

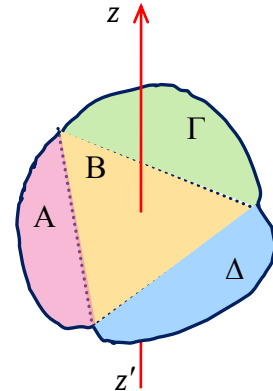
Ειδικά θέματα στη ροπή αδράνειας του στερεού.

1. Η συνολική ροπή αδράνειας ως άθροισμα επί μέρους ροπών αδράνειας.

Έστω το τυχαίο στερεό του σχήματος που αποτελείται από επιμέρους τμήματα Α,Β,Γ,Δ. Η ροπή αδράνειας του όλου στερεού ως προς τον άξονα z'z

υπολογίζεται από την σχέση $I_{o\lambda,z} = \sum_{i=1}^{i=n} (m_i r_i^2)$. Οι στοιχειώδεις

όμως m_i όπως και οι αντίστοιχες αποστάσεις r_i από τον z'z ταξινομούνται και είναι αθροίσματα των $m_{i,A}$, $m_{i,B}$, $m_{i,\Gamma}$, $m_{i,\Delta}$ των επιμέρους τμημάτων Α, Β, Γ, Δ και απέχουν από τον z'z αντίστοιχες αποστάσεις $r_{i,A}$, $r_{i,B}$, $r_{i,\Gamma}$, $r_{i,\Delta}$.



Έτσι η αρχική σχέση γράφεται: $I_{o\lambda,z} = \sum_{i=1}^{i=n} (m_i r_i^2) \Rightarrow$

$$I_{o\lambda,z} = \sum_{i,A=1}^{i,A=n_A} (m_{i,A} r_{i,A}^2) + \sum_{i,B=1}^{i,B=n_B} (m_{i,B} r_{i,B}^2) + \sum_{i,\Gamma=1}^{i,\Gamma=n_\Gamma} (m_{i,\Gamma} r_{i,\Gamma}^2) + \sum_{i,\Delta=1}^{i,\Delta=n_\Delta} (m_{i,\Delta} r_{i,\Delta}^2)$$

(1) και επειδή οι ροπές αδράνειας των Α,Β,Γ, Δ ως προς άξονα z'z αντιστοίχως είναι ,

$$I_{A,z} = \sum_{i,A=1}^{i,A=n_A} (m_{i,A} r_{i,A}^2), \quad I_{B,z} = \sum_{i,B=1}^{i,B=n_B} (m_{i,B} r_{i,B}^2), \quad I_{\Gamma,z} = \sum_{i,\Gamma=1}^{i,\Gamma=n_\Gamma} (m_{i,\Gamma} r_{i,\Gamma}^2), \quad I_{\Delta,z} = \sum_{i,\Delta=1}^{i,\Delta=n_\Delta} (m_{i,\Delta} r_{i,\Delta}^2)$$
 η

σχέση (1) γράφεται $I_{o\lambda,z} = I_{A,z} + I_{B,z} + I_{\Gamma,z} + I_{\Delta,z}$ (2)

Άρα, η ροπή αδράνειας ενός στερεού ως προς κάποιον άξονα, που χωρίζεται σε επιμέρους τμήματα, ισούται με το άθροισμα των ροπών αδράνειας των επιμέρους τμημάτων.

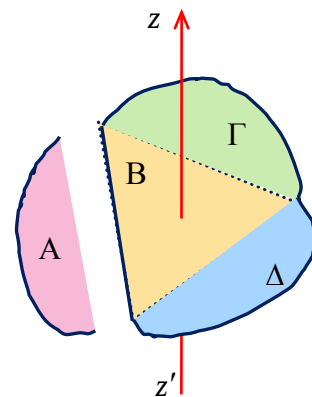
Και αν από στερεό αυτό αφαιρέσουμε ένα τμήμα (έστω το Α) , πόση είναι η ροπή αδράνειας I' του υπόλοιπου τμήματος;

$$I_{o\lambda,z} = I_{A,z} + I_{B,z} + I_{\Gamma,z} + I_{\Delta,z} \Rightarrow$$

$$I_{o\lambda,z} = I_{A,z} + (I_{B,z} + I_{\Gamma,z} + I_{\Delta,z}) \Rightarrow$$

