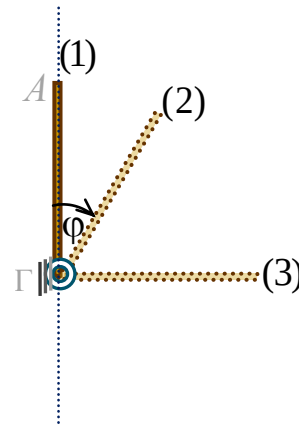


Στατική τριβή στη στροφική κίνηση -Μεταβαλλόμενη στροφική κίνηση - Μέγιστη κινητική ενέργεια.

Μια ομογενής ράβδος ΓΑ μήκους $\ell = 1m$ και μάζας $M = 1,5Kg$ είναι αρθρωμένη σε οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο της Γ, έτσι ώστε να μπορεί να εκτελεί στροφική κίνηση σε κατακόρυφο επίπεδο. Στην στροφική κίνηση της ράβδου αναπτύσσονται τριβές κυρίως στην άρθρωση, που έχουν σταθερή ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής.

Φέρουμε τη ράβδο στην κατακόρυφη θέση (1) και την στρέφουμε πολύ αργά προς τα δεξιά. Αν την αφήσουμε ελεύθερη χωρίς αρχική ταχύτητα, αυτή θα στραφεί μόνο αν η γωνία φ με την αρχική κατακόρυφη θέση (1) γίνει απειροστά μεγαλύτερη από $\varphi = 30^\circ$ (θέση 2).



α) Ποιά η ροπή των τριβών - που ασκούνται στη ράβδο - ως προς τον άξονα περιστροφής αν αφήσουμε ελεύθερη τη ράβδο στη θέση που $\varphi = 12^\circ$.

Αφήνουμε ελεύθερη τη ράβδο από ελάχιστη θέση (2) που αυτή μπορεί να κινηθεί.

β) Ποιά η ροπή των τριβών - που ασκούνται στη ράβδο - ως προς τον άξονα περιστροφής κατά την διάρκεια κίνησης της ράβδου;

γ) Ποιος ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της ταχύτητας του μέσου της ράβδου όταν αυτή διέρχεται από την οριζόντια θέση (3);

δ) Σε ποιά θέση η ράβδος αποκτά μέγιστη κινητική ενέργεια η οποία και να υπολογισθεί.

ε) Να υπολογίστε την στροφορμή της ράβδου μόλις αυτή αποκτήσει την μέγιστη γωνιακή ταχύτητα.

Δίνονται :

✚ Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα κάθετο σε αυτή που διέρχεται από το κέντρο μάζας της $I_{cm} = \frac{1}{12} M \ell^2$.

✚ $g = 10ms^{-2}$, $\eta\mu 12^\circ = 0,2$, $\eta\mu 30^\circ = 0,5$, $\sigma\upsilon\nu 30^\circ = 0,86$

Απάντηση:

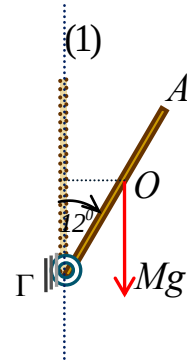
α) Η ράβδος θα κινηθεί όταν η συνολική ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής είναι θετική, οπότε αρχίζει να υπάρχει γωνιακή επιτάχυνση. $\Sigma \tau > 0 \Rightarrow \tau_B + \tau_T > 0 \Rightarrow \tau_B - |\tau_T| > 0 \Rightarrow \tau_B > |\tau_T|$ και επειδή αυτό γίνεται

μετά από γωνία στροφής $\varphi = 30^\circ$, στις θέσεις $\varphi < 30^\circ$ θα έχουμε $\tau_B < |\tau_{T,max}|$, στη θέση $\varphi = 30^\circ$ θα είναι $\tau_B = |\tau_{T,max}|$ και αμέσως μετά $\tau_B > |\tau_T|$ με $|\tau_T| = |\tau_{T,max}|$.

Για τη θέση $\varphi = 12^\circ \dots |\tau_T| = \tau_B = Mg \frac{\ell}{2} \eta \mu 12^\circ \Rightarrow$

$$|\tau_T| = \tau_B = 1,5 \cdot 10 \frac{1}{2} 0,2 \Rightarrow |\tau_T| = 1,5 Nm \Rightarrow$$

$$\tau_T = -1,5 Nm.$$

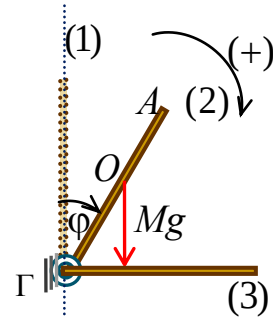


β) Η ροπή των τριβών κατά την διάρκεια της κίνησης είναι ίση με την μέγιστη τιμή της, όπως αυτή διαμορφώνεται στις

$$\varphi = 30^\circ, \tau_T = |\tau_{T,max}|, |\tau_T| = |\tau_{T,max}| = \tau_B = Mg \frac{\ell}{2} \eta \mu 30^\circ$$

$$\Rightarrow |\tau_T| = Mg \frac{\ell}{2} \eta \mu 30^\circ \Rightarrow |\tau_T| = 3,75 Nm \Rightarrow$$

$$\tau_T = -3,75 Nm$$



γ) Ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα

$$\text{περιστροφής } I_o = I_{cm} + M \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 \Rightarrow I_o = \frac{1}{3} M \ell^2 \Rightarrow I_o = 0,5 Kgm^2.$$

