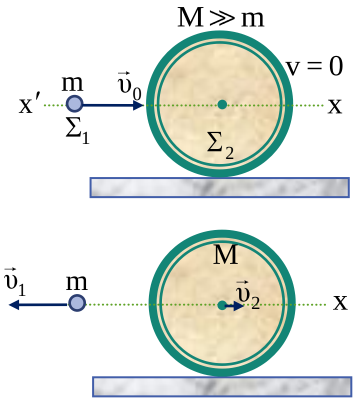
Ελαστική κρούση σώματος με άλλο ακίνητο πολύ μεγαλύτερης μάζας, λάθη- παρανοήσεις- συμπεράσματα.

Α. Μετωπική ελαστική κρούση μικρής σφαίρας με μεγάλη ακίνητη σφαίρα ελεύθερη για μετακίνηση

Στο σχήμα μια πολύ μικρή σφαίρα Σ_1 μάζας m κτυπάει μετωπικά και ελαστικά με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$ μια άλλη σφαίρα Σ_2 πολύ μεγαλύτερης μάζας $M \gg m$ που είναι ακίνητη πάνω **σε λείο δάπεδο ελεύθερη για μετακίνηση.**



Στον άξονα κρούσης x′x το σύστημα είναι μονωμένο και συνεπώς ισχύουν οι αρχές διατήρησης της ορμής και μηχανικής ενέργειας του συστήματος κατά την διάρκεια της κρούσης. Από αυτές τις εξισώσεις για αμέσως μετά την κρούση προκύπτουν οι γνωστές εξισώσεις των ταχυτήτων για τις σφαίρες Σ_1 και Σ_2.

Σ_1: $\upsilon_1 = \dfrac{m - M}{m + M}\upsilon_0$ (1) $\quad \Sigma_2$: $\upsilon_2 = \dfrac{2m}{m + M}\upsilon_0$ (2)

Επειδή $M \gg m$ οι ανωτέρω εξισώσεις γράφονται:

$$\upsilon_1 = \frac{m - M}{m + M}\upsilon_0 \Rightarrow \upsilon_1 = \frac{\frac{m}{M} - \frac{M}{M}}{\frac{m}{M} + \frac{M}{M}}\upsilon_0 \xrightarrow{M \gg m} \upsilon_1 \cong \frac{0 - 1}{0 + 1}\upsilon_0 \Rightarrow \upsilon_1 \cong -\upsilon_0 \ (1')$$

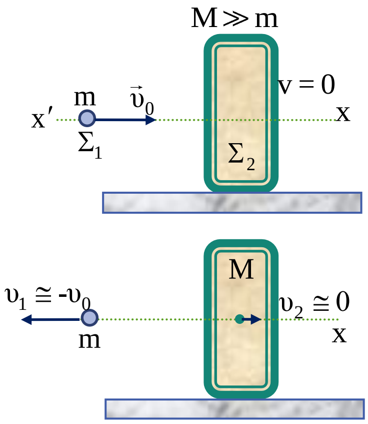
$$\upsilon_2 = \frac{2m}{m + M}\upsilon_0 \Rightarrow \upsilon_2 = \frac{2\frac{m}{M}}{\frac{m}{M} + \frac{M}{M}}\upsilon_0 \xrightarrow{M \gg m} \upsilon_1 \cong \frac{2 \cdot 0}{0 + 1}\upsilon_0 \Rightarrow \upsilon_2 \cong 0 \ (2')$$

Σχόλια -παρατηρήσεις:

1. Οι ακριβείς εξισώσεις είναι οι (1) και (2) , ενώ οι (1΄) και (2΄) είναι προσεγγιστικές ... ενώ το σχολικό βιβλίο στην §5.4 τις έχει ως τις έχει $\upsilon_1 = -\upsilon_0$ και $\upsilon_2 = 0$ **κάτι που δεν είναι ακριβές.**

2. Για να ισχύουν οι εξισώσεις (1) και (2) εκτός από το ότι η κρούση πρέπει να είναι μετωπική και ελαστική πρέπει το σύστημα να είναι μονωμένο και αυτό επιτυγχάνεται μόνον αν σφαίρα Σ_2 είναι πάνω σε λείο δάπεδο ελεύθερη για μετακίνηση.