$$I_{o\lambda,z} = I_{A,z} + I' \Rightarrow I' = I_{o\lambda,z} - I_{A,z}$$

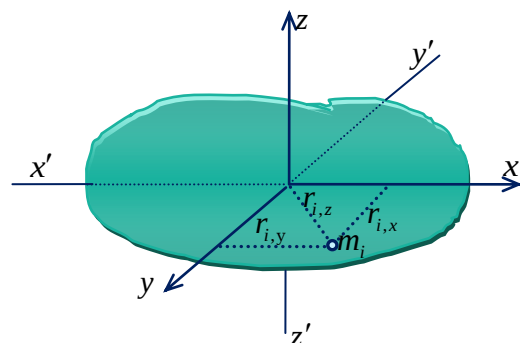
Άρα, η ροπή αδράνειας του υπόλοιπου ισούται με την ροπή αδράνειας του συνόλου μείον την ροπή αδράνειας του τμήματος που αφαιρέθηκε.



2. Το θεώρημα των τριών καθέτων ... στη ροπή αδράνειας .

Έστω ένα στερεό σε σχήμα λεπτής επίπεδης επιφάνειας και τρεις άξονες κάθετοι μεταξύ τους. Οι άξονες x'x και y'y βρίσκονται στο επίπεδο της επιφάνειας, ενώ ο άξονας z'z είναι κάθετος στην επιφάνεια. Οι ροπές αδράνειας I_x , I_y και I_z ως προς τους άξονες

x'x, y'y και z'z συνδέονται με την σχέση $I_z = I_x + I_y$.

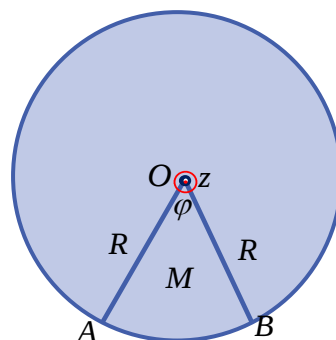
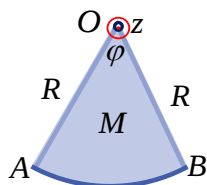


Θεωρούμε την επιφάνεια ως άθροισμα στοιχειωδών μαζών m_i που κάθε μία από αυτές απέχει από τους τρεις άξονες αποστάσεις $r_{i,x}$, $r_{i,y}$ και $r_{i,z}$. Η ροπή της επιφανείας ως προς τον άξονα $z'z$ ορίζεται από την σχέση $I_z = \sum_{i=1}^{i=n} (m_i r_{i,z}^2)$ (1)

$$\begin{aligned} \text{Επειδή όμως } r_{i,z}^2 &= r_{i,x}^2 + r_{i,y}^2 \text{ η ανωτέρω σχέση γράφεται } I_z = \sum_{i=1}^{i=n} (m_i r_{i,z}^2) \Rightarrow \\ I_z &= \sum_{i=1}^{i=n} (m_i (r_{i,x}^2 + r_{i,y}^2)) \Rightarrow I_z = \sum_{i=1}^{i=n} (m_i r_{i,x}^2 + m_i r_{i,y}^2) \Rightarrow I_z = \sum_{i=1}^{i=n} (m_i r_{i,x}^2) + \sum_{i=1}^{i=n} (m_i r_{i,y}^2) \Rightarrow \\ I_z &= I_x + I_y, \text{ καθόσον } I_x = \sum_{i=1}^{i=n} (m_i r_{i,x}^2) \text{ και } I_y = \sum_{i=1}^{i=n} (m_i r_{i,y}^2). \end{aligned}$$

3. Η ροπή αδράνειας ενός κυκλικού τομέα.

Ζητείται να υπολογισθεί η ροπή αδράνειας μιας ομογενούς επιφανείας σχήματος κυκλικού τομέα - ακτίνας R γωνίας φ και μάζας M - ως προς άξονα $z'z$ που διέρχεται από το κέντρο (κορυφή) του και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Δίνεται η ροπή αδράνειας ενός ομογενούς κυκλικού δίσκου ακτίνας r και μάζας m ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδό του που διέρχεται από το κέντρο του $I = \frac{1}{2}mr^2$.



