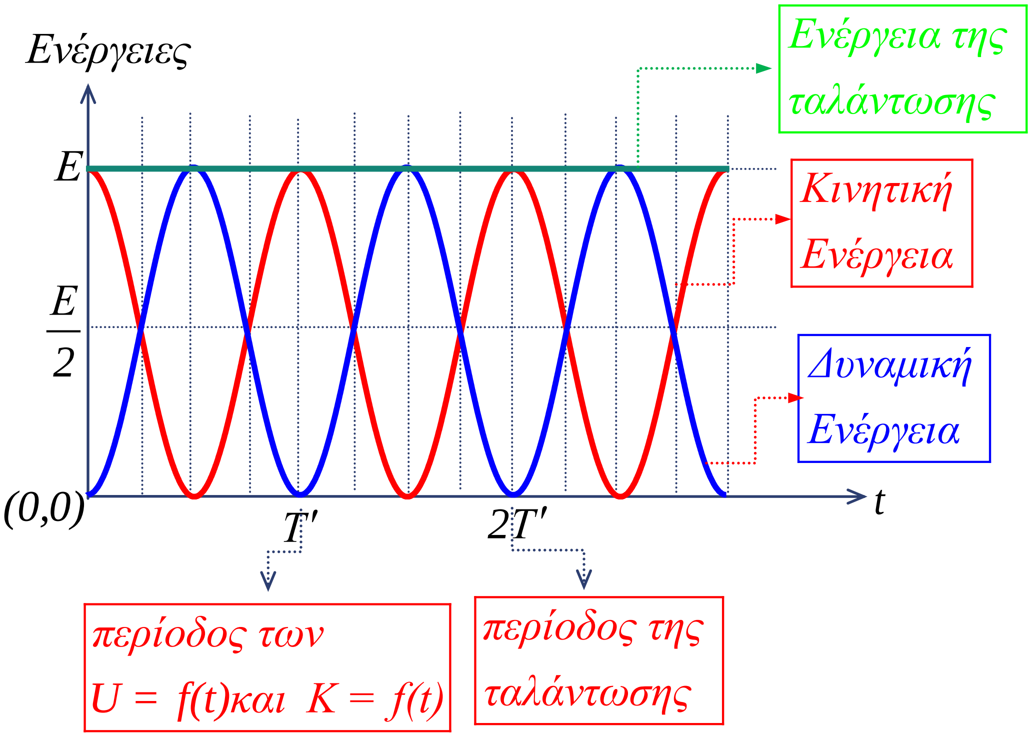
$U_{min} = \frac{E}{2} - \frac{E}{2} = 0$ και ξεκινάει από το κατώτερο σημείο $U_{min} = 0$.



Ομοίως για τη γραφική παράσταση της κινητικής ενέργειας $K = f(t)$ δεν ενδείκνυται η $K = E\sigma\upsilon\nu^2(\omega t)$ αλλά αυτή που προκύπτει από τον αποτετραγωνισμό, δηλαδή η $K = \frac{E}{2} + \frac{E}{2}\sigma\upsilon\nu(2\omega t)$ που είναι συνημιτονοειδής με ακρότατα $\pm\frac{E}{2}$ γύρω από την θέση $K = \frac{E}{2}$, περιέχεται μεταξύ των ευθειών που είναι κάθετες στον άξονα της κινητικής ενέργειας στις θέσεις $K_{max} = \frac{E}{2} + \frac{E}{2} = E$ και $K_{min} = \frac{E}{2} - \frac{E}{2} = 0$ και ξεκινάει από το ανώτερο σημείο $K_{max} = E$.



Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται στο ίδιο διάγραμμα οι γραφικές παραστάσεις της δυναμικής ενέργειας $U = f(t)$, της κινητικής ενέργειας $K = f(t)$ και της ενέργειας της ταλάντωσης $E = f(t)$ ... που είναι σταθερή με το χρόνο.



Ενέργειες
E
E/2
(0,0)
t
T′
2T′
Ενέργεια της ταλάντωσης
Κινητική Ενέργεια
Δυναμική Ενέργεια
περίοδος των
U = f(t) και K = f(t)
περίοδος της ταλάντωσης