Β. Μετωπική ελαστική κρούση μικρής σφαίρας με μεγάλη ακίνητη επίπεδη επιφάνεια ελεύθερη για μετακίνηση



Έστω τώρα αντί για μεγάλη σφαίρα Σ_2 έχουμε μεγάλη **επίπεδη κατακόρυφη επιφάνεια μάζας M ελεύθερη για μετακίνηση** ... [προσοχή: όχι τοίχο που δεν μπορεί να μετακινηθεί!] και μια πολύ μικρή σφαίρα μάζας $m \ll M$ να κτυπάει κάθετα (μετωπικά) και ελαστικά με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$ την ανωτέρω επιφάνεια. Επειδή το σύστημα είναι

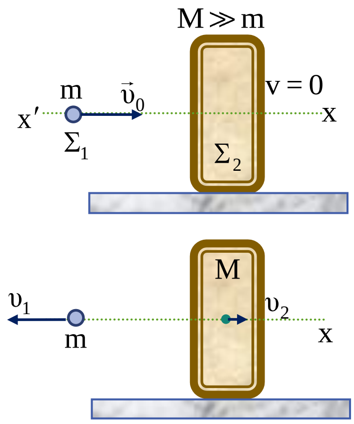
Βασίλης Τσούνης www.btsounis.gr mail@btsounis.gr

μονωμένο αμέσως μετά την κρούση θα ισχύουν με ακρίβεια οι εξισώσεις (1) και (2) και προσεγγιστικά οι (1΄) και (2΄).

Σχόλιο- ιδιαίτερη προσοχή!

Για να ισχύουν οι εξισώσεις (1) και (2) ή προσεγγιστικά οι εξισώσεις (1΄) και (2΄) η επιφάνεια Σ_2 πρέπει να είναι ελεύθερη για μετακίνηση ώστε το σύστημα να είναι μονωμένο. Αν η επιφάνεια Σ_2 είναι τοίχος που δεν μπορεί να μετακινηθεί το σύστημα δεν είναι μονωμένο και δεν ισχύει η διατήρηση της ορμής και προφανώς ούτε οι εξισώσεις (1) και (2). **Στην περίπτωση του τοίχου - όπως θα δούμε παρακάτω- για μετά τη κρούση οι ταχύτητες είναι με ακρίβεια $\upsilon_1 = -\upsilon_0$ και $\upsilon_2 = 0$ αλλά για άλλον λόγο και δεν προκύπτουν από τις (1) και (2) όπως 15 χρόνια τώρα λανθασμένα αναφέρεται στην §5.4 σχολικού!**

Γ. Η προσέγγιση που οδηγεί σε άτοπα αποτελέσματα.



Έστω μια πολύ μικρή σφαίρα μάζας $m = 0,1Kg$ που κτυπάει κάθετα και ελαστικά με ταχύτητα $\upsilon_0 = 10m/s$ μια κατακόρυφη επιφάνεια μάζας $M = 9999,9Kg$ που είναι πάνω σε λείο δάπεδο ελεύθερη για μετακίνηση.
Αν η κρούση διαρκεί $\Delta t = 1ms$ θα υπολογίσουμε για κάθε σώμα τη μεταβολή της ορμής, και τη δύναμη κρούσης.

Οι ταχύτητες μετά την κρούση είναι:

Μικρή σφαίρα Σ_1: $\upsilon_1 = \dfrac{m - M}{m + M}\upsilon_0$ ή

$\upsilon_1 = \dfrac{0,1 - 9999,9}{0,1 + 9999,9}10\dfrac{m}{s}$ ή $\upsilon_1 = -9,9998m/s$ και

προσεγγιστικά $\upsilon_1 \cong -10m/s$ **αλλά όχι ακριβώς** $\upsilon_1 = -10m/s$.

