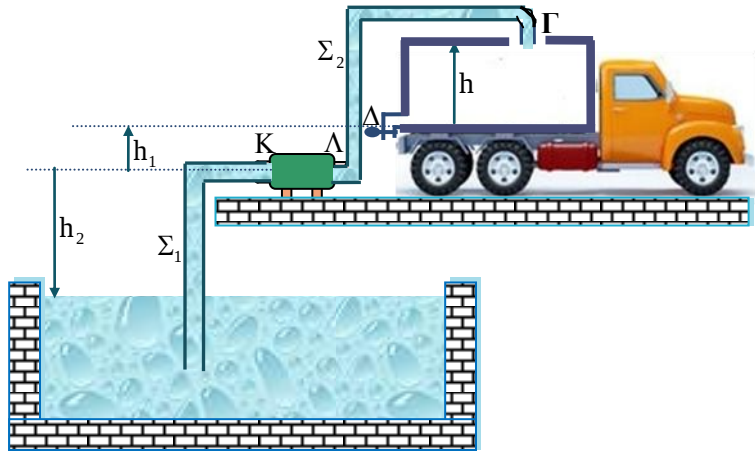


Γέμισμα βυτίου με αντλία ...

Το πρισματικό βυτίο του υδροφόρου οχήματος έχει εμβαδόν βάσης $A_\beta = 10\text{m}^2$ και ύψος $h = 2\text{m}$ και θα το γεμίσουμε νερό που θα πάρουμε μέσω αντλίας από μια λίμνη. Η αντλία είναι χαμηλότερα από την βάση του βυτίου κατά $h_1 = 1\text{m}$ και η ελεύθερη επιφάνεια της λίμνης χαμηλότερα από την αντλία κατά $h_2 = 4\text{m}$.



Το βυτίο μπορούμε να το γεμίσουμε από ένα άνοιγμα Γ που βρίσκεται στο μέρος του ή από το ειδικό άνοιγμα Δ που βρίσκεται στην βάση το δοχείου. Αντλούμε νερό με τον σωλήνα Σ_1 διατομής $A_1 = 5 \cdot 10^{-3}\text{m}^2$ με παροχή $\Pi = 300\text{L} / \text{min}$ και το ρίχνουμε στο βυτίο με τον σωλήνα Σ_2 διατομής $A_2 = 0,5A_1$. Αρχικά γεμίζουμε το δοχείο από το άνοιγμα Γ . Να υπολογισθούν:

- α.** η ταχύτητα εκροής του νερού στο βυτίο,
- β.** η στατική πίεση του νερού στην έξοδο της αντλίας Δ ,
- γ.** η ισχύς της αντλίας,
- δ.** το έργο της αντλίας από την στιγμή έναρξης της εκροής νερού στο βυτίο μέχρι αυτό να γεμίσει.

Αν το δοχείο γεμίζει από το κάτω άνοιγμα Δ ,

- ε.** να υπολογισθεί το έργο της αντλίας από την στιγμή έναρξης της εκροής νερού στο βυτίο μέχρι αυτό να γεμίσει.

Δίνονται η πυκνότητα του νερού $\rho = 10^3 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$, $p_{\text{at}} = 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ και $g = 10\text{m/s}^2$. Θεωρείστε το άνοιγμα Γ αισθητά πιο μεγάλο από την διατομή A_2 και ότι η στάθμη του νερού στην λίμνη παραμένει σταθερή.

Το πρόβλημα

Η απάντηση

www.btsounis.gr

α. Παροχή $\Pi = 300 \frac{\text{L}}{\text{min}} = 300 \frac{10^{-3} \text{m}^3}{60\text{s}}$ ή $\Pi = 5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$

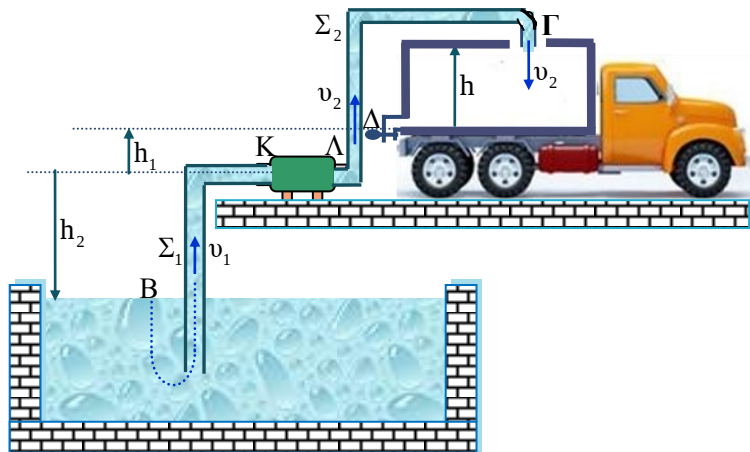
Οι ταχύτητες ροής v_1 και v_2 στους σωλήνες Σ_1 και Σ_2 είναι :

$$\Pi = A_1 v_1 \xrightarrow{\text{S.I}} 5 \cdot 10^{-3} = 5 \cdot 10^{-3} v_1 \text{ ή } v_1 = 1 \text{ m/s}$$

$$\Pi = A_2 v_2 \xrightarrow{\text{S.I}} 5 \cdot 10^{-3} = 2,5 \cdot 10^{-3} v_2 \text{ ή } v_2 = 2 \text{ m/s}$$