Θεωρούμε το κυκλικό δίσκο (O,R) στον

οποίο ανήκει ο κυκλικός τομέας και ο οποίος έχει ροπή αδράνειας ως το άξονα $z'z$,

$$I_{o\lambda} = \frac{1}{2}mr^2 \xrightarrow{r=R} I_{o\lambda} = \frac{1}{2}mR^2$$

Ο κυκλικός δίσκος όμως μπορεί ως ένα σύνολο N κυκλικών τομέων όμοιων με τον δεδομένο τομέα ...με $N = \frac{2\pi}{\varphi}$. Αν I η ροπή αδράνειας του τομέα (OAB) αλλά και κάθε

ενός από τους όμοιους N τομείς σύμφωνα με το 1ο θέμα

$$\text{μπορούμε να γράψουμε } NI = I_{o\lambda} = \frac{1}{2}mR^2 \xrightarrow{m=NM} NI = \frac{1}{2}NMR^2 \Rightarrow I = \frac{1}{2}MR^2$$



4. Η ροπή αδράνειας επίπεδης ορθογώνιας επιφάνειας.

Έστω ομογενής ορθογώνια επιφάνεια μάζας M διαστάσεων a και b . Ζητείται η ροπή αδράνειας της επιφάνειας αυτής ως προς τους άξονες $x'x$, $y'y$ και $z'z$. Οι άξονες $x'x$, $y'y$ είναι πάνω στην επιφάνεια, διέρχονται από το κέντρο της και είναι παράλληλοι με τις πλευρές a και b αντίστοιχα. Ο άξονας $z'z$ είναι κάθετος στην επιφάνεια και διέρχεται από το κέντρο αυτής. Θεωρείται γνωστή η ροπή λεπτής ράβδου μάζας m και μήκους ℓ ως προς άξονα κάθετο στη ράβδο, που διέρχεται από το κέντρο μάζας αυτής, $I_{cm} = \frac{1}{12} m\ell^2$.

Μελέτη....

Ροπή αδράνειας ως προς άξονα $y'y$.

Θεωρούμε ότι η επιφάνεια αποτελείται από λεπτές παράλληλες "ράβδους" μάζας m_i και μήκους a όπως στο διπλανό σχήμα. Ο άξονας $y'y$ είναι κάθετος σε κάθε μία από αυτές τις "ράβδους" και διέρχεται από το μέσον - κέντρο μάζας. Έτσι η ροπή αδράνειας της κάθε μίας "ράβδου" ως προς τον $y'y$ είναι

$$I_{i,y} = \frac{1}{12} m_i a^2. \text{ Η συνολική ροπή αδράνειας είναι}$$

$$I_y = \sum_{i=1}^{i=n} (I_{i,y}) \Rightarrow I_y = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{1}{12} m_i a^2 \right) \Rightarrow$$

$$I_y = \frac{1}{12} a^2 \sum_{i=1}^{i=n} (m_i) \Rightarrow I_y = \frac{1}{12} M a^2.$$

Ροπή αδράνειας ως προς άξονα $x'x$.

Θεωρούμε ότι η επιφάνεια αποτελείται από λεπτές παράλληλες "ράβδους" μάζας m_i και μήκους b όπως στο διπλανό σχήμα. Ο άξονας $x'x$ είναι κάθετος σε κάθε μία από αυτές τις "ράβδους" και διέρχεται από το μέσον - κέντρο μάζας. Έτσι η ροπή αδράνειας της κάθε μίας "ράβδου" ως προς τον $x'x$ είναι $I_{i,x} = \frac{1}{12} m_i b^2$. Η

$$\text{συνολική ροπή αδράνειας είναι } I_x = \sum_{i=1}^{i=n} (I_{i,x}) \Rightarrow$$

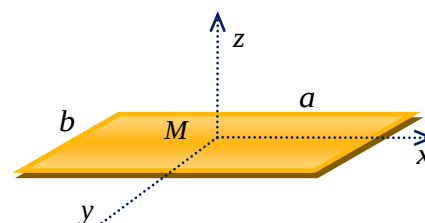
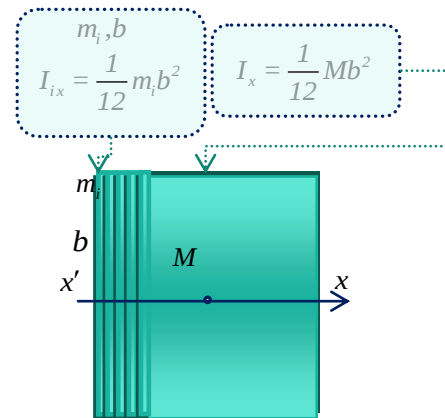
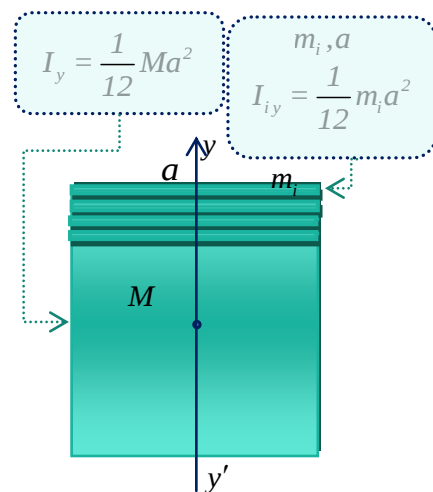
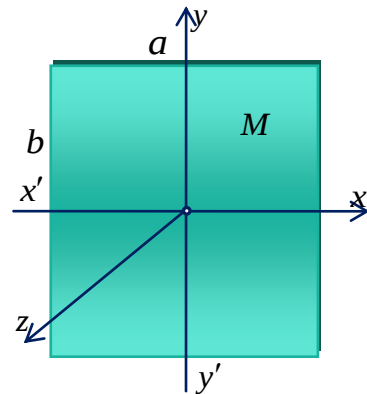
$$I_x = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{1}{12} m_i b^2 \right) \Rightarrow I_x = \frac{1}{12} b^2 \sum_{i=1}^{i=n} (m_i) \Rightarrow$$

