

2. ΦΘΙΝΟΥΣΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ - ΑΠΛΑΥΤΗΤΕΙΣ

A. Ερωτήσεις κλειστού τύπου.

2.1-δ

2.3-δ

2.5-δ

2.7-δ

2.9-δ

2.2-δ

2.4-β

2.6-β, δ

2.8-δ

2.10-β

B. Ερωτήσεις κατανόησης.

2.11

$$t_0 = 0$$

$$t = \frac{N}{2}T$$

$$t_2 = NT$$

$$A_0 = 10\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$A_1 = ?$$

$$A_2 = 5\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} \Rightarrow A_1 = \sqrt{A_0 A_2} = \sqrt{10\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2}} = \sqrt{100} \Rightarrow A_1 = 10 \text{ cm}$$

... και διαφορετικά ...

$$A = A_0 e^{-\lambda t} \xrightarrow{t=NT} 5\sqrt{2} = 10\sqrt{2} e^{-NT} \Rightarrow e^{-NT} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$A = A_0 e^{-\lambda t} \xrightarrow{t=\frac{N}{2}T} A = 10\sqrt{2} e^{-\frac{N}{2}T} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = 10\sqrt{2} (e^{-NT})^{1/2} = 10\sqrt{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2} = 10\sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{2}} = 10 \text{ cm} \Rightarrow A = 10 \text{ cm}$$

Άρα σωστή η β' σχέση (α)

2.12

$$\bullet \quad \left. \begin{array}{ll} t_0 = 0 & t = NT \\ E_0 = \frac{1}{2} D A_0^2 & E = \frac{1}{2} D A^2 \end{array} \right\} \Rightarrow E = \frac{E_0}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{2} D A_0^2 \Rightarrow A = \frac{A_0}{\sqrt{2}} > \frac{A_0}{2}$$

$$\bullet \quad \left. \begin{array}{lll} t_0 = 0 & t_1 = NT & t_2 \\ A_0 & A_1 = \frac{A_0}{\sqrt{2}} & A_2 = \frac{A_0}{2} \end{array} \right\} \text{ παρατηρούμε ότι}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{A_0}{\frac{A_0}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} \\ \frac{A_0}{\frac{A_0}{2}} = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2}$$

... που συμβαίνει και $t_1 - 0 = t_2 - t_1 \Rightarrow t_2 = 2t_1 \Rightarrow t_2 = 2NT$

... και διαφορετικά...

$$A = A_0 e^{-\lambda t} \xrightarrow{t=NT} \frac{A_0}{2} = A_0 e^{-\lambda NT} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\lambda NT} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\lambda 2NT} \quad (1)$$

$$A = A_0 e^{-\lambda t} \longrightarrow \frac{A_0}{2} = A_0 e^{-\lambda t} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\lambda t} \quad (2)$$

$$(1), (2) \quad e^{-\lambda t} = e^{-\lambda 2NT} \Rightarrow t = 2NT$$

Άρα βωβή ή η βχβή (α)

2.13

$t_0 = 0$	$1T$	$2T$	$3T$	$(N-1)T$	NT
A_0	A_1	A_2	A_3	A_{N-1}	A_N
E_0	E_1	E_2	E_3	E_{N-1}	E_N

α. Ανα περίοδο (άλλα και στα ογάρδα περίοδων) έχουμε σταθερό ποσοστό γέωγος τον πλάτος και τη ενέργεια. Έτσι το ποσοστό γέωγος τον πλάτος είναι όμοιο στο $[t_0=0, 1T]$ δηλαδή 80%, άρα

$$\left. \begin{array}{l} A_1 = 0,8 A_0 \\ A_2 = 0,8 A_1 \\ A_3 = 0,8 A_2 \\ \vdots \\ A_N = 0,8 A_{N-1} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{με ποσό} \\ \text{και γέωγ} \\ \text{παίρνουμε} \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_N = 0,8^N A_0 \\ \text{Άρα βωβή ή α.β} \end{array} \right.$$

β.

$$\frac{E_N}{E_{N-1}} = \frac{\frac{1}{2} D A_N^2}{\frac{1}{2} D A_{N-1}^2} = \left(\frac{A_N}{A_{N-1}} \right)^2 = \left(\frac{0,8 A_{N-1}}{A_{N-1}} \right)^2 = 0,64 \Rightarrow E_N = 0,64 E_{N-1}$$

$$\eta\% = \frac{\Delta E}{E_{N-1}} 100\% = \frac{E_N - E_{N-1}}{E_{N-1}} 100\% = \frac{-0,36 E_{N-1}}{E_{N-1}} 100\% = -36\%$$

Άρα βωβή ή β.β

2.14	$t_0=0$	$1T$	$2T$	$3T$
	A_0	A_1	A_2	A_3

Στο $[0, 3T]$ το ποσοστό μείωσης των πλάτους είναι 97,3% άρα το ποσοστό διατήρησης των πλάτους είναι 2,7% ...

$A_3 = \frac{2,7}{100} A_0 = 2,7 \cdot 10^{-3} A_0$ (1). Έστω x το κλάσμα διατήρησης των πλάτους ανά περίοδο, οπότε

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= x A_0 \\ A_2 &= x A_1 \\ A_3 &= x A_2 \end{aligned} \right\} \text{ με πολλαπλασιάζω}$$

$$A_3 = x^3 A_0 \xrightarrow{(1)} 2,7 \cdot 10^{-3} A_0 = x^3 A_0 \text{ ή } x = 0,3, \text{ άρα } A_1 = 0,3 A_0$$

Σωστή η σχέση (δ)

2.15	$t_0=0$	$1T$	$2T$	$3T$	$(N-1)T$	NT
	A_0	A_1	A_2	A_3	A_{N-1}	A_N

Το κλάσμα διατήρησης των πλάτους είναι ίδιο ανά περίοδο

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \gamma A_0 \\ A_2 &= \gamma A_1 \\ A_3 &= \gamma A_2 \\ \vdots \\ A_N &= \gamma A_{N-1} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{με πολλαπλασιάζω} \\ \text{κατά νέμει} \\ \text{παιρνώντας} \end{array} \left[\begin{array}{l} A_1 A_2 A_3 \dots A_N = \gamma^N A_0 A_1 A_2 \dots A_{N-1} \Rightarrow \\ \dots A_N = \gamma^N A_0 \end{array} \right]$$

Σωστή η σχέση (δ)

2.16

$$1^{\text{η}} \text{ παρατήρηση } A_1 = A_0 e^{-\lambda t} \xrightarrow[t_1 = A_0/2]{t=2t_1} \frac{A_0}{2} = A_0 e^{-\lambda 2t_1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-2\lambda t_1} \quad (1)$$

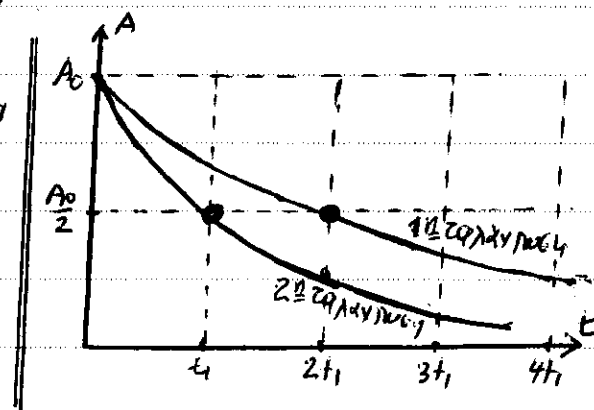
$$2^{\text{η}} \text{ παρατήρηση } A_2 = A_0 e^{-\lambda' t} \xrightarrow[t_2 = A_0/2]{t=t_1} \frac{A_0}{2} = A_0 e^{-\lambda' t_1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\lambda' t_1} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow e^{-2\lambda t_1} = e^{-\lambda' t_1} \Rightarrow 2\lambda = \lambda' \dots$$

