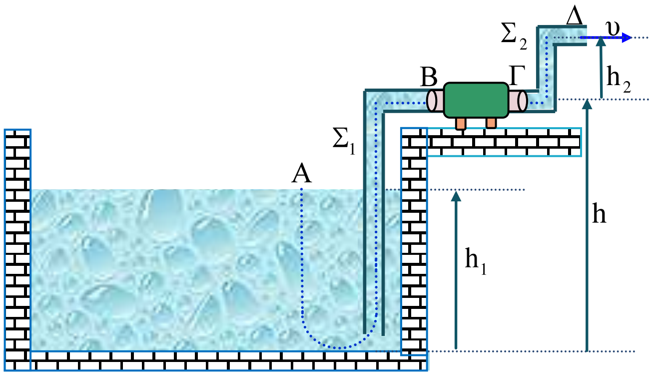
Άντληση νερού από πλημμυρισμένο υπόγειο

Ένα υπόγειο με εμβαδόν βάσης $A_\delta = 20\text{m}^2$ έχει πλημμυρίσει και το νερό έχει ανεβεί μέχρι ύψος $h_1 = 2\text{m}$. Για τη άντληση του νερού χρησιμοποιείται μια αντλία που είναι σε ύψος $h = 3\text{m}$ πάνω από το δάπεδο του υπογείου. Η αντλία χρησιμοποιεί σωλήνες Σ_1 και Σ_2 με εμβαδόν διατομής $A_\Sigma = 40 \cdot 10^{-4}\text{m}^2$, αντλεί δε το νερό με παροχή $\Pi = 1200\text{L}/\min$ και το εκρέει σε ύψος $h_2 = 1\text{m}$ πιο ψηλά από την θέση της.



Να υπολογισθούν:

α. η ταχύτητα εκροής του νερού,

β. η στατική πίεση του νερού στην έξοδο της αντλίας Γ,

γ. η αρχική η ισχύς της αντλίας,

δ. το έργο της αντλίας από την στιγμή έναρξης της εκροής νερού μέχρι να αδειάσει όλο το υπόγειο.

Δίνονται η πυκνότητα του νερού $\rho = 10^3 \dfrac{\text{Kg}}{\text{m}^2}$, $p_{at} = 10^5 \dfrac{\text{N}}{\text{m}^2}$ και $g = 10\text{m}/\text{s}^2$.

Το πρόβλημα

Η απάντηση

www.btsounis.gr

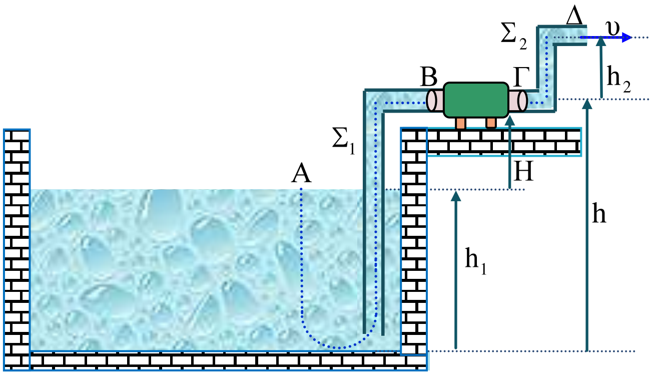
α) $\Pi \;=\; \frac{L\,1}{m}$ ή

$\Pi = 1200\frac{10^{-3}m^3}{60s}$ ή

$\Pi = 20\cdot 10^{-3}\,m^3\,/\,s$

$\Pi = A_\Sigma \upsilon$ ή $\upsilon = \frac{\Pi}{A_\Sigma} \xrightarrow{S.I}$

$\upsilon = \frac{20\cdot 10^{-3}m^3/s}{40\cdot 10^{-4}m^2} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon = 5\frac{m}{s}}$



β) Εξίσωση Bernoulli από το Γ στην έξοδο της αντλίας μέχρι την εκροή Δ …

$P_\Gamma + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 = P_\Delta + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 + \rho g h_2 \xrightarrow{P_\Delta = P_{at}} P_\Gamma = P_{at} + \rho g h_2 \xrightarrow{S.I}$

$P_\Gamma = 10^5\frac{N}{m^2} + 10^3\frac{Kg}{m^3}10\frac{m}{s^2}1m \Rightarrow P_\Gamma = 1{,}1\cdot 10^5\frac{N}{m^2} \Rightarrow \boldsymbol{P_\Gamma = 1{,}1atm}$.

