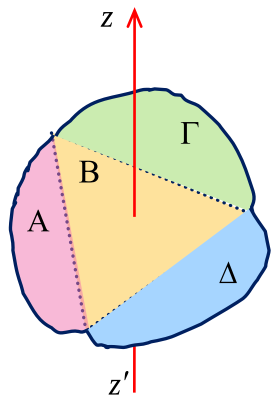
Ειδικά θέματα στη ροπή αδράνειας του στερεού.

1. Η συνολική ροπή αδράνειας ως άθροισμα επί μέρους ροπών αδράνειας.

Έστω το τυχαίο στερεό του σχήματος που αποτελείται από επιμέρους τμήματα Α,Β,Γ,Δ. Η ροπή αδράνειας του όλου στερεού ως προς τον άξονα z′z υπολογίζεται από την σχέση $\mathrm{I}_{\text{ολ},z} = \sum\limits_{i=1}^{i=n}\left(m_i r_i^2\right)$. Οι στοιχειώδεις όμως m_i όπως και οι αντίστοιχες αποστάσεις r_i από τον z′z ταξινομούνται και είναι αθροίσματα των $m_{i,A}$, $m_{i,B}$, $m_{i,\Gamma}$, $m_{i,\Delta}$ των επιμέρους τμημάτων Α, Β, Γ, Δ και απέχουν από τον z′z αντίστοιχες αποστάσεις $r_{i,A}, r_{i,B}, r_{i,\Gamma}, r_{i,\Delta}$.



Έτσι η αρχική σχέση γράφεται: $I_{ολ,z} = \sum\limits_{i=1}^{i=n}\left(m_i r_i^2\right) \Rightarrow$

$$I_{ολ,z} = \sum_{i,A=1}^{i,A=n_A}\left(m_{i,A}r_{i,A}^2\right) + \sum_{i,B=1}^{i,B=n_B}\left(m_{i,B}r_{i,B}^2\right) + \sum_{i,\Gamma=1}^{i,\Gamma=n_\Gamma}\left(m_{i,\Gamma}r_{i,\Gamma}^2\right) + \sum_{i,\Delta=1}^{i,\Delta=n_\Delta}\left(m_{i,\Delta}r_{i,\Delta}^2\right)$$

(1) και επειδή οι ροπές αδράνειας των Α,Β,Γ, Δ ως προς άξονα $z'z$ αντιστοίχως είναι ,

$$I_{A,z} = \sum_{i,A=1}^{i,A=n_A}\left(m_{i,A}r_{i,A}^2\right),\quad I_{B,z} = \sum_{i,B=1}^{i,B=n_B}\left(m_{i,B}r_{i,B}^2\right),\quad I_{\Gamma,z} = \sum_{i,\Gamma=1}^{i,\Gamma=n_\Gamma}\left(m_{i,\Gamma}r_{i,\Gamma}^2\right)\quad I_{\Delta,z} = \sum_{i,\Delta=1}^{i,\Delta=n_\Delta}\left(m_{i,\Delta}r_{i,\Delta}^2\right)$$

η σχέση (1) γράφεται $I_{ολ,z} = I_{A,z} + I_{B,z} + I_{\Gamma,z} + I_{\Delta,z}$ (2)

Άρα, η ροπή αδράνειας ενός στερεού ως προς κάποιον άξονα, που χωρίζεται σε επιμέρους τμήματα, ισούται με το **<u>άθροισμα</u>** των ροπών αδράνειας των επιμέρους τμημάτων.

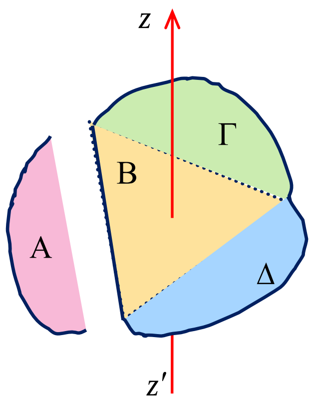
Και αν από στερεό αυτό αφαιρέσουμε ένα τμήμα (έστω το Α) , πόση είναι η ροπή αδράνειας I' του υπόλοιπου τμήματος;

$I_{ολ,z} = I_{A,z} + I_{B,z} + I_{\Gamma,z} + I_{\Delta,z} \Rightarrow$

$I_{ολ,z} = I_{A,z} + \left(I_{B,z} + I_{\Gamma,z} + I_{\Delta,z}\right) \Rightarrow$