Μεγάλη επιφάνεια Σ_2: $\upsilon_2 = \dfrac{2m}{m + M}\upsilon_0$ ή $\upsilon_2 = \dfrac{2 \cdot 0,1}{0,1 + 9999,9}10\dfrac{m}{s}$ ή $\upsilon_2 = 2 \cdot 10^{-4} m/s$ ή

$\upsilon_2 = 0,2mm/s$ και προσεγγιστικά $\upsilon_2 \cong 0m/s$ **αλλά όχι ακριβώς** $\upsilon_2 = 0m/s$

Μεταβολή ορμής για κάθε σώμα:

Σ_1: $\Delta\vec{p}_1 = \vec{p}_{1,\tau\varepsilon\lambda\iota\kappa\acute{\eta}} - \vec{p}_{1,\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{\eta}} \Rightarrow \Delta p_1 = -m\upsilon_1 - (+m\upsilon_0) \Rightarrow \Delta p_1 = -m(\upsilon_1 + \upsilon_0)$

$\Rightarrow \Delta p_1 = -0,1Kg\,(9,9998 + 10)m/s \Rightarrow \Delta p_1 = -1,99998Kgm/s$

Σ_2: $\Delta\vec{p}_2 = \vec{p}_{2,\tau\varepsilon\lambda\iota\kappa\acute{\eta}} - \vec{p}_{2,\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{\eta}} \Rightarrow \Delta p_2 = m\upsilon_2 - 0 \Rightarrow \Delta p_2 = m\upsilon_2$

$\Rightarrow \Delta p_2 = 9,9999Kg \cdot 2 \cdot 10^{-4} m/s \Rightarrow \Delta p_2 = +1,99998Kgm/s$

Παρατηρούμε ότι $\Delta p_1 + \Delta p_2 = 0$ ή $\Delta p_{\sigma\upsilon\sigma\tau\acute{\eta}\mu\alpha\tau o\varsigma} = 0$ ή $p_{\sigma\upsilon\sigma\tau\acute{\eta}\mu\alpha\tau o\varsigma} =$ σταθερό κάτι που είναι αναμενόμενο αφού το σύστημα είναι μονωμένο (τονίζουμε την ελευθερία κίνησης της ελεύθερης επιφάνειας)!

Οι δυνάμεις κρούσης:

Σ_1: $\vec{F}_1 = \dfrac{\Delta\vec{p}_1}{\Delta t} \Rightarrow F_1 = \dfrac{\Delta p_1}{\Delta t} \Rightarrow F_1 = \dfrac{-1,99998Kgm/s}{10^{-3}s} \Rightarrow F_1 = -1999,98N$

Σ_2: $\vec{F}_2 = \dfrac{\Delta\vec{p}_2}{\Delta t} \Rightarrow F_2 = \dfrac{\Delta p_2}{\Delta t} \Rightarrow F_2 = \dfrac{1,99998Kgm/s}{10^{-3}s} \Rightarrow F_2 = 1999,98N$

Παρατηρούμε ότι $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$, αναμενόμενο αφού πρόκειται δυνάμεις δράσης- αντίδρασης.

...και αν παίρναμε τις προσεγγιστικές τιμές των ταχυτήτων;...

Προσέξτε τώρα το ***άτοπο* των αποτελεσμάτων** αν για τα ανωτέρω παίρναμε τις προσεγγιστικές τιμές των ταχυτήτων.

Μεταβολή ορμής για κάθε σώμα:

Σ_1: $\Delta\vec{p}_1 = \vec{p}_{1,\tau\varepsilon\lambda\iota\kappa\acute{\eta}} - \vec{p}_{1,\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{\eta}} \Rightarrow \Delta p_1 = -m\upsilon_1 - (+m\upsilon_0) \Rightarrow \Delta p_1 = -m(\upsilon_1 + \upsilon_0)$

$\Rightarrow \Delta p_1 = -0{,}1Kg\,(10+10)m/s \Rightarrow \Delta p_1 = -2Kgm/s$

Σ_2: $\Delta\vec{p}_2 = \vec{p}_{2,\tau\varepsilon\lambda\iota\kappa\acute{\eta}} - \vec{p}_{2,\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{\eta}} \Rightarrow \Delta p_2 = m\upsilon_2 - 0 \Rightarrow \Delta p_2 = m\upsilon_2$

$\Rightarrow \Delta p_2 = 9{,}9999Kg \cdot 0m/s \Rightarrow \Delta p_2 = 0$

Παρατηρούμε ότι **καταλήγουμε στο συμπέρασμα** $\Delta p_1 + \Delta p_2 \neq 0$ ή $\Delta p_{\sigma\upsilon\sigma\tau\acute{\eta}\mu\alpha\tau o\varsigma} \neq 0$ ή $p_{\sigma\upsilon\sigma\tau\acute{\eta}\mu\alpha\tau o\varsigma} \neq$ σταθερό κάτι που προφανώς ***δεν είναι σωστό*** αφού το σύστημα είναι μονωμένο!!