β. Εφαρμόζουμε Bernoulli για μια ρευματική γραμμή για ένα σημείο Λ στην έξοδο της αντλίας και το σημείο Γ στην έξοδο του νερού στο βυτίο.

$$p_\Lambda + \frac{1}{2} \rho v_2^2 = p_{\text{at}} + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g(h_1 + h) \text{ ή } p_+ = p_{\text{at}} + \rho g(h_1 + h) \xrightarrow{\text{S.I}} p_\Lambda = 1,3 \text{ atm}.$$



γ. Στο νερό που κινείται από την λίμνη μέχρι και την έξοδο στο βυτίο η μηχανική του ενέργεια μεταβάλλεται μέσω του έργου της αντλίας και του περιβάλλοντος λόγω διαφοράς πιέσεων στην είσοδο και έξοδο [...που εδώ δεν υπάρχει ...].

Προσοχή στη ρευματική γραμμή ...που ξεκινάει από τη ελεύθερη επιφάνεια του νερού με $v=0$ και $p_{\text{αρχική}} = p_{\text{at}}$...

Η μεταβολή της μηχανικής ενέργειας του νερού στο χρονικό διάστημα $[t, t + \Delta t]$ ισοδυναμεί με την μεταβολή της μηχανικής ενέργειας στοιχειώδους μάζας Δm του νερού που μεταφέρεται από την αρχή B στην έξοδο Γ .

Δείτε μια ανάλυση για τον ρόλο της αντλίας στην ιστοσελίδα μου [\[εδώ : 5ο αρχείο \]](#)

$$\Delta K + \Delta U = W_{\text{αντλίας}} + W_{\text{περιβάλλοντος}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \Delta m v_{\text{τελ}}^2 - \frac{1}{2} \Delta m v_{\text{αρχ}}^2 + \Delta m g(h_2 + h_1 + h) = W_{\text{αντλίας}} + (p_{\text{αρχ}} - p_{\text{τελ}}) \Delta V^1 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \frac{\Delta m}{\Delta V} v_{\text{τελ}}^2 - \frac{1}{2} \frac{\Delta m}{\Delta V} v_{\text{αρχ}}^2 + \frac{\Delta m}{\Delta V} g(h_2 + h_1 + h) = \frac{W_{\text{αντλίας}}}{\Delta V} + (p_{\text{αρχ}} - p_{\text{τελ}}) \xrightarrow[p_{\text{αρχ}} = p_{\text{τελ}} = p_{\text{at}}]{v_{\text{αρχ}} = 0}$$

$$\frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g(h_2 + h_1 + h) = \frac{W_{\text{αντλίας}}}{\Pi \Delta t} \xrightarrow[p_{\text{αντλίας}} = \frac{W}{\Delta t}]{p_{\text{αντλίας}} = \frac{W}{\Delta t}} \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g H(h_2 + h_1 + h) = \frac{P_{\text{αντλίας}}}{\Pi} \Rightarrow$$

¹ Ο υπολογισμός του έργου του περιβάλλοντος υπάρχει στον ανωτέρω σύνδεσμο

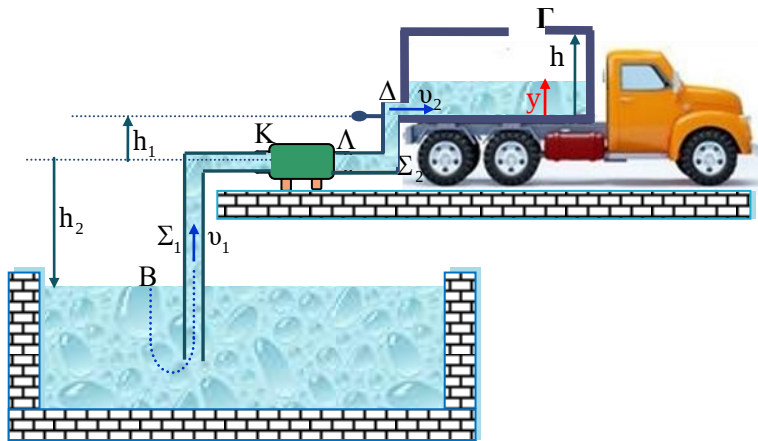
$$P_{\text{αντλίας}} = \left(\frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g (h_2 + h_1 + h) \right) \Pi \xrightarrow{\text{S.I.}} P_{\text{αντλίας}} = 360 \text{ W}$$