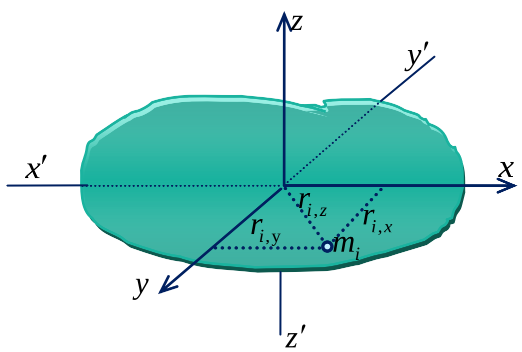
$I_{ολ,z} = I_{A,z} + I' \Rightarrow I' = I_{ολ,z} - I_{A,z}$

Άρα, η ροπή αδράνειας του υπόλοιπου ισούται με την ροπή αδράνειας του συνόλου μείον την ροπή αδράνειας του τμήματος που αφαιρέθηκε.



2. Το θεώρημα των τριών καθέτων ... στη ροπή αδράνειας .

Έστω ένα στερεό σε σχήμα λεπτής επίπεδης επιφάνειας και τρείς άξονες κάθετοι μεταξύ τους. Οι άξονες $x'x$ και $y'y$ βρίσκονται στο επίπεδο της επιφάνειας, ενώ ο άξονας $z'z$ είναι κάθετος στην επιφάνεια. Οι ροπές αδράνειας I_x, I_y και I_z ως προς τους άξονες $x'x$, $y'y$ και $z'z$ συνδέονται με την σχέση $I_z = I_x + I_y$.



Βασίλης Τσούνης www.btsounis.gr mail@btsounis.gr

Θεωρούμε την επιφάνεια ως άθροισμα στοιχειωδών μαζών m_i που κάθε μία από αυτές απέχει από τους τρείς άξονες αποστάσεις $r_{i,x}$, $r_{i,y}$ και $r_{i,z}$. Η ροπή της επιφανείας ως προς τον άξονα $z'z$ ορίζεται από την σχέση $I_z = \sum_{i=1}^{i=n}\left(m_i r_{i,z}^2\right)$ (1)

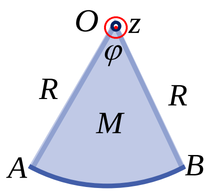
Επειδή όμως $r_{i,z}^2 = r_{i,x}^2 + r_{i,y}^2$ η ανωτέρω σχέση γράφεται $I_z = \sum_{i=1}^{i=n}\left(m_i r_{i,z}^2\right) \Rightarrow$

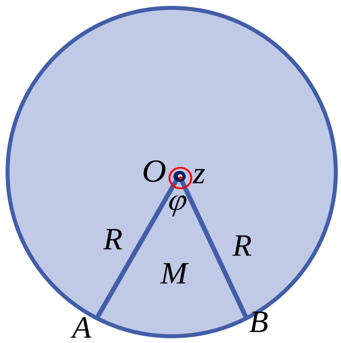
$I_z = \sum_{i=1}^{i=n}\left(m_i\left(r_{i,x}^2 + r_{i,y}^2\right)\right) \Rightarrow I_z = \sum_{i=1}^{i=n}\left(m_i r_{i,x}^2 + m_i r_{i,y}^2\right) \Rightarrow I_z = \sum_{i=1}^{i=n}\left(m_i r_{i,x}^2\right) + \sum_{i=1}^{i=n}\left(m_i r_{i,y}^2\right) \Rightarrow$

$I_z = I_x + I_y$, καθόσον $I_x = \sum_{i=1}^{i=n}\left(m_i r_{i,x}^2\right)$ και $I_y = \sum_{i=1}^{i=n}\left(m_i r_{i,y}^2\right)$.

3. Η ροπή αδράνειας ενός κυκλικού τομέα.

Ζητείται να υπολογισθεί η ροπή αδράνειας μιας ομογενούς επιφανείας σχήματος κυκλικού τομέα - ακτίνας R γωνίας φ και μάζας M - ως προς άξονα $z'z$ που διέρχεται από το κέντρο (κορυφή) του και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Δίνεται η ροπή αδράνειας ενός ομογενούς κυκλικού δίσκου ακτίνας r και μάζας m ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδό του που διέρχεται από το κέντρο του $I = \frac{1}{2}mr^2$.