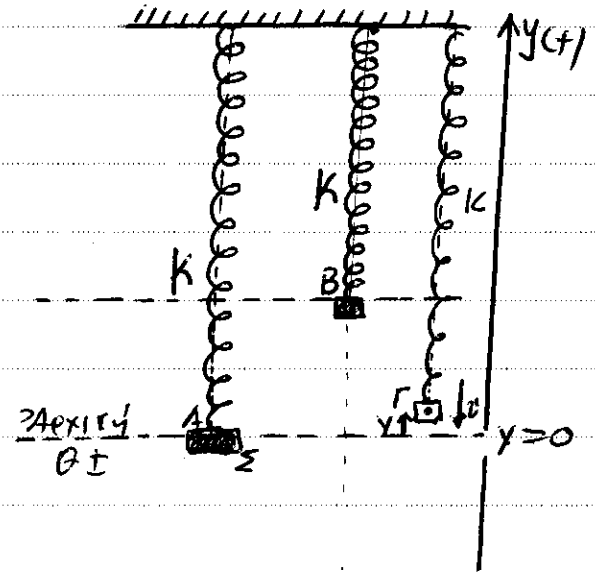
$$A_2 = A_0 e^{-2\lambda t}$$

Άρα σωστή η (β)



2.17

Η υπερβολοειδής της ταχύτητας
 δίνεται στο τέλος της επιτακτο-
 γένης κίνησης και άφευξης
 πριν την φρεσση της ελαστικό-
 γόφης κίνησης ... και
 αυτό δίνεται εκεί όπου
 $a=0 \Rightarrow \Sigma F=0 \Rightarrow -Dy-bv=0$
 = δηλαδή στη θέση-αποκατάστα-
 ση $y=-\frac{b}{D}v$ (1)

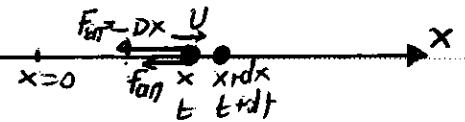


Έτσι όταν το σώμα κατερχεται $v>0$ και $\Sigma F=0$ σε
 θέση $y>0$ δηλ πριν φθάσει στο A.
 Όταν το σώμα ανέρχεται $v<0$ και $\Sigma F=0$ σε θέση $y<0$
 δηλ πριν φθάσει στο A

Σωστή η πρόταση (β)

2.18

Στη φθίνουσα ταλάντωση x'
 του ελαττωτικού ταλαντω-
 τής χάνει ενέργεια



γέωση του έργου που αποσβεστεί $F_{αν} = -bv$ / $F_{αν} = -0,5 v \cdot 6t$
 Έτσι $\frac{dE}{dt} = \frac{dW_{αν}}{dt} = \frac{F_{αν} \cdot dx}{dt} = F_{αν} v = -bv \cdot v = -bv^2$ (ρυθμός μεταβολής)

... ρυθμός γέωσης $\frac{|dE|}{dt} = bv^2$ (1)

Στην άσκηση $b=0,5 \text{ kg/s}$ και για $F_{αν}=2 \text{ N}$... $2 = 0,5 |v|$
 $\Rightarrow |v|=4 \text{ m/s}$

(1) $\Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0,5 \cdot 4^2 = 8 \text{ J/s}$ ήρα σωστή η σχέση (α)

2.19

	$t_0=0$	$1T$	$2T$
$l = 0,90m$	$l_0 = 0,40m$	l_1	$l_2 = 0,58m$
	$A_0 = 0,50m$	A_1	$A_2 = 0,32m$

α) $\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} \Rightarrow A_1 = \sqrt{A_0 A_2} = \sqrt{0,50 \cdot 0,32} \Rightarrow A_1 = 0,40m$.

α-βωβω

β) $\frac{A_1}{A_0} = \frac{0,40}{0,50} = 0,80$. Ποσοστό διαμείωσης 80%.

Ποσοστό αύξησης 20% β-βωβω

γ) $\frac{E_1}{E_0} = \left(\frac{0,40}{0,90}\right)^2 = 0,64$ Ποσοστό διαμείωσης 64%.

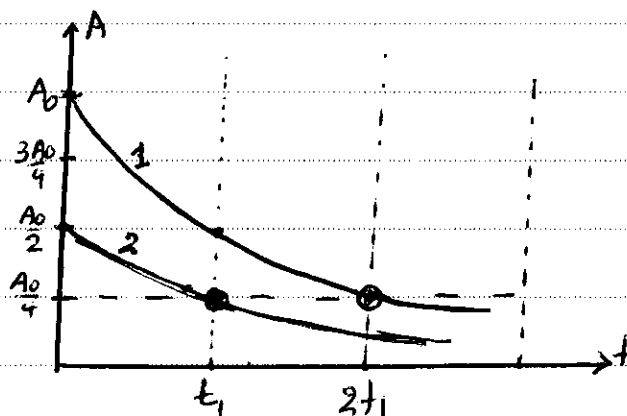
Ποσοστό αύξησης 36% γ-γ'θ'θ'ς

2.20

Παράγωγος (1) :

$$A = A_0 e^{-\lambda t} \Rightarrow \frac{A_0}{4} = A_0 e^{-\lambda 2t_1} \Rightarrow \frac{1}{2^2} = (e^{-\lambda t_1})^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\lambda t_1} \quad (1)$$



Παράγωγος (2) :

$$A = \frac{A_0}{2} e^{-\lambda' t} \rightarrow \frac{A_0}{4} = \frac{A_0}{2} e^{-\lambda' t_1} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\lambda' t_1} \xrightarrow{(1)} \lambda' = \lambda \Rightarrow \frac{b'}{2\pi\nu} = \frac{b}{2\pi\nu} \Rightarrow b' = b$$

$$\Rightarrow b' = b = 0,5 \text{ kg s}^{-1}$$

α) 1η παράγωγος $F_{\text{αν}} = -b v = -0,5 v \text{ (SI)}$

2η παράγωγος $F_{\text{αν}}' = -b' v = -0,5 v \text{ (SI)}$ άρα α-γ'θ'θ'ς

β) 1η παράγωγος : Χρόνος υποδιπλασιασμού πλάτους t'

$$A = A_0 e^{-\lambda t} \rightarrow \frac{A_0}{2} = A_0 e^{-\lambda t'} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\lambda t'} \xrightarrow{(1)} t' = t_1$$

2η παράγωγος : Από το διάγραμμα φαίνεται ότι ο χρόνος υποδιπλασιασμού του πλάτους είναι επίσης t_1 .
άρα β-βωβω

2.21 $t_0 = 0$ $10T$ $\left[15T \right]$ $20T$ $30T$ $40T$
 A_0 $A_{10} = 20cm$ A_{15} $A_{20} = 16cm$ $A_{30} = 13,8cm$ $A_{40} = 10,24cm$

$$a) \frac{A_{20}}{A_{30}} = \frac{A_{30}}{A_{40}} \Rightarrow A_{30} = \sqrt{A_{20} \cdot A_{40}} = \sqrt{16 \cdot 10,24} \Rightarrow A_{30} = 12,8cm$$

$$\frac{A_{10}}{A_{20}} = \frac{A_{20}}{A_{30}} \Rightarrow A_{10} = \frac{A_{20}^2}{A_{30}} \Rightarrow A_{10} = \frac{16^2}{12,8} \Rightarrow A_{10} = 20cm$$