δ. Το βυτίο γεμίζει με παροχή σταθερή παροχή $\Pi = 5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$ ή $\Pi = \frac{V_{\text{βυτίου}}}{t}$ και ο

$$\text{χρόνος που γεμίζει είναι } t = \frac{V_{\text{βυτίου}}}{\Pi} \text{ ή } t = \frac{10 \cdot 2}{5 \cdot 10^{-3}} \text{ ή } t = 4 \cdot 10^3 \text{ s} .$$

Επειδή η ισχύς της αντλίας είναι σταθερή, το έργο της για να γεμίσει το βυτίο είναι $W_{\text{αντλίας}} = P_{\text{αντλίας}} t$ ή $W_{\text{αντλίας}} = 1,44 \cdot 10^6 \text{ J}$

ε. Τώρα το βυτίο γεμίζει από το Δ με την ίδια ταχύτητα ροής $v_2 = 2 \text{ m/s}$ αλλά λόγω του νερού που αρχίζει να ανέρχεται υπάρχει πίεση στο σημείο εκροής διαφορετική από την ατμοσφαιρική και η οποία αυξάνεται καθώς το βυτίο γεμίζει με νερό. Σε μία τυχαία χρονική στιγμή που το νερό έχει ανέλθει κατά y είναι: $p_{\Delta} = p_{\text{at}} + \rho g y$



Για την τυχαία αυτή στιγμή εφαρμόζουμε την ανωτέρω διαδικασία από το Β έως το Δ $\Delta K + \Delta U = W_{\text{αντλίας}} + W_{\text{περιβάλλοντος}} \Rightarrow$

$$\frac{1}{2} \Delta m v_{\text{τελ}}^2 - \frac{1}{2} \Delta m v_{\text{αρχ}}^2 + \Delta m g (h_2 + h_1) = W_{\text{αντλίας}} + (p_{\text{αρχ}} - p_{\text{τελ}}) \Delta V \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \frac{\Delta m}{\Delta V} v_{\text{τελ}}^2 - \frac{1}{2} \frac{\Delta m}{\Delta V} v_{\text{αρχ}}^2 + \frac{\Delta m}{\Delta V} g (h_2 + h_1) = \frac{W_{\text{αντλίας}}}{\Delta V} + (p_{\text{αρχ}} - p_{\text{τελ}}) \xrightarrow[p_{\text{αρχ}} = p_{\text{at}}]{v_{\text{αρχ}} = 0}$$

$$\frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g (h_2 + h_1) = \frac{W_{\text{αντλίας}}}{\Pi \Delta t} + (p_{\text{at}} - (p_{\text{at}} + \rho g y)) \Rightarrow \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g (h_2 + h_1) = \frac{W_{\text{αντλίας}}}{\Pi \Delta t} - \rho g y$$

$$\xrightarrow{P_{\text{αντλίας}} = \frac{W}{\Delta t}} \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g (h_2 + h_1) = \frac{P_{\text{αντλίας}}}{\Pi} - \rho g y \xrightarrow{\text{S.I.}} p_{\text{αντλίας}} = 260 + 50y \text{ (S.I.) με}$$

$$0 \leq y \leq 2 \text{ m} . \text{ Το βυτίο γεμίζει με παροχή σταθερή παροχή } \Pi = 5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \text{ ή } \Pi = \frac{V_{\text{βυτίου}}}{t}$$

$$\text{ή } \Pi = \frac{A_{\delta} y}{t} \text{ ή } y = \frac{\Pi t}{A_{\delta}} \xrightarrow{\text{S.I.}} y = 5 \cdot 10^{-4} t \text{ (S.I.)}$$

Έτσι η προηγούμενη σχέση της ισχύος γίνεται $p_{\text{αντλίας}} = 260 + 250 \cdot 10^{-4} t \text{ (S.I.) με}$
 $0 \leq t \leq 4 \cdot 10^3 \text{ s} .$ Εδώ για να βρούμε το έργο της αντλίας επειδή η ισχύς δεν είναι

χρονικά σταθερή κάνουμε τη γραφική παράσταση $p_{\text{αντλίας}} - t$ και το έργο βρίσκεται από το αντίστοιχο εμβαδόν.

$$W_{\text{αντλίας}} = \frac{260 + 360}{2} 4 \cdot 10^3 \text{ ή}$$

$$W_{\text{αντλίας}} = 1,24 \cdot 10^6 \text{ J}$$