Θεωρούμε το κυκλικό δίσκο (O,R) στον οποίο ανήκει ο κυκλικός τομέας και ο οποίος έχει ροπή αδράνειας ως το άξονα $z'z$,

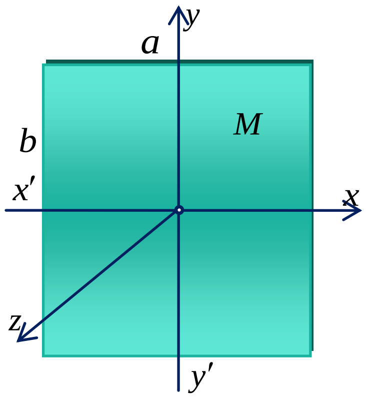
$I_{ολ} = \frac{1}{2}mr^2 \xrightarrow{r=R} I_{ολ} = \frac{1}{2}mR^2$

Ο κυκλικός δίσκος όμως μπορεί ως ένα σύνολο N κυκλικών τομέων όμοιων με τον δεδομένο τομέα ...με $N = \frac{2\pi}{\varphi}$. Αν I η ροπή αδράνειας του τομέα (OAB) αλλά και κάθε ενός από τους όμοιους N τομείς σύμφωνα με το 1ο θέμα

μπορούμε να γράψουμε $NI = I_{ολ} = \frac{1}{2}mR^2 \xrightarrow{m=NM} NI = \frac{1}{2}NMR^2 \Rightarrow I = \frac{1}{2}MR^2$

4. Η ροπή αδράνειας επίπεδης ορθογώνιας επιφάνειας.

Έστω ομογενής ορθογώνια επιφάνεια μάζας M διαστάσεων a και b. Ζητείται η ροπή αδράνειας της επιφάνειας αυτής ως προς τους άξονες $x'x$, $y'y$ και $z'z$. Οι άξονες $x'x$, $y'y$ είναι πάνω στην επιφάνεια, διέρχονται από το κέντρο της και είναι παράλληλοι με τις πλευρές a και b αντίστοιχα. Ο άξονας $z'z$ είναι κάθετος στην επιφάνεια και διέρχεται από το κέντρο αυτής. Θεωρείται γνωστή η ροπή λεπτής ράβδου μάζας m και μήκους ℓ ως προς άξονα κάθετο στη ράβδο, που διέρχεται από το κέντρο μάζας αυτής, $I_{cm} = \dfrac{1}{12} m\ell^2$.



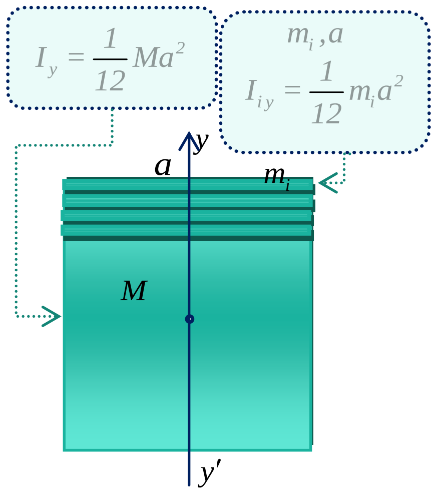
Μελέτη….

Ροπή αδράνειας ως προς άξονα $y'y$.

Θεωρούμε ότι η επιφάνεια αποτελείται από λεπτές παράλληλες "ράβδους" μάζας m_i και μήκους a όπως στο διπλανό σχήμα. Ο άξονας $y'y$ είναι κάθετος σε κάθε μία από αυτές τις "ράβδους" και διέρχεται από το μέσον - κέντρο μάζας . Έτσι η ροπή αδράνειας της κάθε μίας "ράβδου" ως προς τον $y'y$ είναι $I_{i,y} = \dfrac{1}{12} m_i a^2$. Η συνολική ροπή αδράνειας είναι

$$I_y = \sum_{i=1}^{i=n} \left(I_{i,y}\right) \quad \Rightarrow \quad I_y = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{1}{12} m_i a^2\right) \quad \Rightarrow$$

$$I_y = \frac{1}{12} a^2 \sum_{i=1}^{i=n} \left(m_i\right) \Rightarrow I_y = \frac{1}{12} Ma^2 .$$

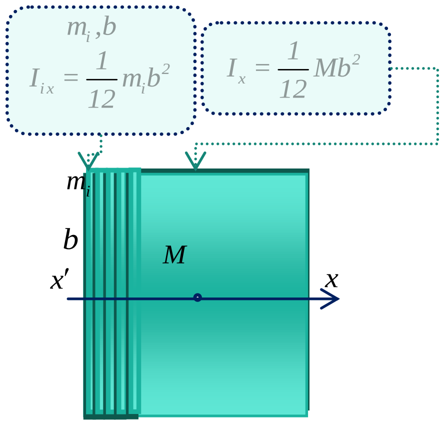


Ροπή αδράνειας ως προς άξονα $x'x$.