από α-6ω6π'

$$b) \frac{E_{15}}{E_{10}} = \frac{\frac{1}{2}DA_{15}^2}{\frac{1}{2}DA_{10}^2} = \left(\frac{A_{15}}{A_{10}} \right)^2 \quad (1)$$

$$\frac{A_{10}}{A_{15}} = \frac{A_{15}}{A_{20}} \Rightarrow A_{15}^2 = A_{10} \cdot A_{20} = 20cm \cdot 16cm = 320cm^2$$

$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} \frac{E_{15}}{E_{10}} = \frac{320}{20^2} = \frac{320}{400} = 0,80$$

Από το 6ω6π' διατηρούμε ενέργεια στα 5 περίοδοι 80%
 το 6ω6π' γέμνει στα 5 περίοδοι 20%
 β-6ω6π'

2.22

$$m=1\text{ kg}, A_0=0,40\text{ m}=40\text{ cm}, F_{\text{ext}}=-\frac{Q_{\text{ext}}}{\pi} \text{ (SI)}$$

$$A-1) \quad 1=\frac{b}{2m}=\frac{\ell_{42}}{2\pi} \text{ s}^{-1} \quad \text{V6TEPA OTTO'}$$

$$10 \text{ TAPA TΩ6EIS} \quad E_0=E_0 \cdot |W_{10}|=\frac{25}{100} E_0$$

$$\Rightarrow E=\frac{25}{100} E_0 \Rightarrow A_{10}=\frac{1}{2} A_0$$

$$A=A_0 e^{-\lambda t} \Rightarrow \frac{A_0}{10}=A_0 e^{-\lambda 10T} \Rightarrow \frac{1}{2}=e^{-\lambda 10T} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \ell_{42}=10T \Rightarrow \ell_{42}=\frac{\ell_{42}}{2\pi} 10T \Rightarrow T=\frac{2\pi}{10} \text{ s}$$

$$\Rightarrow T=0,628 \text{ s}$$

$$A-2) \quad \omega=\frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega=10 \text{ rad/s} \quad \text{και προσεγγιστικά}$$

$$\delta \ell / \ell_{\text{ωρα}} \text{ με την ωδκηση } \omega_0 \approx \omega, \text{ όρα}$$

$$D=K=m\omega_0^2=1 \cdot 10^2 \Rightarrow K=100 \text{ N/m}$$

$$A-3) \quad A_{40}=A_0 e^{-\lambda \cdot 10 \cdot T} \Rightarrow A_{40}=40 (e^{-\lambda \cdot 10T})^4 \xrightarrow{(1)} A_{40}=40 \left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{40}{16} \text{ cm}$$

$$\Rightarrow A_{40}=2,5 \text{ cm}$$

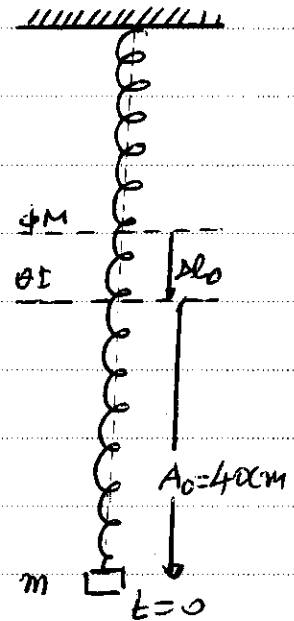
$$B) \quad \text{Την } t=6,28 \text{ s}=10 \cdot 0,628 \text{ s}=10T \text{ το πλάτος είναι}$$

$$A=A_0 e^{-\lambda t} \Rightarrow A_{10}=0,40 e^{-\lambda 10T} \xrightarrow{(1)} A_{10}=0,40 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow A_{10}=0,20 \text{ m}$$

$$\dots \text{ και η παραμόρφωση των ελατηρίων (βλ 6x η 49)}$$

$$\Delta \ell'=\Delta \ell_0 + A_{10}=\frac{mg}{K} + A_{10} \Rightarrow \Delta \ell'=\frac{1 \cdot 10}{100} + 0,20 \Rightarrow \Delta \ell'=0,30 \text{ m}$$

$$F_{\text{ελ}}=K \Delta \ell' \Rightarrow F_{\text{ελ}}=100 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 0,3 \text{ m} \Rightarrow F_{\text{ελ}}=30 \text{ N}$$



2.23

$$A) \quad \frac{|\Delta \ell|}{E_0} 100=\frac{1500}{16} \text{ η } \frac{|E_{10}-E_0|}{E_0}=\frac{15}{16} \text{ η } E_{10}=\frac{E_0}{16} \Rightarrow \frac{1}{2} D A_{10}^2=\frac{1}{16} \frac{1}{2} D A_0^2$$

$$\Rightarrow A_{10}=A_0/4=0,10 \text{ m}$$

$$A=A_0 e^{-\lambda t} \Rightarrow A=0,40 e^{-\lambda \ell_{42} \cdot t} \Rightarrow 0,10=0,40 e^{-\lambda \ell_{42} \cdot 10T} \Rightarrow 2^{-2}=e^{-\lambda \ell_{42} \cdot 10T}$$

$$\Rightarrow 2 \ell_{42}=0,5 \cdot \ell_{42} \cdot 10T \Rightarrow T=0,4 \text{ s}$$

$$E=\frac{E_0}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} D A^2=\frac{1}{2} \frac{1}{2} D A_0^2 \Rightarrow A=\frac{A_0}{\sqrt{2}}$$

$$A=A_0 e^{-\lambda t} \Rightarrow \frac{A_0}{\sqrt{2}}=A_0 e^{-\lambda t'} \Rightarrow 2^{-1/2}=e^{-\lambda t'} \Rightarrow -\frac{1}{2} \ell_{42}=-\lambda t' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \ell_{42}=0,5 \cdot \ell_{42} t' \Rightarrow t'=1 \text{ s}$$

B) Από το πρόβλημα $T_0 \approx T = 0,4 \text{ s}$ άρα $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 5\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
 $D = m\omega_0^2$ ή $K = m\omega_0^2$ ή $100 = m(5\pi)^2$ ή $100 = m \cdot 250^2$
 $\Rightarrow 100 = m \cdot 25 \cdot 10 \Rightarrow m = 0,4 \text{ kg}$

Γ-1) $\lambda = \frac{b}{2\pi m} \Rightarrow b = 2\pi m \lambda = 2 \cdot 0,4 \cdot 0,5 \cdot 4\pi \Rightarrow b = 0,28 \text{ kg s}^{-1}$
 $F_{\text{drag}} = -b v \Rightarrow F_{\text{drag}} = -0,28 v \text{ (SI)}$

Γ-2) Η ταχύτητα φερόμενου είναι εκεί όπου $\Sigma F = 0 \Rightarrow$
 $-Dx - b v_{\text{max}} = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{K} v_{\text{max}} \Rightarrow x = -\frac{0,28}{100} (-6) \Rightarrow x = 1,68 \text{ cm}$
 Σχόλιο: Έδώ η φερόμενη ταχύτητα της ταλάντωσης δεν ανέρχεται
 στην θέση $x=0$

Δ) $E_0 = \frac{1}{2} D A_0^2 = \frac{1}{2} 100 \cdot 0,4^2 \Rightarrow E_0 = 8 \text{ J}$
 $E_{10} = \frac{E_0}{16} \Rightarrow E_{10} = \frac{8}{16} \Rightarrow E_{10} = 0,5 \text{ J}$