Οι δυνάμεις κρούσης:

Σ_1: $\vec{F}_1 = \dfrac{\Delta\vec{p}_1}{\Delta t} \Rightarrow F_1 = \dfrac{\Delta p_1}{\Delta t} \Rightarrow F_1 = \dfrac{-2Kgm/s}{10^{-3}s} \Rightarrow F_1 = -2000N$

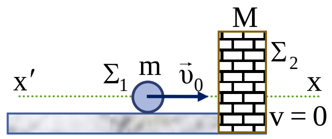
Σ_2: $\vec{F}_2 = \dfrac{\Delta\vec{p}_2}{\Delta t} \Rightarrow F_2 = \dfrac{\Delta p_2}{\Delta t} \Rightarrow F_2 = \dfrac{0Kgm/s}{10^{-3}s} \Rightarrow F_2 = 0N$

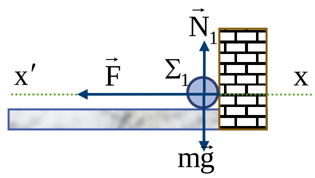
Παρατηρούμε ότι **καταλήγουμε στο συμπέρασμα** $\vec{F}_1 \neq -\vec{F}_2$, κάτι που προφανώς ***δεν είναι σωστό*** αφού πρόκειται δυνάμεις δράσης- αντίδρασης.

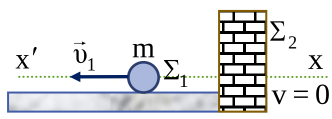
Δ. Μετωπική ελαστική κρούση μικρής σφαίρας με τοίχο!

Μια σφαίρα Σ_1 μάζας m κινείται οριζόντια πάνω σε λείο δάπεδο και κτυπάει κάθετα και ελαστικά σε ένα κατακόρυφο λείο τοίχο Σ_2 μάζας M, όπως στο σχήμα. Σημειώνουμε ότι εδώ πρόκειται για τοίχο που δεν μπορεί να μετακινηθεί και το σύστημα [σφαίρα , τοίχος] δεν είναι μονωμένο και προφανώς **δεν ισχύει η διατήρηση ορμής του συστήματος, άρα δεν ισχύουν και *δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις*** Σ_1: $\upsilon_1 = \dfrac{m-M}{m+M}\upsilon_0$

Σ_2: $\upsilon_2 = \dfrac{2m}{m+M}\upsilon_0$ **όπως 15 χρόνια τώρα λανθασμένα αναφέρεται στην §5.4 σχολικού!**







Επειδή η κρούση είναι ελαστική και δεν υπάρχουν μόνιμες παραμορφώσεις δεν υπάρχει απώλεια ενέργειας μηχανικής ενέργειας λόγω κρούσης και μπορούμε να γράψουμε :

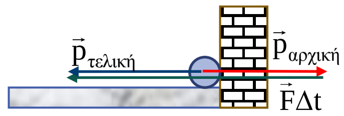
$E_{\mu\eta\chi} = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\eta} \Rightarrow K_{\sigma\upsilon\sigma\tau,\,\pi\rho\iota\nu} = K_{\sigma\upsilon\sigma\tau,\,\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \Rightarrow$

$K_{\sigma\varphi\alpha\acute{\iota}\rho\alpha\varsigma,\,\pi\rho\iota\nu} + K_{\tau o\acute{\iota}\chi o\upsilon,\,\pi\rho\iota\nu} = K_{\sigma\varphi\alpha\acute{\iota}\rho\alpha\varsigma,\,\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} + K_{\tau o\acute{\iota}\chi o\upsilon,\,\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}$ και επειδή $K_{\tau o\acute{\iota}\chi o\upsilon,\,\pi\rho\iota\nu} = K_{\tau o\acute{\iota}\chi o\upsilon,\,\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} = 0$