γ) Στο σχήμα φαίνεται η ρευματική γραμμή άντλησης του νερού …που ξεκινάει από την ελεύθερη επιφάνεια του νερού. Για μια στοιχειώδη μάζα νερού Δm που μεταφέρεται από το Α έως το Δ η μεταβολή της μηχανικής του ενέργειας (κινητικής και δυναμικής) γίνεται μέσω του έργου της αντλίας και των πιέσεων του περιβάλλοντος…

$\Delta K + \Delta U = W_{\alpha\nu\tau\lambda\acute{\iota}\alpha\varsigma} + W_{\pi\varepsilon\rho\iota\beta\acute{\alpha}\lambda\lambda o\nu\tau o\varsigma} \Rightarrow$

$\frac{1}{2}\Delta m\cdot\upsilon_\Delta^2 - \frac{1}{2}\Delta m\cdot\upsilon_A^2 + \Delta m\cdot g(H+h_2) = W_{\alpha\nu\tau} + (P_A - P_\Delta)\Delta V \xrightarrow{\upsilon_A=0,\upsilon_\Delta=\upsilon}$

$\frac{1}{2}\frac{\Delta m}{\Delta V}\cdot\upsilon^2 + \frac{\Delta m}{\Delta V}\cdot g(H+h_2) = \frac{W_{\alpha\nu\tau}}{\Delta V} + P_A - P_\Delta \xrightarrow{P_A=P_\Delta=P_{at}} \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 + \rho g(H+h_2) = \frac{W_{\alpha\nu\tau}}{\Delta V}$

και επειδή $\Pi = \frac{\Delta V}{\Delta t}$ ή $\Delta V = \Pi\Delta t$ η ανωτέρω εξίσωση γράφεται $\frac{1}{2}\rho\upsilon^2 + \rho g(H+h_2) = \frac{W_{\alpha\nu\tau}}{\Pi\Delta t}$

$\xrightarrow{P_{\alpha\nu\tau\lambda}=W_{\alpha\nu\tau\lambda}/\Delta t} \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 + \rho g(H+h_2) = \frac{P_{\alpha\nu\tau}}{\Pi} \Rightarrow P_{\alpha\nu\tau} = \left[\frac{1}{2}\rho\upsilon^2 + \rho g(H+h_2)\right]\Pi \xrightarrow{S.I}$

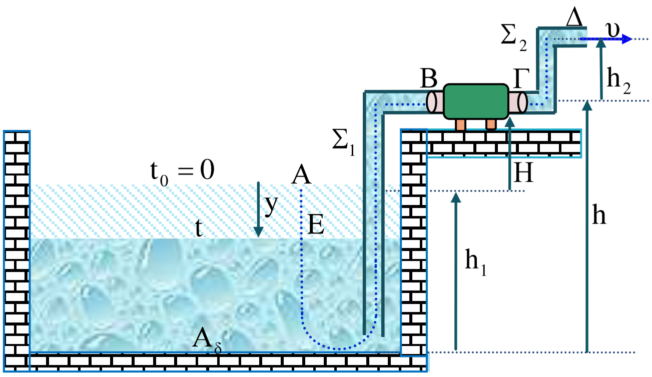
$\boldsymbol{P_{\alpha\nu\tau} = 650W}$

δ) Η αντλία αρχίζει την αναρόφηση με σταθερή παροχή t_0=0 και την χρονική στιγμή t η στάθμη του νερού έχει κατεβεί κατά y και έχει αντληθεί όγκος νερού $\Delta V = A_\delta y$ …οπότε

$\Pi = \frac{\Delta V}{\Delta t} \Rightarrow \Pi = \frac{A_\delta y}{t - 0} \Rightarrow y = \frac{\Pi t}{A_\delta}$

$\xrightarrow{S.I} y = \frac{20\cdot 10^{-3}t}{20} \Rightarrow$

$y = 10^{-3}t$ (S.I)



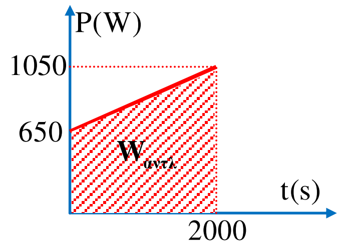
Τη χρονική στιγμή t η ρευματική γραμμή άντλησης του νερού ξεκινάει από την ελεύθερη επιφάνεια του νερού που είναι στο Ε και τελειώνει στο σημείο εκροής Δ. Για μια στοιχειώδη μάζα νερού Δm που μεταφέρεται από το Ε έως το Δ η μεταβολή της μηχανικής του ενέργειας

(κινητικής και δυναμικής) γίνεται μέσω του έργου της αντλίας και των πιέσεων του περιβάλλοντος …και εργαζόμενοι όπως στο (γ) έχουμε $P_{αντ}=\left[\frac{1}{2}\rho\upsilon^2+\rho g(y+H+h_2)\right]\Pi$

$$\xrightarrow{S.I} \quad P_{αντ}=\left[\frac{1}{2}10^3\cdot 5^2+10^3\cdot 10(y+1+1)\right]20\cdot 10^{-3} \quad \Rightarrow \quad P_{αντ}=650+200y \quad \xrightarrow{y=10^{-3}t}$$

$P_{αντ}=650+0,2t$ (S.I) (1).

Από την σχέση $y=10^{-3}t$ για y=2m βρίσκουμε πότε αδειάζει το υπόγειο από το νερό και αυτό γίνεται σε t=2000s. Το έργο της αντλίας – επειδή η ισχύς της είναι χρονικά μεταβλητή- υπολογίζεται από το εμβαδόν της γραφικής παράστασης $P_{αντ}(t)$.



$$W_{αντ}=\frac{650+1050}{2}2000 \Rightarrow \mathbf{W_{αντ}=1,7\cdot 10^6\,J}$$