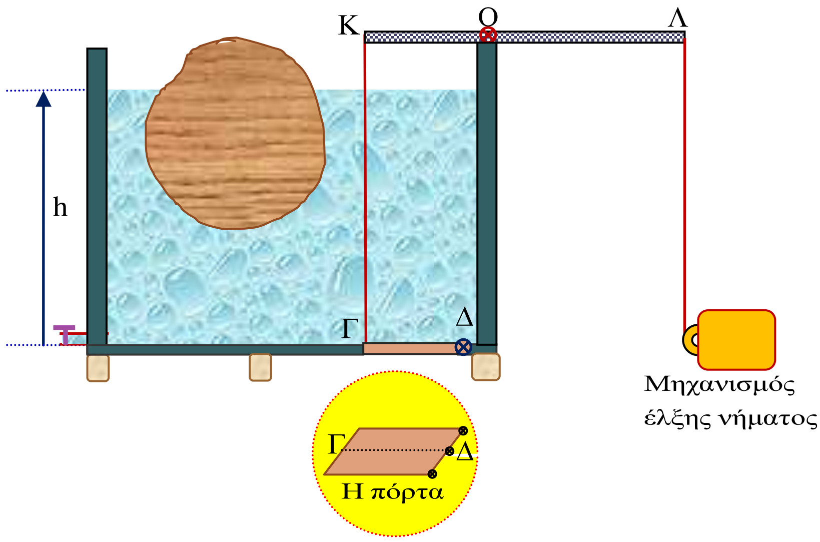
Άνοιγμα «πόρτας» στον πυθμένα δεξαμενής.



Μια πρισματική δεξαμενή με εμβαδόν βάσης A_0=10m^2 στηρίζεται καταλλήλως ώστε να είναι σε κάποιο ύψος πάνω από το έδαφος και περιέχει νερό πυκνότητας $\rho = 10^3 kg/m^3$. Στη βάση της δεξαμενής υπάρχει λεπτή τετράγωνη «πόρτα» πλευράς L=1m και μάζας m=200Kg. Στο κάτω μέρος μιας πλευρικής έδρας της δεξαμενής υπάρχει βρύση πολύ μικρής διατομής εξόδου που αν ανοίξει εκρέει νερό με κάθε λίτρο του να έχει κινητική ενέργεια 19,5J.

Γ.1 Να υπολογίστε το ύψος του νερού στη δεξαμενή.

Ξαφνικά μέσα στη δεξαμενή πέφτει ένα μεγάλο ξύλο (κούτσουρο) μάζας $m_1 = 500Kg$. Να υπολογίσετε ,

Γ.2 την αύξηση της πίεσης στον πυθμένα της δεξαμενής,

Γ.3 πόσο αυξάνεται η κινητική ενέργεια ανά λίτρο νερού που θα εκρέεται αν ανοίξουμε τη βρύση.

Για τα ανωτέρω δεδομένα – και με κλειστή τη βρύση- για να ανασηκώσουμε την πόρτα και να αδειάσουμε γρήγορα τη δεξαμενή, χρησιμοποιούμε τον μηχανισμό του σχήματος. Μια ανθεκτική ομογενής μεταλλική ράβδος ΚΛ μάζας $m_2 = 19Kg$ και μήκους d=4m στηρίζεται αρθρωμένη στο άκρο Ο της δεξαμενής απέχοντας από ένα άκρο της Κ απόσταση ΚΟ=1,2m.

