...και όμως είναι απλή αρμονική ταλάντωση...

Ένα σώμα μάζας $m = 0,2Kg$ κινείται σε άξονα $x'x$ με χρονική εξίσωση θέσης $x = 0,8\eta\mu^2(10t)$ $(S.I)$.

α) Εκτιμάτε ότι η κίνηση αυτή είναι απλή αρμονική ταλάντωση;

β) Να γράψετε τη χρονική εξίσωση $\upsilon = f(t)$ για την ταχύτητα αυτού του σώματος.

γ) Να γίνουν σε βαθμολογημένους άξονες οι γραφικές παραστάσεις των χρονικών εξισώσεων της θέσης $x = f(t)$ και της ταχύτητας $\upsilon = f(t)$ του κινητού.

δ) Να βρείτε την ασκούμενη στο κινητό συνισταμένη δύναμη $\Sigma F = f(x)$ σε συνάρτηση με την θέση αυτού x στον άξονα $x'x$.

ε) Να κάνετε σε βαθμολογημένους άξονες τις γραφικές παραστάσεις της κινητικής και δυναμικής ενέργειας του κινητού σε συνάρτηση με την με την θέση αυτού x στον άξονα $x'x$.

στ) Να κάνετε σε βαθμολογημένους άξονες τις γραφικές παραστάσεις της κινητικής και δυναμικής ενέργειας του κινητού σε συνάρτηση με την χρονική στιγμή.

Απάντηση.

α) Με απλή παρατήρηση της $x = 0,8\eta\mu^2(10t)$ δεν μπορεί να δοθεί απάντηση. Για το λόγο αυτό κάνουμε αποτετραγωνοποίηση, χρησιμοποιώντας τη σχέση $\eta\mu^2(\varphi) = \dfrac{1 - \sigma\upsilon\nu(2\varphi)}{2}$.

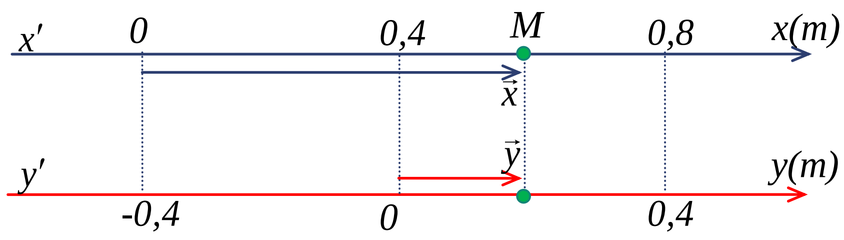
$$x = 0,8\eta\mu^2(10t) \quad \Rightarrow \quad x = 0,8\frac{1 - \sigma\upsilon\nu(20t)}{2} \quad \Rightarrow \quad x = 0,4 - 0,4\sigma\upsilon\nu(20t) \quad (1) \quad \text{ή}$$

$$x = 0,4 - 0,4\eta\mu\left(20t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (2).$$

Η σχέση (1) δηλώνει ότι η θέση x του κινητού στον άξονα $x'x$ είναι αρμονική συνάρτηση του χρόνου - συνημιτονοειδής, με κυκλική συχνότητα $\omega = 20rad/s$, με κέντρο την $x = 0,4m$ και ακρότατα $\pm 0,4m$ εκατέρωθεν αυτής (πλάτος $A = 0,4m$) ... δηλαδή είναι απλή αρμονική ταλάντωση αλλά ο άξονας $x'x$ δεν είναι "άξονας απομακρύνσεων".

Ως άξονα απομακρύνσεων ορίζομε αυτόν που έχει αρχή την θέση ισορροπίας η οποία αποτελεί και το κέντρο της ταλάντωσης.

Ας προσέξουμε το παρακάτω σχήμα, που είναι σημειωμένοι δύο άξονες με τους οποίους θέλουμε να περιγράψουμε την ανωτέρω κίνηση. Είναι ο $x'x$ όπως περιγράφεται ανωτέρω και ο $y'y$ παράλληλος με αυτόν με την ίδια κατεύθυνση αλλά με αρχή το μέσο της διαδρομής $\left[x = 0, x = 0,8m\right]$ δηλαδή το $x = 0,4m$. Ο άξονας $y'y$ είναι ο άξονας των απομακρύνσεων της ταλάντωσης.