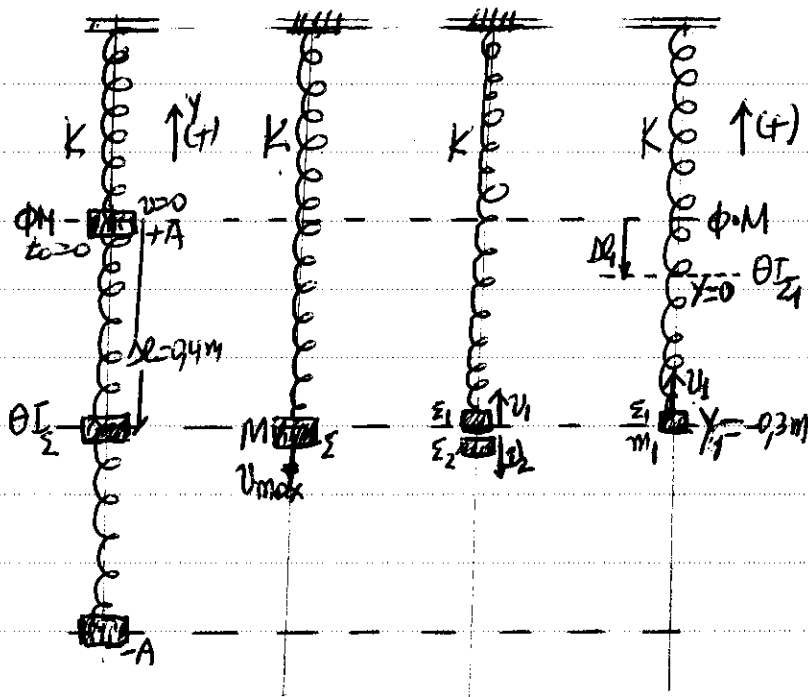
$\bar{P} = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{[0,5 - 8] \text{ J}}{10 \text{ s}} = \frac{-7,5 \text{ J}}{10 \cdot 0,4 \text{ s}} \Rightarrow \bar{P} = -1,875 \text{ J/s}$

Ε) $\frac{dE}{dt} = -b v^2$ (... αποδείξτε το...) $\Rightarrow \frac{dE}{dt} = -4,48 \text{ J/s}$

Άρα έχουμε ξανά με ποσό $\left| \frac{dE}{dt} \right| = 4,48 \text{ J/s}$

2.24

- A) Η θέση ισορροπίας της $M=4\text{kg}$ προδίδεται από τη σχέση $\Sigma F_y=0$
 $\Rightarrow K\Delta l = Mg \Rightarrow \Delta l = 0,4\text{m}$. Την $t=0$
 ο ταλαντωτής Σ έχει $v=0$
 και αφοσώκρυνται από την Θ
 $y = \Delta l = 0,4\text{m}$, όρα είναι στην
 άκραία θέση και ωνικά $A=0,4\text{m}$
 $D=K=M\omega^2 \Rightarrow \omega = 5\text{rad/s}$
 $v_{\max} = \omega A$ ή $v_{\max} = 2\text{m/s}$



B) $\vec{P}_{0x} = 6\text{rad} \Rightarrow -Mv_{\max} = -m_2 v_2 + m_1 v_1 \Rightarrow -4 \cdot 2 = -3 \cdot 4 + 1 v_1 \Rightarrow v_1 = 4\text{m/s}$

Η θέση ισορροπίας του ταλαντωτή Σ_1 προδίδεται από τη σχέση
 $K\Delta l_1 = m_1 g \Rightarrow \Delta l_1 = 0,1\text{m}$. Μόλις αρχίσει η ταλάντωση του Σ_1 : $y_1 = -0,3\text{m}$ & $v_1 = 4\text{m/s}$

B.1) Από την διατήρηση ενέργειας του ταλαντωτή m_1 έχουμε

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} K y_1^2 = \frac{1}{2} K A_1^2 \Rightarrow 14^2 + 100 (-0,3)^2 = 100 A_1^2 \Rightarrow A_1 = 0,5\text{m}$$

B.2) $\frac{dK}{dt} = -D y_1 v_1 \stackrel{5\text{I}}{=} -100 (-0,3) (+4) \Rightarrow \frac{dK}{dt} = 120 \frac{\text{J}}{\text{s}}$

Γ.1) $A_1 = A_{01} e^{-\frac{\ln 2}{T} t} \Rightarrow \frac{A_{01}}{2} = A_1 e^{-\frac{\ln 2}{T} N T} \Rightarrow \ln 2 = \frac{\ln 2}{T} N \cdot 0,7 \Rightarrow N = 10$ ταλαντώσεις

Γ.2) Υπάρχει από $N'=30$ ταλαντώσεις το πρώτος είναι $A_1 = A_{01} e^{-\frac{\ln 2}{T} N' T} \Rightarrow$
 $\Rightarrow A_1 = 0,5 e^{-\frac{\ln 2}{T} \cdot 30 \cdot 0,7} \Rightarrow A_1 = 0,5 \cdot e^{-30 \ln 2} \Rightarrow A_1 = \frac{0,5}{8} \Rightarrow A_1 = 6,25\text{cm}$

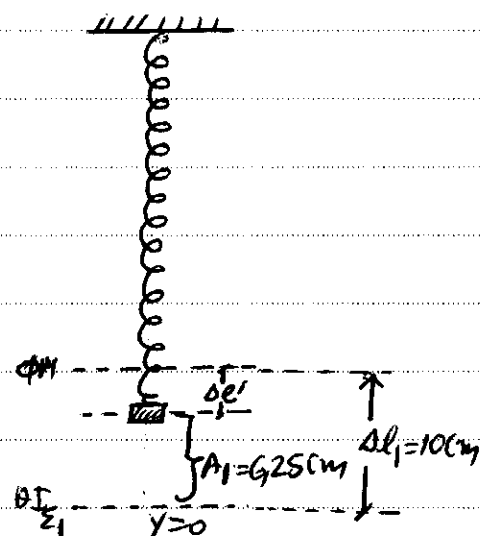
Έπειτα τη στιγμή το ελατήριο

έχει επιμήκυνση $\Delta l' = 3,75\text{cm}$

(βλ σχήμα)