έχουμε $K_{\sigma\varphi\alpha\acute{\iota}\rho\alpha\varsigma,\,\pi\rho\iota\nu} = K_{\sigma\varphi\alpha\acute{\iota}\rho\alpha\varsigma,\,\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \Rightarrow \dfrac{1}{2}m\upsilon_0^2 = \dfrac{1}{2}m\upsilon_1^2 \Rightarrow \upsilon_1 = \upsilon_0$ (κατά μέτρο)

Άρα η σφαίρα ανακλάται με ταχύτητα ακριβώς ίσου μέτρου.

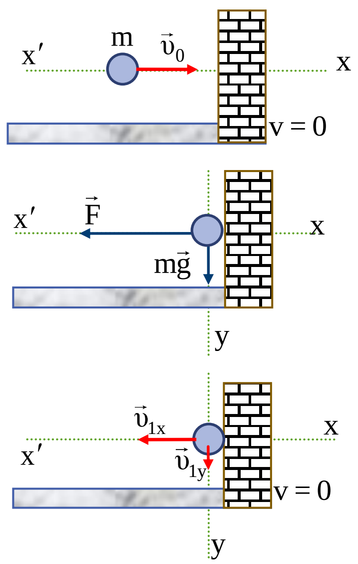
...και γιατί η σφαίρα ανακλάται στην ίδια διεύθυνση $x'x$;.....



Οι ασκούμενες στη σφαίρα δυνάμεις είναι το βάρος της $m_1\vec{g}$ η δύναμη στήριξης $\vec{N}_1$ και η δύναμη κρούσης $\vec{F}$ που επειδή οι επιφάνειες κρούσης είναι λείες είναι κάθετη στην επιφάνεια κρούσης και προφανώς διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας. Επειδή η σφαίρα κινείται σε λείο δάπεδο οι $m_1\vec{g}$ και $\vec{N}_1$ αλληλοαναιρούνται και συνεπώς η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στη σφαίρα κατά την διάρκεια της κρούσης είναι η $\vec{F}$ στην διεύθυνση $x'x$, $\Sigma\vec{F} = \Sigma\vec{F}_x = \vec{F}$. Από τον 2ο νόμο Newton για την σφαίρα στη κρούση παίρνουμε $\dfrac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \vec{F}$ ή $\vec{p}_{τελική} - \vec{p}_{αρχική} = \vec{F}\Delta t$ ή $\vec{p}_{τελική} = \vec{F}\Delta t + \vec{p}_{αρχική}$ (1) και επειδή η $\vec{F}$ και $\vec{p}_{αρχική}$ είναι στην διεύθυνση $x'x$ και από την (1) φαίνεται ότι και η $\vec{p}_{τελική}$ θα είναι στον άξονα $x'x$.

Σχόλιο: Εδώ η σφαίρα ανακλάται με ταχύτητα ακριβώς ίσου μέτρου με αυτήν της πρόσπτωσης.

... και αν η σφαίρα κτυπάει κάθετα στον τοίχο αλλά δεν κινείται σε οριζόντιο δάπεδο;...



Οι ασκούμενες τώρα στη σφαίρα δυνάμεις είναι το βάρος της $m_1\vec{g}$ και η δύναμη κρούσης $\vec{F}$ που επειδή οι επιφάνειες κρούσης είναι λείες είναι κάθετη στην επιφάνεια κρούσης και προφανώς διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας.

Από τον 2ο νόμο Newton για την σφαίρα κατά την διάρκεια της κρούσης στους δύο άξονες παίρνουμε:

$x'x$: παίρνουμε $\dfrac{\Delta\vec{p}_x}{\Delta t} = \Sigma\vec{F}_x = \vec{F}$ ή

$\vec{p}_{x,τελική} - \vec{p}_{x,αρχική} = \vec{F}\Delta t$ ή $m\vec{\upsilon}_{1x} - m\vec{\upsilon}_0 = \vec{F}\Delta t$

$-m\upsilon_{1x} - m\upsilon_0 = -F\Delta t$ ή $\upsilon_{1x} = \dfrac{F\Delta t}{m} - \upsilon_0$ (2)