Οι αλγεβρικές τιμές της συντεταγμένης $\vec{x}$ και της απομάκρυνσης $\vec{y}$ συνδέονται με τη σχέση $x = 0,4 + y$ $(S.I)$ (3) (αυτό φαίνεται εύκολα αν θεωρήσουμε τον ταλαντωτή σε μια τυχαία θέση Μ) .
Έτσι η ανωτέρω κίνηση :

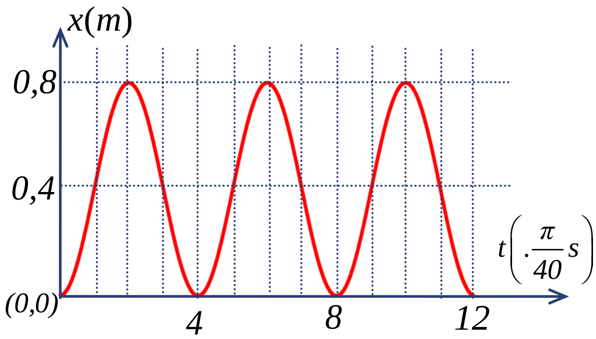
- στον άξονα $x'x$ έχει εξίσωση θέσης $x = 0,4 - 0,4\sigma\upsilon\nu(20t)$ ή $x = 0,4 - 0,4\eta\mu\left(20t + \frac{\pi}{2}\right)$.
- στον άξονα $y'y$ έχει εξίσωση απομάκρυνσης $y = x - 0,4 \Rightarrow$ $y = -0,4\sigma\upsilon\nu(20t)$ ή $y = 0,4\sigma\upsilon\nu(20t + \pi)$ ή $y = 0,4\eta\mu\left(20t + \frac{3\pi}{2}\right)$(4)

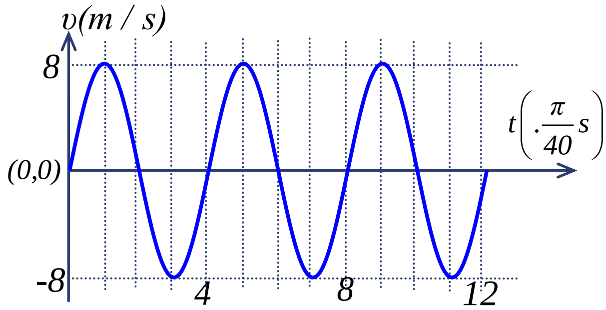
β) Η ταχύτητα $\upsilon = f(t)$ βρίσκεται με μια απλή παραγώγιση της $x = f(t)$ ή της $y = f(t)$... $\upsilon = \frac{dx}{dt}$ ή $\upsilon = \frac{dy}{dt} \Rightarrow \upsilon = \frac{d(-0,4\sigma\upsilon\nu(20t))}{dt} \Rightarrow \upsilon = 8\eta\mu(20t)$.

...και διαφορετικά από την (4) ... $\upsilon = 8\sigma\upsilon\nu\left(20t + \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \upsilon = 8\eta\mu\left(20t + 2\pi\right)$

$\Rightarrow \boxed{\upsilon = 8\eta\mu\left(20t\right)}$ (5) (S.I)

γ) Η γραφική παράσταση της $x = 0,4 - 0,4\sigma\upsilon\nu(20t)$ είναι συνημιτονοειδής με ακρότατα $\pm 0,4m$ γύρω από την θέση $x = 0,4m$, περιέχεται μεταξύ των ευθειών που είναι κάθετες στον άξονα $x'x$ στις θέσεις $x_{max} = 0,4 + 0,4 = 0,8m$ και $x_{min} = 0,4 - 0,4 = 0m$ και ξεκινάει από το κατώτερο σημείο $x_{min} = 0m$. Η $x = f(t)$ είναι συνημιτονοειδής και όχι ημιτονοειδής όπως αρχικά φαίνεται από την $x = 0,8\eta\mu^2(10t)$.
Η γραφική παράσταση τη ταχύτητας $\upsilon = 8\eta\mu(20t)$ είναι μια απλή ημιτονοειδής συνάρτηση...
Και οι δύο έχουν κυκλική συχνότητα $\omega = 20rad/s$ (και όχι $\omega = 10rad/s$ που "φαίνεται" στην $x = 0,8\eta\mu^2(10t)$) και περίοδο $T = \frac{2\pi}{20}s$ ή $T = 4.\frac{\pi}{40}s$





δ) Παρατηρώντας την (4) βρίσκουμε την επιτάχυνση (ή παραγωγίζουμε την (5)) ... $\alpha = -20^2 0,4\eta\mu\left(20t + \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \alpha = -400y$ (S.I).