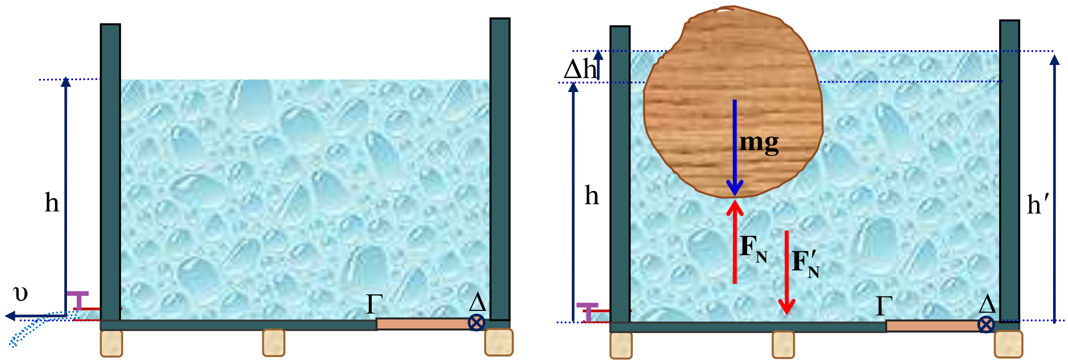
Το άκρο της Κ είναι δεμένο με αβαρές ανθεκτικό συρματόσχοινο με το μέσον Γ της πλευράς της πόρτας που είναι απέναντι από την αρθρωμένη πλευρά της. Από το άλλο άκρο της Λ είναι δεμένο άλλο αβαρές συρματόσχοινο το οποίο τραβάμε κατακόρυφα προς τα κάτω με κάποιο μηχανισμό έλξης. Όταν η πόρτα είναι οριακά έτοιμη να αρχίσει να ανασηκώνεται – με την ράβδο ακόμη σε οριζόντια θέση- να υπολογίσετε:

Γ.4 την δύναμη που ασκεί το συρματόσχοινο στην πόρτα,

Γ.5 την δύναμη που ασκεί μέσω του άλλου συρματόσχοινου ο μηχανισμός έλξης στη ράβδο.

Δίνεται g=10m/s^2

Απάντηση:



Γ.1 Αρχικά η στάθμη του νερού είναι σε ύψος h και το νερό που εκρέεται έχει κινητική ενέργεια ανά μονάδα όγκου $\frac{dK}{dV}=\frac{1}{2}\rho\upsilon^2 \Rightarrow \frac{dK}{dV}=\frac{1}{2}\rho\left(\sqrt{2gh}\right)^2 \Rightarrow \frac{dK}{dV}=\rho gh \Rightarrow h=\frac{dK/dV}{\rho g} \Rightarrow$

$h=\frac{19{,}5J/L}{10^3Kg/m^3 10m/s^2} \Rightarrow h=\frac{19{,}5J/10^{-3}m^3}{10^3Kg/m^3 10m/s^2}$ ή $\mathbf{h=1{,}95m}$

Γ.2 Το κούτσουρο ισορροπεί επιπλέοντας στο νερό με δυνάμεις το βάρος του m_1g και την δύναμη F_N από το νερό λόγω των υδροστατικών πιέσεων, άρα $\Sigma F_y=0$ ή $F_N=m_1g$. Τώρα το νερό δέχεται την αντίθετη από αυτή που ασκεί $F'_N=F_N=m_1g$ και έτσι δημιουργείται πρόσθετη πίεση στον πυθμένα $\Delta p=\frac{F'_N}{A_0} \Rightarrow \Delta p=\frac{m_1g}{A_0} \xrightarrow{S.I} \mathbf{\Delta p=500N/m^2}$.

Γ.3 $\Delta p=\rho g\Delta h \Rightarrow \Delta h=\frac{\Delta p}{\rho g} \xrightarrow{S.I} \Delta h=0{,}05m$, άρα το νέο ύψος του νερού είναι $\mathbf{h'=2{,}00m}$.

Τώρα νερό που εκρέεται έχει κινητική ενέργεια ανά μονάδα όγκου $\frac{dK'}{dV}=\frac{1}{2}\rho\upsilon'^2 \Rightarrow$

$\frac{dK'}{dV}=\frac{1}{2}\rho\left(\sqrt{2gh'}\right)^2 \Rightarrow \frac{dK'}{dV}=\rho gh' \xrightarrow{S.I} \frac{dK'}{dV}=20\cdot10^3\frac{J}{m^3}$ ή $\mathbf{\frac{dK'}{dV}=20\frac{J}{L}}$ …που αυξήθηκε κατά **0,5J/L**