$$\Delta l' = \Delta l_1 - A_1 = 10\text{cm} - 6,25\text{cm}$$

$$\Rightarrow \Delta l' = 3,75\text{cm}$$



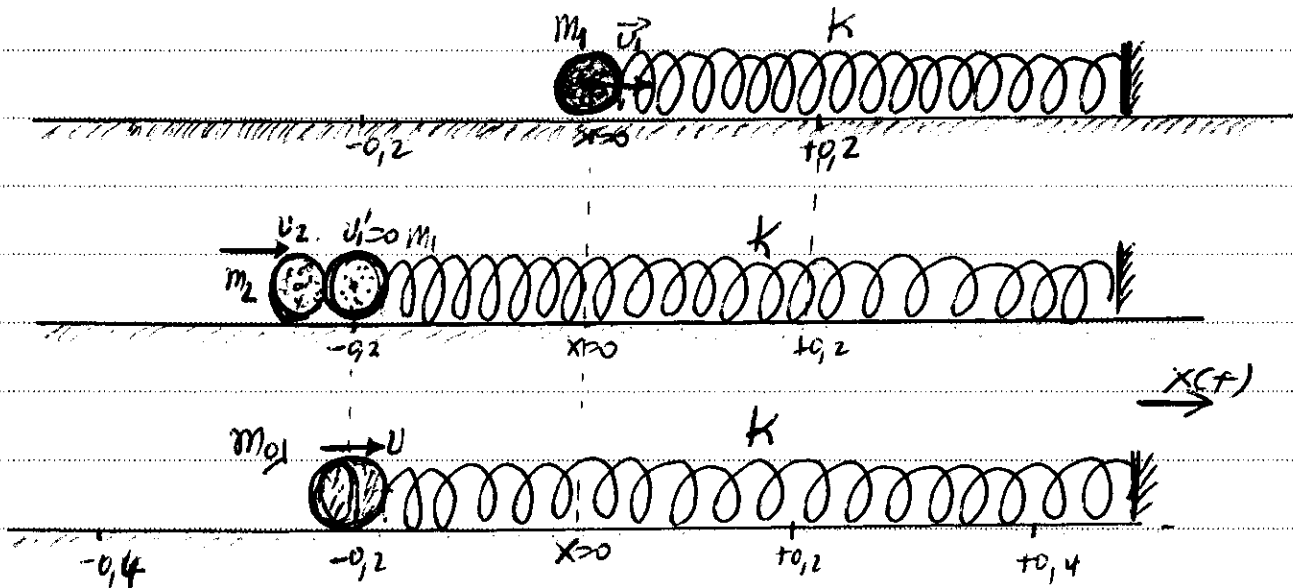
2.25

$$k = 100 \text{ N/m}$$

$$m_1 = 1 \text{ kg}$$

$$v_1 = 2 \text{ m/s}$$

$$m_2 = 3 \text{ kg}$$



α) $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} = 10 \text{ rad/s}$

$$v_1 = v_{1,\max} = \omega A_1 \Rightarrow 2 = 10 A_1 \Rightarrow A_1 = 0.2 \text{ m}$$

β) $T_1 = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{10} = 0.2\pi$ $\frac{\Delta t}{T_1} = \frac{0.15\pi}{0.2\pi} = \frac{3}{4} \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{3}{4} T_1 = 0.15\pi$ $\Rightarrow$ $\Delta t_1 = 0.15\pi$ $\Rightarrow$ $\Delta t_1 = 0.471 \text{ s}$

$$P_2 = 6 \text{ rad/s} \Rightarrow m_2 v_2 + 0 = m_1 v \Rightarrow 3 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} = 4 v \Rightarrow v = \sqrt{3} \text{ m/s}$$

Μόλις φεχθεί η ταρσοειδής Σ_1, Σ_2 ($t=0$) $\Rightarrow x = -0.2 \text{ m}$ $v = +\sqrt{3} \text{ m/s}$

$$\frac{1}{2} m_2 v^2 + \frac{1}{2} D x^2 = \frac{1}{2} D A^2 \xrightarrow{D=k} A = \sqrt{x^2 + \frac{m_2 v^2}{k}} \Rightarrow A = 0.4 \text{ m}$$

$$x = A \sin(\omega t + \phi_0) \Rightarrow x = 0.4 \sin(\omega t + \phi_0) \quad \dots \quad D = k = m_2 \omega^2$$

$$\Rightarrow 100 = 4 \omega^2 \Rightarrow \omega = 5 \text{ rad/s} \quad \dots \quad x = 0.4 \sin(5t + \phi_0) \quad \frac{t=0}{x=-0.2 \text{ m}}$$

$$\dots \quad x = 0.4 \sin(5t + \frac{11\pi}{6}) \quad \text{και} \quad v = 2 \sin(5t + \frac{11\pi}{6}) \quad (5 \text{ I})$$

δ) $t_0 = 0 \quad 1T \quad 2T \quad 3T \quad 4T$

$$A_0 = 40 \text{ cm}$$

$$A_4 = 2.5 \text{ cm}$$

$$A_4 = A_0 e^{-1T} \Rightarrow 2.5 = 40 e^{-1T} \Rightarrow \frac{2.5}{40} = e^{-1T} \Rightarrow 5 \cdot 10^{-4} = (e^{-1T})^4 \Rightarrow e^{-1T} = 0.5(1)$$

2867ω t' $\Rightarrow$ $A = A_0 e^{-1T} \Rightarrow A_0 = A_0 e^{-1T}$

$\Rightarrow 0.5 = e^{-1T} \quad (2)$ $\Rightarrow$ $T = 1T \Rightarrow t' = T \Rightarrow t' = \frac{2\pi}{5} \Rightarrow t' = 0.4\pi \text{ s}$

ε) Για $t_0 = 0 \quad A = A_0 \quad E_0 = \frac{1}{2} D A_0^2$ $\Rightarrow$ $E_1 = \frac{1}{2} D A_1^2$

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{\frac{1}{2} D A_1^2}{\frac{1}{2} D A_0^2} = \left(\frac{A_1}{A_0}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0.25 \quad \text{Ποσοστό διατήρησης } 25\%$$

Ποσοστό γ $\Rightarrow$ 75%

2.26

A-1) Θεωρούμε την κατάσταση του δίσκου $M_1 g = k \Delta l_1$

$$\Rightarrow \Delta l_1 = 0,10 \text{ m}, D_1 = k = M_1 \omega_1^2 \Rightarrow \omega_1 = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$v = v_{\text{max}} = \omega_1 A_1 \Rightarrow A_1 = 0,2 \text{ m}$$

$$A-2) \Delta t_1 = \frac{3T_1}{4} = \frac{3}{4} \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{3\pi}{20} \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{3\pi}{20} \text{ s}$$

B-1) Η θεώρηση της κατάστασης του συστήματος προ-

σδιορίζεται από την σχέση $(M_1 + m_2)g = k \Delta l$

$$\Rightarrow \Delta l = 0,4 \text{ m}. \text{ Τη στιγμή που το σώμα } g$$

αφήνεται στο δίσκο ($y = +0,5 \text{ m}, v = 0$)ώρα το πλάτος είναι $A_0 = 0,50 \text{ m}$ B-2) Για το σύστημα $D = k = (M_1 + m_2)\omega^2$

$$\Rightarrow \omega = 9 \text{ rad/s} \dots \text{ Η σταθερά ελαστικότητας του } \Sigma$$

$$\text{είναι } D' = m_2 \omega^2 = 75 \text{ N/m}. \text{ Σε κάθε το χρόνο της θέσης}$$

$$\text{που τον ταλαντώνει } \Sigma \text{ ισχύει } F_y = -D'y \Rightarrow$$

$$F - m_2 g = -D'y \Rightarrow F = m_2 g - D'y. \text{ Για να υπάρχει}$$

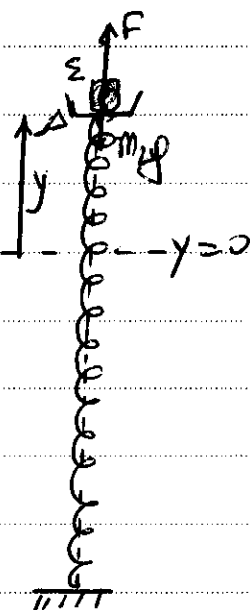
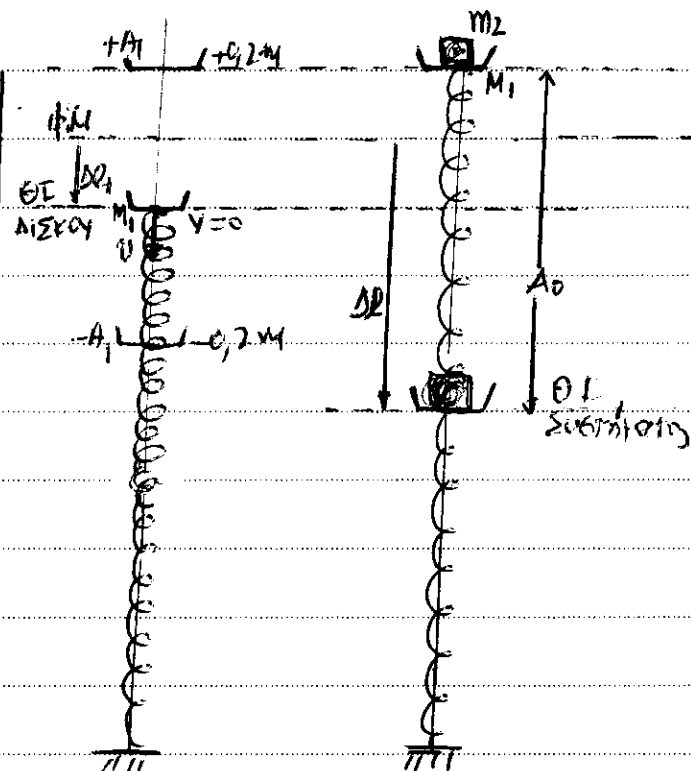
$$\text{επαφή πρέπει } F \geq 0 \text{ ή } m_2 g - D'y \geq 0 \text{ ή } y \leq 0,4 \text{ m}$$