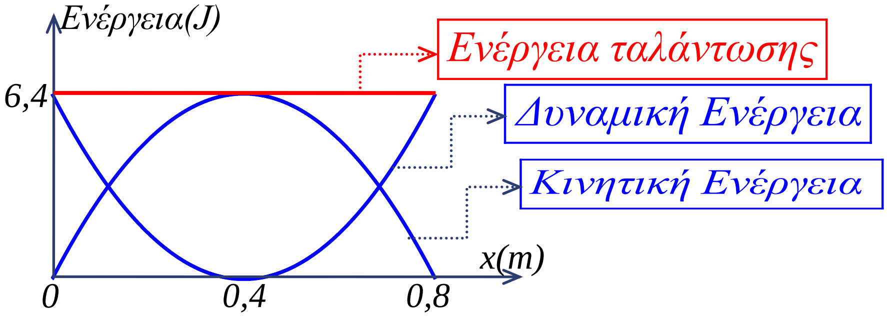
$\Sigma F = ma \xrightarrow{S.I} \Sigma F = 0,2.(-400y) \Rightarrow \Sigma F = -80y\ (S.I) \xrightarrow[(3)]{y=x-0,4}$

$\Sigma F = -80(x - 0,4) \Rightarrow \boxed{\Sigma F = -80x + 32}$ (S.I)

ε) $U = \frac{1}{2}Dy^2 \Rightarrow U = \frac{1}{2}80y^2 \Rightarrow U = 40y^2 \xrightarrow{(3)} U = 40(x - 0,4)^2$ (S.I)

$E = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow E = \frac{1}{2}80.0,4^2 \Rightarrow E = 6,4J$

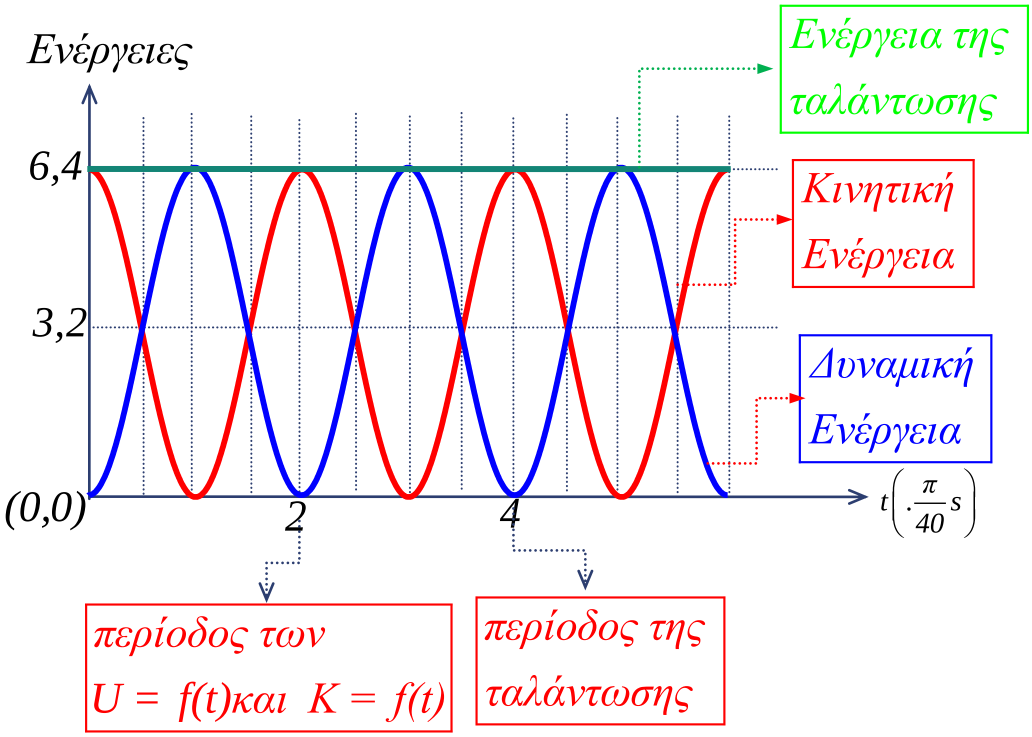
$K = E - U \Rightarrow K = 6,4 - 40(x - 0,4)^2$ (S.I)



στ) $U = \frac{1}{2}Dy^2 \Rightarrow U = \frac{1}{2}80y^2 \Rightarrow \xrightarrow{y=-0,4\sigma\upsilon\nu(20t)} U = 6,4\sigma\upsilon\nu^2(20t)$ και με αποτετραγωνισμό παίρνουμε ...

$$U = 6{,}4\frac{1+\sigma\upsilon\nu(40t)}{2} \Rightarrow U = 3{,}2 + 3{,}2\sigma\upsilon\nu(40t).$$

$$K = E - U \Rightarrow K = 6{,}4 - \left(3{,}2 + 3{,}2\sigma\upsilon\nu(40t)\right) \Rightarrow K = 3{,}2 - 3{,}2\sigma\upsilon\nu(40t)$$



Σχόλιο: Για τις γραφικές παραστάσεις των ενεργειών δείτε την ανάρτηση "*Οι χρονικες εξισωσεις της δυναμικής και κινητικής ενεργειας στην α.α.τ- Γραφικες παραστασεις*".