$y'y$: $\dfrac{\Delta\vec{p}_y}{\Delta t} = \Sigma\vec{F}_y = m\vec{g}$ ή $\vec{p}_{y,τελική} - \vec{p}_{y,αρχική} = m\vec{g}\Delta t$ ή

$\vec{p}_{y,τελική} = m\vec{g}\Delta t$ ή $m\vec{\upsilon}_{1,y} = m\vec{g}\Delta t$ (3). Επειδή $mg \ll F$ και $\Delta t \to 0$ από (2) και (3) με πολύ καλή προσέγγιση θεωρούμε ότι $\upsilon_{1x} \gg \upsilon_{1y}$ (ουσιαστικά $\upsilon_{1y} \to 0$). Επομένως η ταχύτητα μετά την κρούση είναι με πάρα πολύ καλή προσέγγιση η $\upsilon_1 \cong \upsilon_{1x}$ οριζόντια στην διεύθυνση $x'x$ κάθετη στον τοίχο ... και από την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας λόγω ελαστικότητας της κρούσης (όπως και παραπάνω) παίρνουμε $\upsilon_1 = \upsilon_0$, δηλαδή και εδώ έχουμε ανάκλαση σχεδόν στην ίδια διεύθυνση με αντίθετη ταχύτητα.

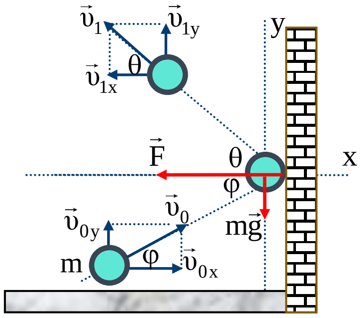
Ε. Πλάγια ελαστική κρούση μικρής σφαίρας με τοίχο!

Μια σφαίρα μάζας m κινείται σε κατακόρυφο επίπεδο και κτυπάει κάθετα και ελαστικά σε έναν λείο τοίχο, όπως στο σχήμα.

Θεωρείστε:

- οι θέσεις της σφαίρας στο σχήμα είναι αμέσως πριν και αμέσως μετά την κρούση,

- η διάρκεια κρούσης είναι αμελητέα $\Delta t \to 0$,
- κατά την διάρκεια της κρούσης είναι αμελητέα η κατακόρυφη μετατόπιση, ουσιαστικά δεν μεταβάλλεται η δυναμική ενέργεια βαρύτητας της σφαίρας.



Επειδή η κρούση είναι ελαστική και δεν υπάρχουν μόνιμες παραμορφώσεις δεν υπάρχει απώλεια ενέργειας μηχανικής ενέργειας λόγω κρούσης και μπορούμε να γράψουμε :

$E_{\mu\eta\chi} = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\eta} \Rightarrow$

$K_{\sigma\upsilon\sigma\tau,\,\pi\rho\iota\nu} + U_{\beta\alpha\rho,\,\pi\rho\iota\nu} = K_{\sigma\upsilon\sigma\tau,\,\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} + U_{\beta\alpha\rho,\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}$ και επειδή θεωρήσαμε τις θέσεις της σφαίρας αμέσως πριν και αμέσως μετά η δυναμική ενέργεια βαρύτητας δεν μεταβάλλεται , οπότε

$K_{\sigma\varphi\alpha\acute{\iota}\rho\alpha\varsigma,\,\pi\rho\iota\nu} + K_{\tau o\acute{\iota}\chi o\upsilon,\,\pi\rho\iota\nu} = K_{\sigma\varphi\alpha\acute{\iota}\rho\alpha\varsigma,\,\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} + K_{\tau o\acute{\iota}\chi o\upsilon,\,\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}$ και

επειδή $K_{\tau o\acute{\iota}\chi o\upsilon,\,\pi\rho\iota\nu} = K_{\tau o\acute{\iota}\chi o\upsilon,\,\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} = 0$ έχουμε

$$K_{\sigma\varphi\alpha\acute{\iota}\rho\alpha\varsigma,\,\pi\rho\iota\nu} = K_{\sigma\varphi\alpha\acute{\iota}\rho\alpha\varsigma,\,\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 \Rightarrow \upsilon_1 = \upsilon_0 \text{ (κατά μέτρο)}$$

Άρα η σφαίρα ανακλάται με ταχύτητα ακριβώς ίσου μέτρου.