Αν δεν υπήρχε η συγκεκριμένη στη θέση $y = +0,4 \text{ m}$ το Σ θα έχανε την επαφή με το δίσκο.Τώρα πάνω από την $y = 0,4 \text{ m}$ θα η συμπερι-γή του σώματος δύναμη μεταξύ των Σ και του δίσκου. Στην ανώτερη θέση $y = +0,50 \text{ m}$ η

$$\text{δύναμη αυτή είναι } F = m_2 g - D'y = 30 - 75y = 30 - 75 \cdot 0,5$$

$$\Rightarrow F = -7,5 \text{ N}, \text{ δηλαδή το σώμα } \Sigma \text{ έλκεται προς τα κάτω}$$

$$\text{από το δίσκο με } F = 7,5 \text{ N}.$$



Γ-1) Στην φθίνουσα ταλάντωση το αρχικό πλάτος (στιγμή $t_0 = 0$) είναι $A_0 = 0,50 \text{ m}$... την στιγμή 1T ξέρω A_1 και την 2T ξέρω A_2 που είναι

δ)

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} \Rightarrow A_1 = \sqrt{A_0 A_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_1 = \sqrt{40 \text{ cm} \cdot 25,6 \text{ cm}} \Rightarrow A_1 = 32 \text{ cm}$$

Σ υγιεινών στρώσεων

$$\Delta l = 40 \text{ cm} - 32 \text{ cm} \Rightarrow \Delta l = 8 \text{ cm}$$

$$\delta) \frac{E}{E_0} = \frac{\frac{1}{2} D A_1^2}{\frac{1}{2} D A_0^2} = \left(\frac{A_1}{A_0} \right)^2 = \left(\frac{32 \text{ cm}}{40 \text{ cm}} \right)^2 = 0,64$$

Ποσοστό διαρρέουσας 64%

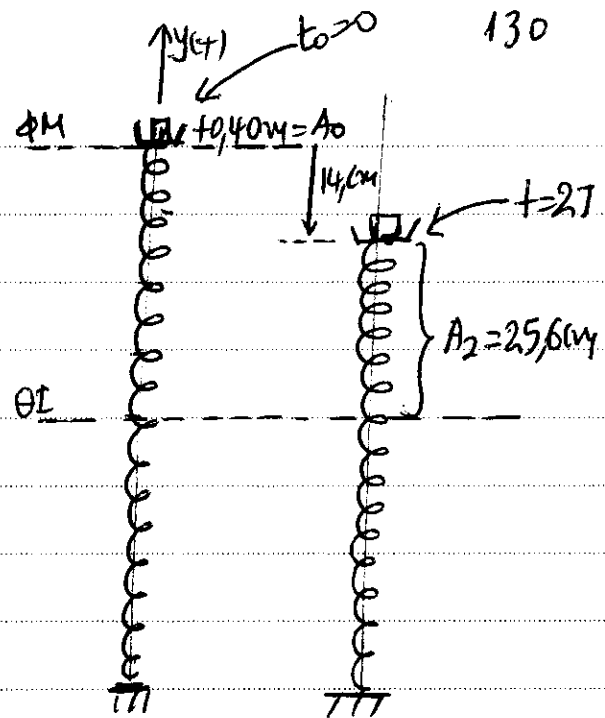
Ποσοστό υφεινών 36%

$$\epsilon) 2T = 2,64 \Rightarrow T = 1,32 \text{ s}$$

$$A = A_0 e^{-\lambda t} \rightarrow A_1 = A_0 e^{-\lambda T} \Rightarrow 0,32 = 0,40 e^{-\lambda \cdot 1,32} \Rightarrow 0,8 = e^{-\lambda \cdot 1,32}$$

$$\Rightarrow \ln 0,8 = -\lambda \cdot 1,32 \Rightarrow \lambda = -\frac{\ln 0,8}{1,32} = -\frac{-0,22}{1,32} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{6} \text{ s}^{-1}$$

$$A = 0,40 e^{-\frac{1}{6} t} (\text{cm})$$



2.28

Θέβν βοοερωδίας πρην την ελαστική

τον ηλεκτρικόν πεδίου $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow$

$$mg = k\Delta l_1 \Rightarrow \Delta l_1 = 0,10\text{ m}$$

Θέβν βοοερωδίας γειά την δράση

τον ηλεκτρικόν πεδίου

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow mg + F = k\Delta l_2 \Rightarrow \Delta l_2 = 0,3\text{ m}$$

a) $A = \Delta l_1 = 0,10\text{ m}$

$$D = k = m\omega^2 \Rightarrow \omega = 10\text{ rad/s}$$

β) 1^η περίηωση: Αν το ηλεκτρικό πεδίο φερεοδεί δταν το σώμα είναι στην ανώτερη θέβν

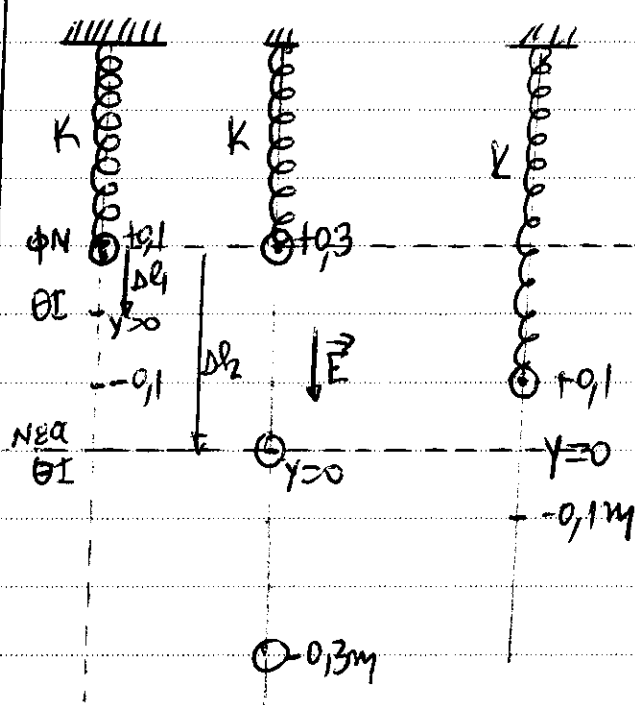
$y = +0,1\text{ m}$ (αρχική) ταλάντωσις ... απέχει από την ν.έ.α. θ Δ

απόστασις $0,3\text{ m}$... και $A' = 0,3\text{ m}$

$$y = 0,3\text{ m} \cdot \cos(10t + \frac{\pi}{2}) \text{ ή } y = 0,3\cos(10t)$$

$$v = 3\cos(10t + \frac{\pi}{2}) \text{ ή } v = -3\sin(10t)$$

$$U = \frac{1}{2} D y^2 \Rightarrow U = \frac{1}{2} 100 \cdot 0,09\cos^2(10t) \text{ ή } U = 4,5\cos^2(10t) \text{ (S.I.)}$$



