

Η αντλία για την μεταφορά του νερού ... σε κάποιο λόφο ...

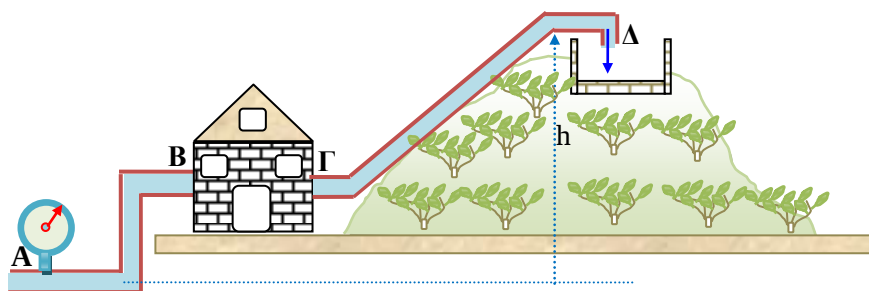
Ένας αγωγός ύδρευσης σταθερής διατομής $A = 50 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ μεταφέρει νερό σε ύψος $h = 50 \text{ m}$ πάνω από το κατώτερο οριζόντιο αυτού τμήμα και γεμίζει μια δεξαμενή όγκου $V = 30 \text{ m}^3$. Ο αγωγός διέρχεται μέσα από ένα οίκημα (αντλιοστάσιο) που υπάρχει αντλία προσφοράς ενέργειας στο σύστημα και τίθεται σε λειτουργία ανάλογα με τις ανάγκες ροής του συστήματος. Σε κάποια χρονική περίοδο ροής που η δεξαμενή δέχεται νερό με σταθερή παροχή και γεμίζει σε χρόνο $t = 25 \text{ min}$, ένα μανόμετρο που είναι ένα σημείο Α του οριζόντιου σωλήνα δείχνει πίεση νερού $p = 3 \text{ atm}$.

- α.** Υπολογίστε την ταχύτητα ροής του νερού στον σωλήνα.
- β.** Για χρονικό διάστημα $\Delta t = 500 \text{ ms}$ να βρείτε πόσο έργο προσφέρει το περιβάλλον στο νερό που κινείται στο τμήμα από το Α μέχρι και την έξοδο Δ.
- γ.** Εξηγήστε ότι για να υπάρχει η ανωτέρω ροή πρέπει να λειτουργεί η αντλία.
- δ.** Για την αντλία να υπολογίσετε την ισχύ της και την προσφερόμενη στο σύστημα ενέργεια μέχρι να γεμίσει η δεξαμενή,
- ε.** την διαφορά των στατικών πιέσεων στα άκρα Β και Γ του αντλιοστασίου.

Αν δεν λειτουργούσε η αντλία και το νερό είχε την ίδια πίεση στο οριζόντιο τμήμα Α και η ροή γίνονταν με την ίδια παροχή,

- στ.** να βρείτε σε ποιο ύψος h_1 πάνω από το Α θα έφθανε το νερό με εκροή στην ατμόσφαιρα (σε ποιο ύψος έπρεπε να είναι η δεξαμενή;),
- ζ.** να βρείτε την αύξηση της δυναμικής ενέργειας του νερού ανά μονάδα όγκου από το ύψος h_1 μέχρι το ύψος h που είναι η πραγματική θέση της δεξαμενής και να το συγκρίνετε με το έργο της αντλίας ανά μονάδα όγκου του νερού.

Δίνονται η ατμοσφαιρική πίεση $p_{\text{at}} = 1 \text{ atm}$, $1 \text{ atm} = 10^5 \text{ N/m}^2$, $g = 10 \text{ m/s}^2$ και η πυκνότητα νερού $\rho = 10^3 \text{ Kg/m}^3$.



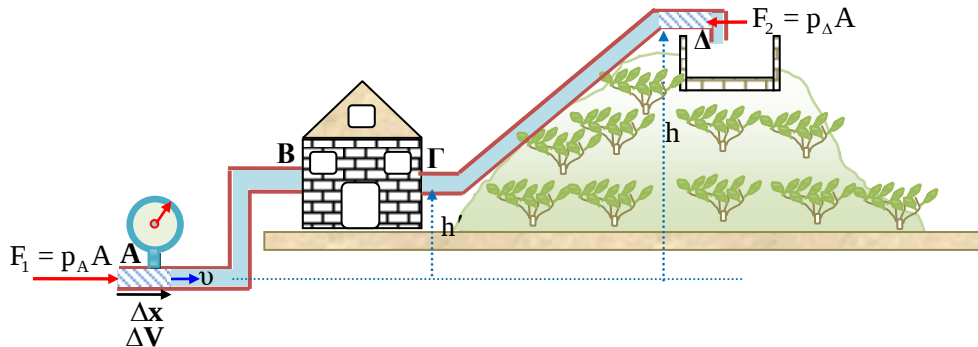
Το πρόβλημα

↓ Η απάντηση

www.btsounis.gr

$$\alpha) \Pi = \frac{V_{\delta}}{t} = \frac{30\text{m}^3}{25 \cdot 60\text{s}} \text{ ή } \Pi = 2 \cdot 10^{-3} \text{m}^3/\text{s}, \Pi = Av \text{ ή } v = \frac{\Pi}{A} \xrightarrow{\text{S.I}} v = 4\text{m/s}$$