Η γωνιακή επιτάχυνση που θα έχει η ράβδος σε μια τυχαία γωνία στροφής φ είναι $\Sigma \tau = I_o \alpha_{γων} \Rightarrow Mg \frac{\ell}{2} \eta \mu \varphi - |\tau_T| = I_o \alpha_{γων}$ για $\varphi > 30^\circ \dots$

$$\alpha_{γων} = 15 \eta \mu \varphi - 7,5 \text{ με } \varphi > 30^\circ.$$

Μόλις η ράβδος βρεθεί σε οριζόντια θέση $\varphi = 90^\circ \dots \alpha_{γων} = 7,5 rad / s$,

$$v_K = \omega \frac{\ell}{2} \Rightarrow \frac{dv_K}{dt} = \frac{\ell}{2} \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \frac{dv_K}{dt} = \frac{\ell}{2} a_{γων} \Rightarrow \frac{dv_K}{dt} = 3,75 m / s^2.$$

δ) Η κίνηση είναι επιταχυνόμενη έως ότου $\Sigma \tau \geq 0$ ή $\tau_B \geq |\tau_T|$ ή $\alpha_{γων} \geq 0$. Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της $\alpha_{γων} = 15 \eta \mu \varphi - 7,5$. Η

γωνιακή επιτάχυνση μηδενίζεται όταν $\alpha_{γων} = 15 \eta \mu \varphi - 7,5 = 0 \Rightarrow \eta \mu \varphi = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6} rad \text{ και } \varphi = \frac{5\pi}{6} rad.$$

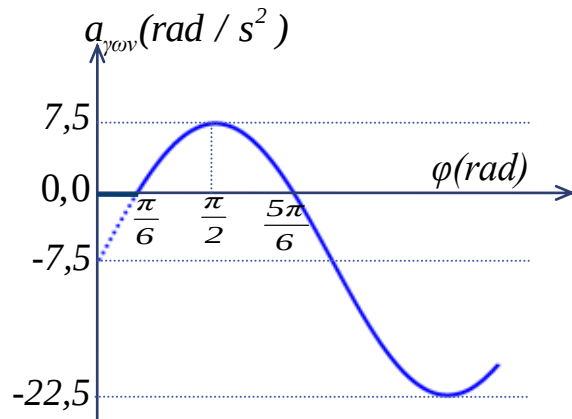
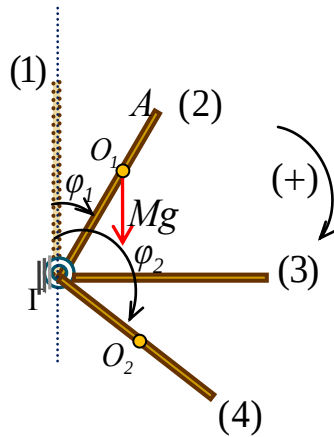
✚ Για $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}$ έχουμε ακινησία $\omega = 0, \alpha_{γων} = 0$, $\Sigma \tau = 0$ και η ροπή της

τριβής απολύτως είναι σε κάθε στιγμή απολύτως ίση με τη ροπή του βάρους (Στατική τριβή στη στροφική κίνηση). Εδώ προφανώς για την γωνιακή επιτάχυνση δεν ισχύει η εξίσωση, αφού έχουμε $\alpha_{γων} = 0$.

✚ Για $\frac{\pi}{6} < \varphi \leq \frac{5\pi}{6}$ έχουμε επιταχυνόμενη στροφική κίνηση με $\alpha_{\gamma\omega\nu} > 0$,

$\tau_B \geq |\tau_T|$ και ροπή τριβής σταθερή $|\tau_T| = 3,75 \text{ Nm}$.

✚ Στη θέση $\varphi = \frac{5\pi}{6}$: $\alpha_{\gamma\omega\nu} = 0$, $\omega_{\max}$, $K_{\max}$



Θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας από την θέση (2) έως την θέση (4). $\Delta K = W_B + W_T \Rightarrow$

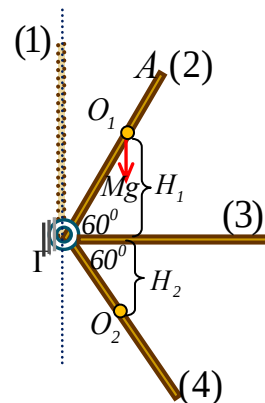
$$K_{\max} = Mg(H_1 + H_2) - |\tau_T| \Delta\varphi \xrightarrow{S.I}$$

$$K_{\max} = Mg\left(\frac{\ell}{2}\eta\mu 60^\circ + \frac{\ell}{2}\eta\mu 60^\circ\right) - |\tau_T| \Delta\varphi$$

$$\Rightarrow K_{\max} = Mg\ell\eta\mu 60^\circ - |\tau_T| \Delta\varphi \Rightarrow$$

$$K_{\max} = 1,5 \cdot 10 \cdot 1,086 - 3,75 \cdot \frac{2\pi}{3} \Rightarrow$$

$$K_{\max} = 12,9 - 11,775 \Rightarrow \boxed{K_{\max} = 1,125 \text{ J}}$$



δ) $K_{\max} = \frac{L^2}{2I} \Rightarrow L = \sqrt{2K_{\max}I} \Rightarrow L = \sqrt{2 \cdot 1,125 \cdot 0,5} \Rightarrow$

$$\boxed{L = 1,06 \text{ Kgm}^2 / \text{s}}$$