Θεωρούμε ότι η επιφάνεια αποτελείται από λεπτές παράλληλες "ράβδους" μάζας m_i και μήκους b όπως στο διπλανό σχήμα. Ο άξονας $x'x$ είναι κάθετος σε κάθε μία από αυτές τις "ράβδους" και διέρχεται από το μέσον - κέντρο μάζας . Έτσι η ροπή αδράνειας της κάθε μίας "ράβδου" ως προς τον $x'x$ είναι $I_{i,x} = \dfrac{1}{12} m_i a^2$. Η συνολική ροπή αδράνειας είναι $I_x = \sum_{i=1}^{i=n} \left(I_{i,x}\right) \Rightarrow$

$$I_x = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{1}{12} m_i b^2\right) \quad \Rightarrow \quad I_x = \frac{1}{12} b^2 \sum_{i=1}^{i=n} \left(m_i\right) \quad \Rightarrow$$

$$I_x = \frac{1}{12} Mb^2 .$$

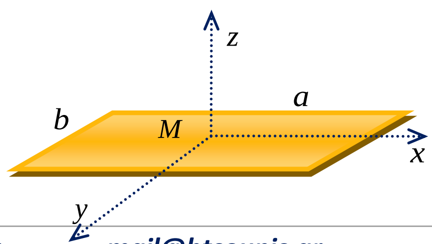


Ροπή αδράνειας ως προς άξονα $z'z$.

Σύμφωνα με το θεώρημα των τριών καθέτων για την ροπή αδράνειας θα έχουμε $I_z = I_y + I_x \Rightarrow$

3

$$I_z = \frac{1}{12} Ma^2 + \frac{1}{12} Mb^2 \Rightarrow$$

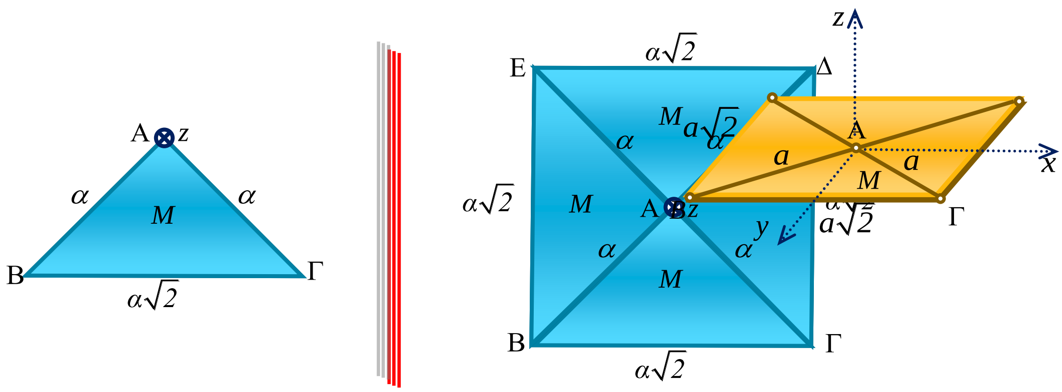


$$I_z = \frac{1}{12} M \left(a^2 + b^2\right)$$

4. Η ροπή αδράνειας τριγωνικής επιφάνειας.

Έστω ομογενής επίπεδη τριγωνική επιφάνεια μάζας M με την περίμετρό της να έχει σχήμα ορθογωνίου ισοσκελούς τριγώνου με μήκος ίσων πλευρών a. Ζητείται να υπολογισθεί η ροπή αδράνειας της επιφάνειας αυτής ως προς άξονα $z'z$ κάθετο στο επίπεδο της τριγωνικής επιφάνειας στο σημείο της κορυφής της ορθής γωνίας.

Από τη γεωμετρία του σχήματος η υποτείνουσα του ορθογωνίου ισοσκελούς τριγώνου έχει



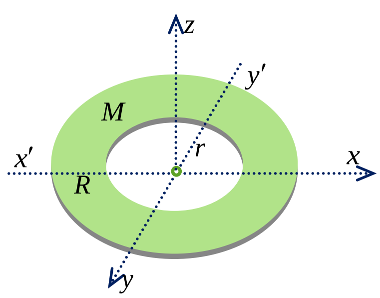
μέτρο $a\sqrt{2}$. Ας θεωρήσουμε μια τετράγωνη ομογενή λεπτή επιφάνεια πλευράς $a\sqrt{2}$. Αυτή θα αποτελείται από τέσσερες ίσες τριγωνικές επιφάνειες σε πλήρη συμμετρία. Λόγω της πλήρους ομοιομορφίας αυτών κάθε μία θα έχει ως προς τον άξονα $z'z$ την ίδια ροπή αδράνειας I . Η τετράγωνη επιφάνεια θα έχει ροπή αδράνειας $I_{ολ} = 4I$. Σύμφωνα όμως με το προηγούμενο θέμα 4, η ροπή αδράνειας της τετράγωνης επιφάνειας ως προς $z'z$ είναι