2^η περίηωση: Αν το ηλεκτρικό πεδίο φερεοδεί δταν το σώμα είναι στην ανώτερη θέβν $y = -0,1\text{ m}$ (αρχική) ταλάντωσις ... απέχει από την ν.έ.α. θ Δ $0,1\text{ m}$... και $A' = 0,1\text{ m}$

$$y = 0,1\text{ m} \cdot \cos(10t + \frac{\pi}{2}) \text{ ή } y = 0,1\cos(10t)$$

$$v = 1\cos(10t + \frac{\pi}{2}) \text{ ή } v = -1\sin(10t)$$

$$U = \frac{1}{2} D y^2 = \frac{1}{2} 100 \cdot 0,01\cos^2(10t) \Rightarrow U = 0,5\cos^2(10t) \text{ (S.I.)}$$

β) $A_0 = 0,30\text{ m}$ $A_2 = 30\text{ cm} - 22,5\text{ cm} = 7,5\text{ cm} = 0,075\text{ m}$

$$t = 0$$

$$1\text{ T}$$

$$2\text{ T}$$

$$A_0 = 30\text{ cm}$$

$$A_1$$

$$A_2 = 7,5\text{ cm}$$

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} \Rightarrow A_1 = \sqrt{A_0 A_2} \Rightarrow A_1 = \sqrt{30 \text{ cm}^2 \cdot 5 \text{ cm}} \Rightarrow A_1 = 15 \text{ cm}$$

Ευρίνι τη βρύση η παρορόφωα, τα ελκνρηύν είναι $\Delta L = 30 \text{ cm} - 15 \text{ cm}$
 $\Rightarrow \Delta L = 15 \text{ cm} = 0,15 \text{ m}$.

$$\epsilon) \lambda = \frac{b}{2\pi} = \frac{2 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}}{2 \cdot 1 \text{ kg}} = 1 \text{ s}^{-1}$$

$$A = A_0 e^{-\lambda t} \Rightarrow A = 0,30 e^{-1 \cdot t} \xrightarrow[t=1 \text{ T}]{A=A_1=0,15 \text{ m}} 0,15 \text{ m} = 0,30 e^{-1 \cdot T}$$

$$\Rightarrow -\ln 2 = -1 \cdot T \Rightarrow T = \ln 2 \Rightarrow T = 0,69 \text{ s}$$

Αρχική περίοδος T_0 (φωτόση) $T_0 = \frac{2\pi}{\omega} = 0,628 \text{ s}$

Μεταβολή $\Delta T = 0,690 - 0,628 \Rightarrow \Delta T = 0,062 \text{ s}$.

2.29

A) Η γέφυρα ταχύτητα αθροιστά 6 m

Θέση ισορροπίας $m g = k \Delta L$ ή $4 \cdot 10 = k \cdot 0,1$

$\Rightarrow k = 400 \text{ N/m}$. Από το σχήμα

φωτίζεται $A = 0,2 \text{ m}$

$D = m \omega^2 \Rightarrow k = m \omega^2$ ή $\omega = 10 \text{ rad/s}$

$v_{\max} = \omega A \Rightarrow v_{\max} = 2 \text{ m/s}$

B) $y = 0,2 \sin(10t + \frac{\pi}{6}) \dots \xrightarrow{y=+0,10 \text{ m}}$

$$\sin(10t + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2} \Rightarrow 10t + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$$

$$\xrightarrow{k=1} 10t + \frac{\pi}{6} = \frac{13\pi}{6} \Rightarrow 10t = \frac{12\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{12\pi}{60} \text{ s} \Rightarrow t = \frac{2\pi}{15} \text{ s}$$

γ.) Η θέση ισορροπίας του (Σ, Σ_1) είναι 6 m θέση $(m+m)g = k \Delta L$

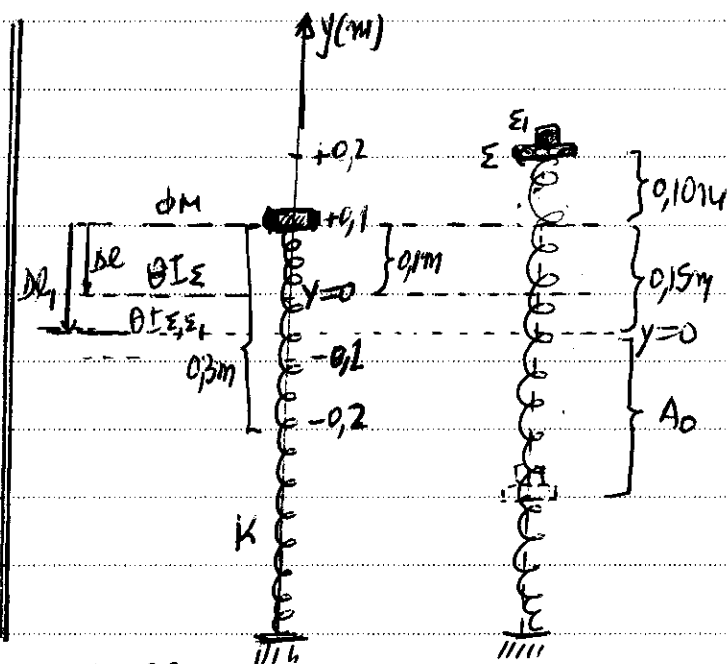
$\Rightarrow 60 = 400 \Delta L \Rightarrow \Delta L = 0,15 \text{ m}$. Από το σχήμα φωτίζεται ότι το

αρχικό πλάτος είναι $A_0 = 0,25 \text{ m}$. Αφού αθροί για

τη περίοδο το πλάτος είναι $A_1 = (0,15 + 0,05) \text{ m} \Rightarrow A_1 = 0,20 \text{ m}$

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{\frac{1}{2} D A_1^2}{\frac{1}{2} D A_0^2} = \left(\frac{A_1}{A_0}\right)^2 = \left[\frac{0,20}{0,25}\right]^2 = 0,64 \dots \text{ποσοστό διατήρησης } 64\%$$

παραπο γείωτα, $\approx 6\%$



Γ.2

$$A = A_0 e^{-\gamma t} \quad t = 1T \rightarrow 0,20 = 0,25 e^{-\gamma T}$$

$$\Rightarrow e^{-\gamma T} = 0,8 \quad (1)$$

$$T_{\text{nv}} \quad t = \frac{T}{2}; A_1' = A_0 e^{-\gamma T/2} \Rightarrow$$

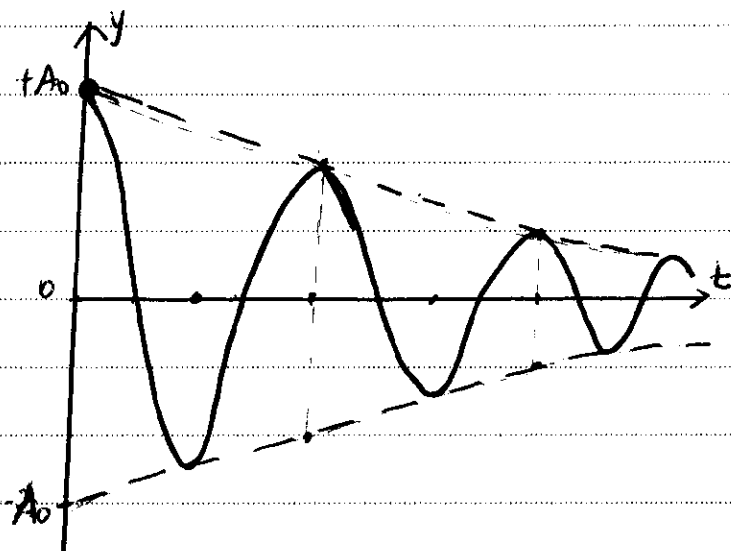
$$\Rightarrow A_1' = A_0 (e^{-\gamma T})^{1/2} \xrightarrow{(1)} A_1 = 0,25 \sqrt{0,8} \text{ m}$$