β) Στο χρόνο $\Delta t = 500\text{ms} = 0,5\text{s}$ κάθε «μέτωπο» του νερού που είναι σε κάποια διατομή



μετατοπίζεται κατά $\Delta x = v\Delta t = 2\text{m}$ (η ταχύτητα λόγω σταθερής διατομής έχει παντού το ίδιο μέτρο) και ο όγκος κατά τον οποίο μετατοπίζεται κάθε μέτωπο του νερού είναι $\Delta V = A\Delta x$ ή $\Delta V = 50 \cdot 10^{-4} \text{m}^2 \cdot 2\text{m}$ ή $\Delta V = 10^{-2} \text{m}^3$.

Για το χρονικό διάστημα Δt το έργο του περιβάλλοντος ρευστού στην ανωτέρω ποσότητα είναι $W_{\text{περιβ}} = F_1 \Delta x - F_2 \Delta x$ ή $W_{\text{περιβ}} = p_A A \Delta x - p_{\Delta} A \Delta x$ ή $W_{\text{περιβ}} = p_A \Delta V - p_{\Delta} \Delta V$ ή $W_{\text{περιβ}} = (p_A - p_{\Delta}) \Delta V$ ή $W_{\text{περιβ}} = 2000\text{J}$

γ) Τα μέτωπα του νερού στην περιοχή A-Δ σε χρόνο $\Delta t = 500\text{ms} = 0,5\text{s}$ μετατοπίζονται σε όγκο $\Delta V = 10^{-2} \text{m}^3$... που έχει μάζα $\Delta m = \rho \Delta V$ ή $\Delta m = 10^3 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} 10^{-2} \text{m}^3$ ή $\Delta m = 10\text{Kg}$.

Η ενεργειακή μελέτη της ποσότητας νερού A-Δ για το χρονικό διάστημα Δt ισοδυναμεί με την μεταφορά της στοιχειώδους ποσότητας νερού Δm από την στην περιοχή A στην περιοχή Δ. Σε αυτή την « μετακίνηση στοιχειώδους ποσότητας $\Delta m = 10\text{Kg}$ » από το A στο Δ η κινητική ενέργεια παραμένει σταθερή και η δυναμική ενέργεια αυξάνεται κατά $\Delta U = \Delta mgh$ ή

$\Delta U = 10\text{Kg} 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} 50\text{m}$ ή $\Delta U = 5000\text{J}$... δηλαδή η μηχανική ενέργεια του νερού αυξάνεται κατά $\Delta E = \Delta K + \Delta U = 5000\text{J}$.

Για αυτή την μεταβολή $\Delta E_{\text{μηχ, νερού}} = 5000\text{J}$ το περιβάλλον προσέφερε $W_{\text{περιβ}} = 2000\text{J}$... που προφανώς δεν είναι ικανό για την ανωτέρω αύξηση της μηχανικής ενέργειας ... άρα χρειάζεται και την δράση της αντλίας για να προσφέρει τα υπόλοιπα 3000J .

$$\Delta E_{\text{μηχ, νερού}} = W_{\text{αντλίας}} + W_{\text{περιβ}} \Rightarrow 5000\text{J} = W_{\text{αντλίας}} + 2000\text{J} \Rightarrow W_{\text{αντλίας}} = 3000\text{J}$$

δ) Η ανωτέρω ενέργεια της αντλίας προσφέρεται σε χρόνο $\Delta t = 0,5\text{s}$ και προφανώς η ισχύς

$$\text{της είναι } P_{\text{αντλίας}} = \frac{W_{\text{αντλίας}}}{\Delta t} \Rightarrow P_{\text{αντλίας}} = \frac{3000\text{J}}{0,5\text{s}} \Rightarrow P_{\text{αντλίας}} = 6000\text{W} \dots$$

Η ισχύς της αντλίας υπολογίζεται και την «γενική» σχέση $\left(\frac{1}{2} \rho v_{\text{τελ}}^2 - \frac{1}{2} \rho v_{\text{αρχ}}^2 \right) + (\rho gh_{\text{τελ}} - \rho gh_{\text{αρχ}}) = \frac{P_{\text{αντλίας}}}{\Pi} + (p_{\text{αρχ}} - p_{\text{τελ}})$ αν την εφαρμόσουμε από το A έως το Δ ... και προφανώς θέλει απόδειξη ...