$$I_{ολ} = \frac{1}{12} M_{ολ} \left[\left(\alpha\sqrt{2}\right)^2 + \left(\alpha\sqrt{2}\right)\right]^2 \xrightarrow[I_{ολ}=4I]{M_{ολ}=4M} 4I = \frac{1}{12} 4M \left[\left(\alpha\sqrt{2}\right)^2 + \left(\alpha\sqrt{2}\right)\right]^2 \quad \Rightarrow$$

$$I = \frac{1}{12} M \left[\left(\alpha\sqrt{2}\right)^2 + \left(\alpha\sqrt{2}\right)\right]^2 \Rightarrow I = \frac{1}{3} M\alpha^2$$

5. Η ροπή αδράνειας ενός κοίλου κυκλικού δίσκου.

Στο σχήμα φαίνεται ο κοίλος κυκλικός δίσκος μάζας M που προέκυψε από ένα δίσκο ακτίνας R από τον οποίο αφαιρέθηκε ομόκεντρος δίσκος ακτίνας r. Ζητείται η ροπή αδράνειας ως προς τους άξονες $x'x$, $y'y$ και $z'z$. Οι άξονες $x'x$, $y'y$ είναι πάνω στην επιφάνεια του δίσκου και διέρχονται από το κέντρο αυτού. Ο άξονας $z'z$ είναι κάθετος στην επιφάνεια του και διέρχεται από το κέντρο του. Θεωρείται γνωστή η ροπή ομογενούς δίσκους μάζας m και ακτίνας R ως προς άξονα κάθετο στη επιφάνειά του που διέρχεται από το κέντρο του, $I_{cm} = \frac{1}{2} mR^2$.



Ροπή αδράνειας ως προς άξονα $z'z$.

Έστω I_z η ζητούμενη ροπή αδράνειας του κοίλου κυκλικού δίσκου, $I_{ολ,z}$ η ροπή που θα είχε ο κυκλικός δίσκος αν ήταν συμπαγής και $I_{1,z}$ η ροπή αδράνειας του τμήματος που αφαιρέθηκε. Σύμφωνα με το 1ο θέμα $I_z + I_{1,z} = I_{ολ} \Rightarrow I_z = I_{ολ} - I_{1,z} \Rightarrow$ $I_z = \frac{1}{2}M_{ολ}R^2 - \frac{1}{2}M_1 r^2$ (1)

Προφανώς πρέπει οι μάζες $M_{ολ}, M_1$ να εκφρασθούν με βάση την μάζα M του κοίλου δίσκου. Για το λόγο αυτό ας υποθέσουμε ότι η μάζα ανά μονάδα επιφάνειας - επιφανειακή πυκνότητα - είναι σ . .. $\frac{M_{ολ}}{M_1} = \frac{\sigma\pi R^2}{\sigma\pi r^2} \Rightarrow \frac{M_{ολ}}{M_1} = \frac{R^2}{r^2}$ (2) ...επίσης $M = M_{ολ} - M_1$ (3) . Από τις (2) και (3) παίρνουμε .... $M_1 = \frac{r^2}{R^2 - r^2}M$ και $M_{ολ} = \frac{R^2}{R^2 - r^2}M$ και αντικατάσταση στη (1) έχουμε ...

$$I_z = \frac{1}{2}\frac{R^2}{R^2 - r^2}MR^2 - \frac{1}{2}\frac{r^2}{R^2 - r^2}Mr^2 \Rightarrow I_z = \frac{1}{2}M\left(\frac{R^4}{R^2 - r^2} - \frac{r^4}{R^2 - r^2}\right) \Rightarrow$$

$$I_z = \frac{1}{2}M\left(R^2 + r^2\right) \quad (4)$$

Ροπή αδράνειας ως προς άξονα $x'x$ και $y'y$.

Για λόγους πλήρους συμμετρίας $I_x = I_y$ και από το θεώρημα των τριών καθέτων έχουμε

$$I_z = I_y + I_x \Rightarrow I_z = 2I_x \Rightarrow I_x = \frac{1}{2}I_z \xrightarrow{(4)} I_x = \frac{1}{4}M\left(R^2 + r^2\right)$$

άρα $I_x = I_y = \frac{1}{4}M\left(R^2 + r^2\right)$.