$$I_x = \frac{1}{12} M b^2.$$

Ροπή αδράνειας ως προς άξονα $z'z$.

Σύμφωνα με το θεώρημα των τριών καθέτων για την ροπή αδράνειας θα έχουμε $I_z = I_y + I_x \Rightarrow$

$$I_z = \frac{1}{12} M a^2 + \frac{1}{12} M b^2 \Rightarrow$$

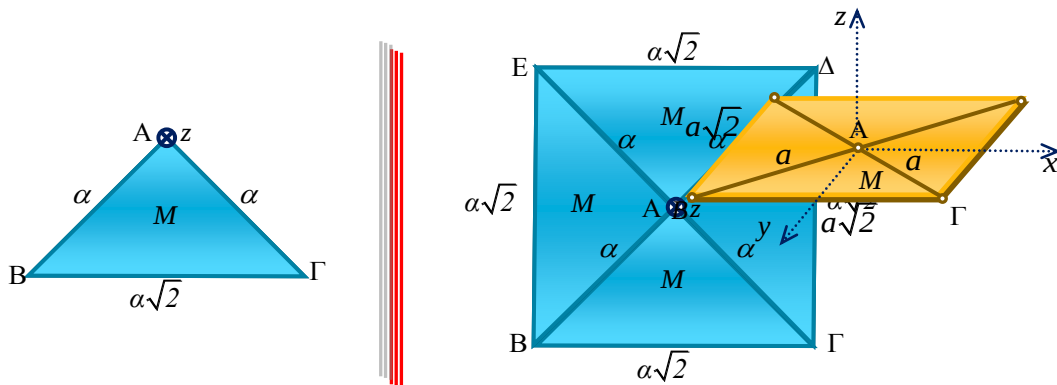


$$I_z = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2)$$

4. Η ροπή αδράνειας τριγωνικής επιφάνειας.

Έστω ομογενής επίπεδη τριγωνική επιφάνεια μάζας M με την περιμέτρό της να έχει σχήμα ορθογωνίου ισοσκελούς τριγώνου με μήκος ίσων πλευρών a . Ζητείται να υπολογισθεί η ροπή αδράνειας της επιφάνειας αυτής ως προς άξονα $z'z$ κάθετο στο επίπεδο της τριγωνικής επιφάνειας στο σημείο της κορυφής της ορθής γωνίας.

Από τη γεωμετρία του σχήματος η υποτείνουσα του ορθογωνίου ισοσκελούς τριγώνου έχει



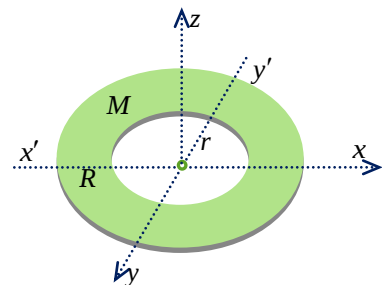
μέτρο $a\sqrt{2}$. Ας θεωρήσουμε μια τετράγωνη ομογενή λεπτή επιφάνεια πλευράς $a\sqrt{2}$. Αυτή θα αποτελείται από τέσσερες ίσες τριγωνικές επιφάνειες σε πλήρη συμμετρία. Λόγω της πλήρους ομοιομορφίας αυτών κάθε μία θα έχει ως προς τον άξονα $z'z$ την ίδια ροπή αδράνειας I . Η τετράγωνη επιφάνεια θα έχει ροπή αδράνειας $I_{ol} = 4I$. Σύμφωνα όμως με το προηγούμενο θέμα 4, η ροπή αδράνειας της τετράγωνης επιφάνειας ως προς $z'z$ είναι