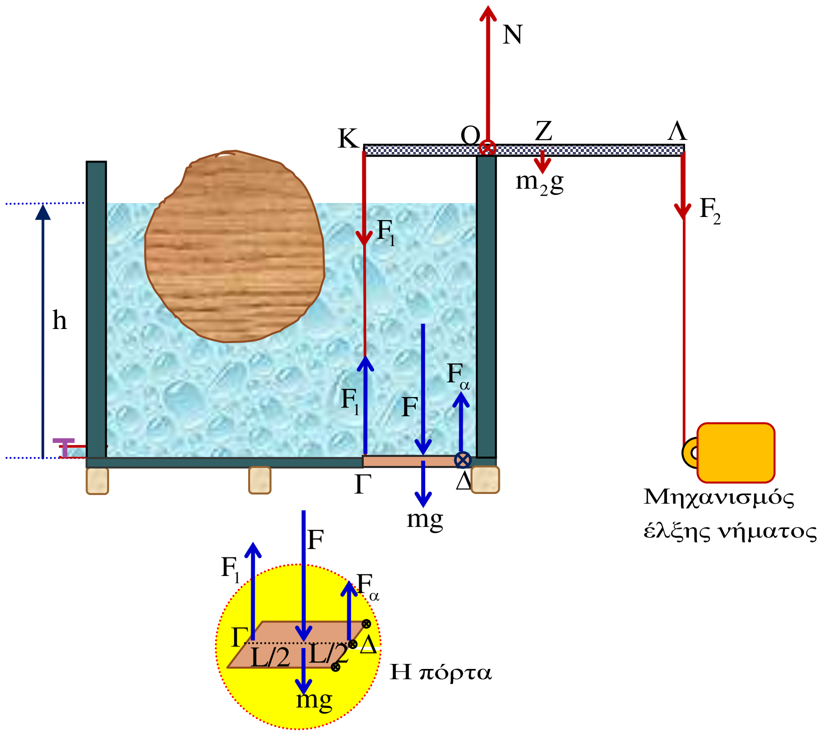
Γ.4 Η πόρτα στην επιφάνεια της βάσης δέχεται τις δυνάμεις,

- το βάρος της mg με σημείο εφαρμογής το κέντρο της πόρτας,
- τη δύναμη από το νερό $F=pA_\pi \Rightarrow F=\rho gh'L^2 \xrightarrow{S.I} F=2\cdot10^4N$ με σημείο εφαρμογής το κέντρο της πόρτας,
- τη δύναμη F_1 από το συρματόσχοινο,
- τη δύναμη F_α από τις αρθρώσεις .

(*) Είναι και οι δυνάμεις από την ατμόσφαιρα αλλά αυτές είναι και από τα δύο μέρη της πόρτας και δεν επηρεάζουν την ισορροπία.

Όταν η πόρτα είναι οριακά έτοιμη να αρχίσει να ανασηκώνεται (οριακά ισορροπεί) οι ροπές όλων των δυνάμεων ως προς τον άξονα περιστροφής της έχουν άθροισμα μηδέν.

$$\Sigma\tau=0 \Rightarrow \tau_{F_1}+\tau_F+\tau_{mg}+\tau_{F_\alpha}=0 \Rightarrow F_1 L-F\frac{L}{2}-mg\frac{L}{2}+0=0 \Rightarrow F_1=\frac{F+mg}{2} \xrightarrow{S.I} \mathbf{F_1=11000N}$$



Γ.5 Όταν η πόρτα είναι οριακά έτοιμη να αρχίσει να ανασηκώνεται η μεταλλική ράβδος ΚΛ είναι οριζόντια και οριακά ισορροπεί με τις οι ροπές όλων των δυνάμεων που ασκούνται σε αυτή ως προς την άρθρωση Ο έχουν άθροισμα μηδέν.

$$\Sigma\tau=0 \Rightarrow \tau_{F_1}+\tau_{F_2}+\tau_{m_2g}+\tau_N=0 \Rightarrow F_1(KO)-F_2(O\Lambda)-m_2g(OP)=0 \Rightarrow F_2=\frac{F_1(KO)-m_2g(OP)}{O\Lambda}$$

$$\xrightarrow{S.I} F_2=\frac{11000\cdot 1,2-19\cdot 10\cdot 0,8}{2,8}N \Rightarrow \mathbf{F_2=4660N}$$