$$\Rightarrow A_1' = 0,22 \text{ m}$$

Το συνολικό διάστημα στη διάρκεια

της πρώτης περιόδου είναι

$$S_{0,1} = A_0 + 2A_1' + A_1 \Rightarrow S_{0,1} = 0,88 \text{ m}$$



2.30

α) Θέτω $\gamma \text{ απορρόντας των } \Sigma: mg = k \Delta l$

$$\Rightarrow 4 \cdot 10 = 100 \Delta l \Rightarrow \Delta l = 0,4 \text{ m}$$

$$E_{\text{ελα}} = W_F \Rightarrow \frac{1}{2} D \Delta^2 = F \Delta l \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} 100 \Delta^2 = 31,25 \cdot 0,40 \Rightarrow \Delta = 0,50 \text{ m}$$

β) Στην θέση τα φυσικού γήκους

($y = +0,40 \text{ m}$) η ταχύτητα

των ταλαντωτή είναι

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} D y^2 = \frac{1}{2} D \Delta^2$$

$$\Rightarrow 4 \cdot v^2 + 100 \cdot 0,4^2 = 100 \cdot 0,5^2$$

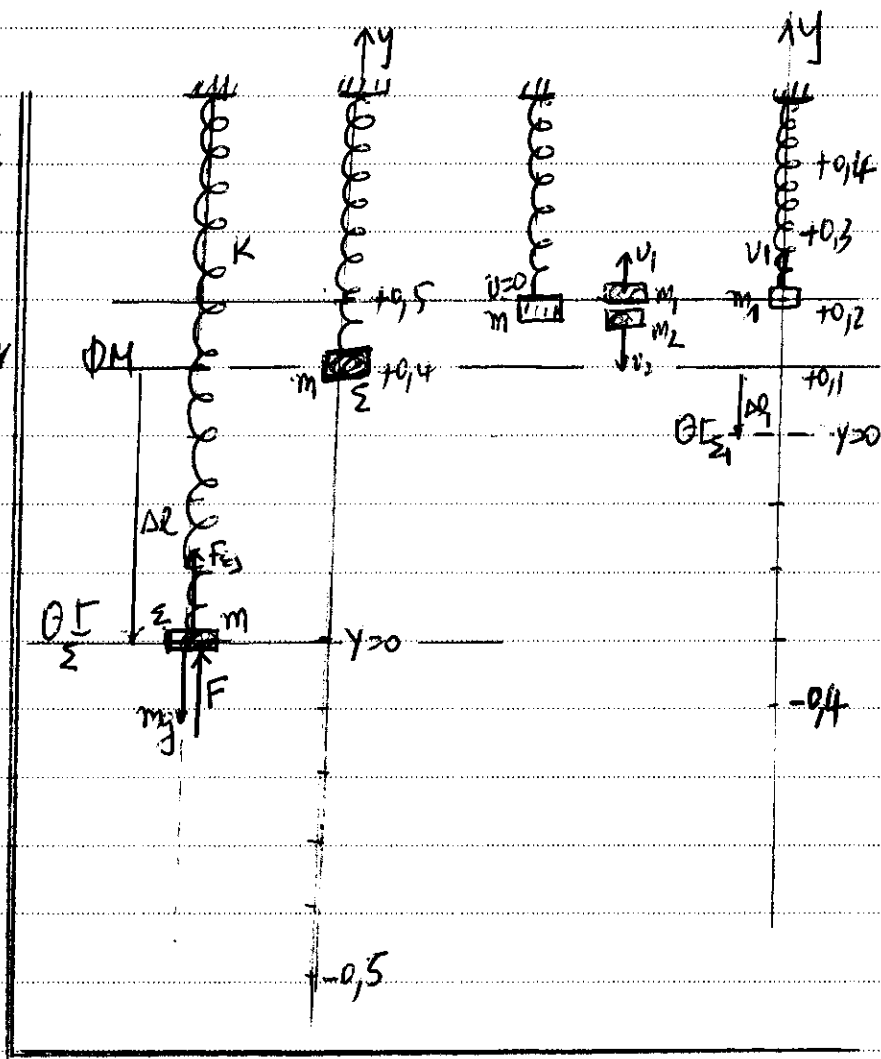
$$v = \pm 1,5 \text{ m/s} \quad \text{ναρ έλκτση}$$

ναρ τέρκεται $v = -1,5 \text{ m/s}$

$$\frac{dK}{dt} = 5Fv = -Dyv \Rightarrow$$

$$\frac{dK}{dt} = -100(+0,4)(-1,5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dK}{dt} = 60 \text{ J/s}$$



γ) Όταν το βωλο διασπείρεται έχει ταχύτητα $v=0$

$$P=6\pi a \theta \Rightarrow 0 = m_1 v_1 - m_2 v_2 \Rightarrow v_1 = \frac{m_2 v_2}{m_1} = \frac{3 \frac{\sqrt{3}}{2}}{1} \Rightarrow v_1 = 2\sqrt{3} \text{ m/s}$$

Ο γέρος ταλαντωτής Σ_1 έχει κέντρο ταλάντωσης πάνω από το φυσικό γράκος και $\Delta \ell_1$: $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow k \Delta \ell_1 = m_1 g$
 $\Rightarrow 100 \Delta \ell_1 = 1 \cdot 10 \Rightarrow \Delta \ell_1 = 0,10 \text{ m}$

Μόλις αρχίσει η νέα ταλάντωση - όταν γέρο δώσουμε αρχική - ο ταλαντωτής Σ_1 έχει $v_1 = +2\sqrt{3} \text{ m/s}$ & $y_1 = +0,2 \text{ m}$
 $\dots \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} D y_1^2 = \frac{1}{2} D A_0^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (2\sqrt{3})^2 + \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot (0,2)^2 = \frac{1}{2} \cdot 100 A_0^2$
 $\Rightarrow A_0 = 0,40 \text{ m}$

$$\delta) \frac{dE}{dt} = -b v^2 \Rightarrow -3,52 = -b \cdot 2^2 \Rightarrow b = 0,88 \text{ kg s}^{-1}$$

↳ αποδείξτε το...

$$\epsilon) \lambda = \frac{b}{2m_1} = \frac{0,88 \text{ kg s}^{-1}}{2 \cdot 1 \text{ kg}} \Rightarrow \lambda = 0,44 \text{ s}^{-1}$$

Η περίοδος της ταλάντωσης είναι - σύμφωνα με το πρόβλημα - όση της αμείωτης $T = T_0 = 2\pi \sqrt{m/k} \Rightarrow T = 0,2 \text{ s}$
 $A = \frac{25}{100} A_0 = \frac{A_0}{4}$

$$A = A_0 e^{-\lambda t} \Rightarrow \frac{A_0}{4} = A_0 e^{-\lambda N T} \Rightarrow -2,42 = -\lambda N \cdot T$$

$$\Rightarrow 2,42 = 0,44 \cdot N \cdot 0,2 \Rightarrow 2 \cdot 0,22 = 0,44 \cdot N \cdot 0,2 \Rightarrow N = 5 \text{ ταλαντώσεις}$$