$$I_{ol} = \frac{1}{12} M_{ol} \left[(a\sqrt{2})^2 + (a\sqrt{2})^2 \right] \xrightarrow[\substack{M_{ol}=4M \\ I_{ol}=4I}]{\substack{M_{ol}=4M \\ I_{ol}=4I}} 4I = \frac{1}{12} 4M \left[(a\sqrt{2})^2 + (a\sqrt{2})^2 \right] \Rightarrow$$

$$I = \frac{1}{12} M \left[(a\sqrt{2})^2 + (a\sqrt{2})^2 \right] \Rightarrow I = \frac{1}{3} M a^2$$

5. Η ροπή αδράνειας ενός κοίλου κυκλικού δίσκου.

Στο σχήμα φαίνεται ο κοίλος κυκλικός δίσκος μάζας M που προέκυψε από ένα δίσκο ακτίνας R από τον οποίο αφαιρέθηκε ομόκεντρος δίσκος ακτίνας r . Ζητείται η ροπή αδράνειας ως προς τους άξονες $x'x$, $y'y$ και $z'z$. Οι άξονες $x'x$, $y'y$ είναι πάνω στην επιφάνεια του δίσκου και διέρχονται από το κέντρο αυτού. Ο άξονας $z'z$ είναι κάθετος στην επιφάνεια του και διέρχεται από το κέντρο του. Θεωρείται γνωστή η ροπή ομογενούς δίσκου μάζας m και ακτίνας R ως προς άξονα κάθετο στη επιφάνειά του που διέρχεται από το κέντρο του, $I_{cm} = \frac{1}{2} m R^2$.



Ροπή αδράνειας ως προς άξονα $z'z$.

Έστω I_z η ζητούμενη ροπή αδράνειας του κοίλου κυκλικού δίσκου, $I_{o\lambda,z}$ η ροπή που θα είχε ο κυκλικός δίσκος αν ήταν συμπαγής και $I_{I,z}$ η ροπή αδράνειας του τμήματος που αφαιρέθηκε. Σύμφωνα με το 1ο θέμα $I_z + I_{I,z} = I_{o\lambda} \Rightarrow I_z = I_{o\lambda} - I_{I,z} \Rightarrow$

$$I_z = \frac{1}{2} M_{o\lambda} R^2 - \frac{1}{2} M_I r^2 \quad (1)$$

Προφανώς πρέπει οι μάζες $M_{o\lambda}, M_I$ να εκφραστούν με βάση την μάζα M του κοίλου δίσκου. Για το λόγο αυτό ας υποθέσουμε ότι η μάζα ανά μονάδα επιφάνειας - επιφανειακή

πυκνότητα - είναι σ . .. $\frac{M_{o\lambda}}{M_I} = \frac{\sigma \pi R^2}{\sigma \pi r^2} \Rightarrow \frac{M_{o\lambda}}{M_I} = \frac{R^2}{r^2} \quad (2)$...επίσης $M = M_{o\lambda} - M_I \quad (3)$. Από

τις (2) και (3) παίρνουμε $M_I = \frac{r^2}{R^2 - r^2} M$ και $M_{o\lambda} = \frac{R^2}{R^2 - r^2} M$ και αντικατάσταση στη (1) έχουμε ...

$$I_z = \frac{1}{2} \frac{R^2}{R^2 - r^2} M R^2 - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2 - r^2} M r^2 \Rightarrow I_z = \frac{1}{2} M \left(\frac{R^4}{R^2 - r^2} - \frac{r^4}{R^2 - r^2} \right) \Rightarrow$$

$$I_z = \frac{1}{2} M (R^2 + r^2) \quad (4)$$

Ροπή αδράνειας ως προς άξονα $x'x$ και $y'y$.

Για λόγους πλήρους συμμετρίας $I_x = I_y$ και από το θεώρημα των τριών καθέτων έχουμε

$$I_z = I_y + I_x \Rightarrow I_z = 2I_x \Rightarrow I_x = \frac{1}{2} I_z \xrightarrow{(4)} I_x = \frac{1}{4} M (R^2 + r^2)$$

$$\text{άρα } I_x = I_y = \frac{1}{4} M (R^2 + r^2).$$