Από τον 2ο νόμο Newton για την σφαίρα στον άξονα $y'y$ κατά την κρούση που $\Delta t \to 0$ έχουμε $\dfrac{\Delta \vec{p}_y}{\Delta t} = \Sigma\vec{F}_y = m\vec{g}$ ή $\vec{p}_{y,\tau\varepsilon\lambda\iota\kappa\acute{\eta}} - \vec{p}_{y,\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{\eta}} = m\vec{g}\Delta t$ ή $\vec{p}_{y,\tau\varepsilon\lambda\iota\kappa\acute{\eta}} = m\vec{g}\Delta t + \vec{p}_{y,\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{\eta}}$ ή $m\vec{\upsilon}_{1y} = m\vec{g}\Delta t + m\vec{\upsilon}_{0y}$ και επειδή το βάρος $m\vec{g}$ είναι σχετικά μικρό κυρίως όμως επειδή $\Delta t \to 0$ η ποσότητα $m\vec{g}\Delta t \to 0$ και η τελευταία σχέση με πολύ καλή προσέγγιση γίνεται $m\vec{\upsilon}_{1y} = m\vec{\upsilon}_{0y}$, οπότε και $\vec{\upsilon}_{1y} = \vec{\upsilon}_{0y}$ ... δηλαδή η συνιστώσα της ταχύτητας σε άξονα παράλληλο με τον τοίχο δεν μεταβάλλεται ... ουσιαστικά είναι σαν να μην έγινε κρούση στον άξονα $y'y$.

Επίσης $\upsilon_1 = \upsilon_0 \Rightarrow \sqrt{\upsilon_{1x}^2 + \upsilon_{1y}^2} = \sqrt{\upsilon_{0x}^2 + \upsilon_{0y}^2}$ και επειδή $\vec{\upsilon}_{1y} = \vec{\upsilon}_{0y}$ θα είναι και $\upsilon_{1x} = \upsilon_{0x}$ κατά μέτρο.

Επίσης για τις γωνίες πρόσπτωσης φ και ανάκλασης θ έχουμε:

$\varepsilon\varphi\varphi = \dfrac{\upsilon_{0y}}{|\upsilon_{0x}|}$ και $\varepsilon\varphi\theta = \dfrac{\upsilon_{1y}}{|\upsilon_{1x}|}$ και βάση τις ισότητες $\vec{\upsilon}_{1y} = \vec{\upsilon}_{0y}$ και $\upsilon_{1x} = \upsilon_{0x}$ έχουμε εφφ=εφθ και επειδή οι γωνίες είναι οξείες παίρνουμε φ=θ.

Τελικά έχουμε:

- ίσα μέτρα για τις ταχύτητες πρόσπτωσης και ανάκλασης $\upsilon_1 = \upsilon_0$,
- ουσιαστικά αμετάβλητη την συνιστώσα της ταχύτητας σε άξονα παράλληλο με τον τοίχο, $\vec{\upsilon}_{1y} = \vec{\upsilon}_{0y}$,
- αντιστροφή της συνιστώσας της ταχύτητας με ίδιο μέτρο σε άξονα κάθετο στον τοίχο, $\upsilon_{1x} = \upsilon_{0x}$
- ίσες τις γωνίες πρόσπτωσης και ανάκλασης φ=θ.

Σχόλιο: Σημειώνουμε ότι εδώ πρόκειται για τοίχο που δεν μπορεί να μετακινηθεί και το σύστημα [σφαίρα , τοίχος] δεν είναι μονωμένο και προφανώς **δεν ισχύει η διατήρηση ορμής του συστήματος. Και εδώ το σχολικό έχει λάθος εξήγηση γιατί θεωρεί ότι ισχύει η σχέση**

$\upsilon_{1x} = \frac{m - M}{m + M}\upsilon_{0x}$ **στον άξονα $x'x$!! ... για να ισχύει όμως η εξίσωση αυτή πρέπει να ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής!**