$$P_{\text{αντλίας}} = \frac{W_{\text{αντλίας}}}{t} \Rightarrow W_{\text{αντλίας}} = P_{\text{αντλίας}} t \Rightarrow W_{\text{αντλίας}} = 6000\text{W} \cdot 25 \cdot 60\text{s} \Rightarrow W_{\text{αντλίας}} = 9 \cdot 10^6 \text{ J}$$

ε) Ας θεωρήσουμε μια στοιχειώδη μάζα νερού $\Delta m = \rho \Delta V$ που περνάει από το Β στο Γ ...η μεταβολή της μηχανικής του ενέργειας γίνεται μέσω του έργου της αντλίας και του περιβάλλοντος ... $\Delta E_{\text{μηχ., νερού}} = W_{\text{αντλίας}} + W_{\text{περιβ}} \Rightarrow \Delta K_{\text{νερού}} + \Delta U_{\text{νερού}} = P_{\text{αντλίας}} \Delta t + (p_B - p_\Gamma) \Delta V \Rightarrow$

$$0 + 0 = P_{\text{αντλίας}} \Delta t + (p_B - p_\Gamma) \Delta V \Rightarrow p_B - p_\Gamma = -\frac{P_{\text{αντλίας}} \Delta t}{\Delta V} \Rightarrow p_B - p_\Gamma = -\frac{P_{\text{αντλίας}}}{\Delta V / \Delta t}$$

$$p_B - p_\Gamma = -\frac{P_{\text{αντλίας}}}{\Pi} \xrightarrow{\text{S.I}} p_B - p_\Gamma = -\frac{6000\text{J}}{2 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 / \text{s}} \Rightarrow p_B - p_\Gamma = -3 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 \quad \text{ή}$$

$$p_B - p_\Gamma = -3 \text{ atm}.$$

....και διαφορετικά ...

$$\text{Bernoulli από το Α έως το Β} \dots p_A + \frac{1}{2} \rho v^2 = p_B + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h' \quad (1)$$

$$\text{Bernoulli από το Γ έως το Δ} \dots p_A + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h = p_\Gamma + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h' \quad (2)$$

$$(2)-(1) \Rightarrow p_\Delta - p_A + \rho g h = p_\Gamma - p_B \xrightarrow{\text{S.I}} 10^5 - 3 \cdot 10^5 + 10^3 \cdot 10 \cdot 50 = p_\Gamma - p_B \quad \text{ή}$$

$$p_\Gamma - p_B = 3 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$$

στ) Bernoulli από το Α έως το ύψος h_1 που θα έφθανε το νερό

$$p_A + \frac{1}{2} \rho v^2 = p_{\text{at}} + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h_1 \Rightarrow h_1 = \frac{p_A - p_{\text{at}}}{\rho g} \xrightarrow{\text{S.I}} h_1 = 20\text{m}$$

Δηλαδή το νερό μόνο εξαιτίας των υπάρχουσών πιέσεων ανέρχεται σε ύψος $h_1 = 20\text{m}$ με ταχύτητα $v=4\text{m/s}$.

... **Αρα η αντλία ουσιαστικά δρα για να το «πάει» από ύψος $h_1 = 20\text{m}$ σε ύψος $h = 50,00\text{m}$ χωρίς μεταβολή της ταχύτητάς του, δηλαδή το ανεβάζει επιπλέον κατά $\Delta h = 30,00\text{m}$** ... και του αυξάνει την δυναμική ενέργεια ανά μονάδα όγκου κατά

$$\frac{\Delta m \cdot g \cdot \Delta h}{\Delta V} = \rho g \Delta h \xrightarrow{\text{S.I}} \frac{\Delta m \cdot g \cdot \Delta h}{\Delta V} = 10^3 \cdot 10 \cdot 30 \quad \text{ή} \quad \frac{\Delta m \cdot g \cdot \Delta h}{\Delta V} = 3 \cdot 10^5 \frac{\text{J}}{\text{m}^3} \quad \dots$$

Το έργο της αντλίας ανά μονάδας όγκου του νερού είναι $\frac{W_{\text{αντλίας}}}{\Delta V} = \frac{P_{\text{αντλίας}} \Delta t}{\Delta V} \Rightarrow$

$$\frac{W_{\text{αντλίας}}}{\Delta V} = \frac{P_{\text{αντλίας}}}{\Pi} \xrightarrow{\text{S.I}} \frac{W_{\text{αντλίας}}}{\Delta V} = 3 \cdot 10^5 \frac{\text{J}}{\text{m}^3}$$

Αρα η προσφορά ενέργειας από την αντλία ανά μονάδα όγκου νερού ισούται με την αύξηση της δυναμικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου του νερού πάνω από εκεί πηγαινει το νερό μόνο εξαιτίας των υπάρχουσών πιέσεων!

