Η δύναμη κρούσης και η μετατόπιση στην κρούση.

Α. Κρούση σε αυστηρά μονωμένα συστήματα.

Μια σφαίρα μάζας m_1=1Kg κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο με ταχύτητα υ_0=6m/s και συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με άλλη ακίνητη σφαίρα μάζας m_2=2Kg. Αν ο χρόνος κρούσης είναι Δt=2ms, να βρείτε:

α. τις δυνάμεις κρούσης που ασκούνται σε κάθε σώμα,

β. τις μετατοπίσεις των σωμάτων κατά την διάρκεια της κρούσης ,

γ. την μέγιστη δυναμική ενέργεια ελαστικής παραμόρφωσης.

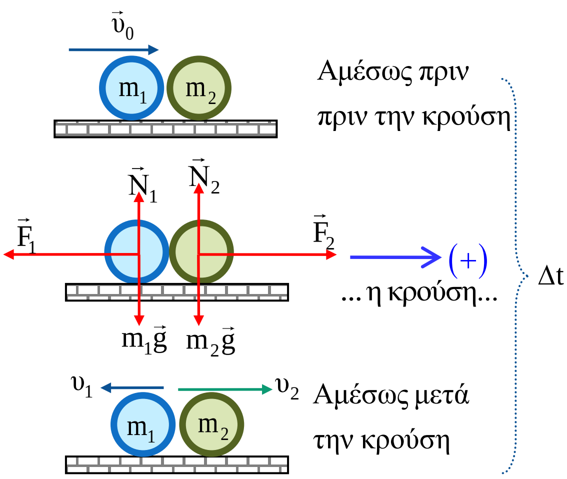
Απάντηση

α. Οι ταχύτητες των σωμάτων μετά την κρούση είναι $\upsilon_1 = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_0 \Rightarrow$

$\upsilon_1 = \dfrac{1Kg - 2Kg}{1Kg + 2Kg} 6\dfrac{m}{s} \Rightarrow \ \upsilon_1 = -2m/s \ ...$

και $\upsilon_2 = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_0 \Rightarrow$

$\upsilon_2 = \dfrac{2 \cdot 1Kg}{1Kg + 2Kg} 6\dfrac{m}{s} \Rightarrow \upsilon_2 = 4m/s$.



Στο σχήμα τα συγκρουόμενα σώματα κινούνται πάνω σε λείο δάπεδο. Οι εξωτερικές δυνάμεις $\left[\vec{N}_1, m_1\vec{g}\right]$ και $\left[\vec{N}_2, m_2\vec{g}\right]$ που ασκούνται στο 1ο και 2ο σώμα αναιρούνται ...και έτσι το σύστημα κατά την διάρκεια Δt της κρούσης είναι **«αυστηρά» μονωμένο**. Οι μόνες δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα είναι οι εσωτερικές δυνάμεις κρούσης $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ που ως δράση αντίδραση είναι αντίθετες $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$.

Για την διάρκεια της κρούσης εφαρμόζουμε τον 2ο γενικευμένο νόμο Newton.

1ο σώμα: $\Sigma\vec{F}_x\Delta t = \Delta\vec{p}_1 \ \Rightarrow -F_1\Delta t = -m_1\upsilon_1 - \left(+m_1\upsilon_0\right) \Rightarrow \ F_1 = \dfrac{m_1\left(\upsilon_1 + \upsilon_0\right)}{\Delta t} \Rightarrow$

$F_1 = \dfrac{1Kg\left(2+6\right)m/s}{2 \cdot 10^{-3}s} \ \Rightarrow F_1 = 4000N$ (μέτρο)

2ο σώμα: $\Sigma\vec{F}_x\Delta t = \Delta\vec{p}_2 \ \Rightarrow F_2\Delta t = m_2\upsilon_1 - 0 \Rightarrow \ F_{1=2} = \dfrac{m_2\upsilon_2}{\Delta t} \Rightarrow$

$F_2 = \dfrac{2Kg \cdot 4m/s}{2 \cdot 10^{-3}s} \Rightarrow F_2 = 4000N$ (μέτρο) ... αναμενόμενο αφού $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$

Σχόλιο: Εδώ το σύστημα είναι **αυστηρά μονωμένο** ... κρατήστε αυτό το «αναμενόμενο» $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ για το 2ο παράδειγμα που το σύστημα θα είναι **προσεγγιστικά μονωμένο**!

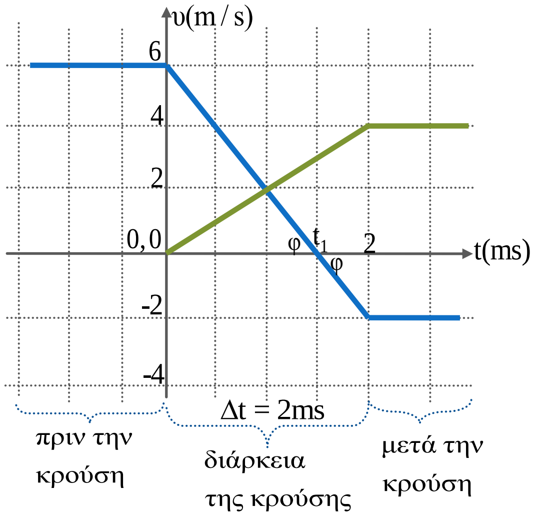
1

Σχόλιο: Για τον υπολογισμό των δυνάμεων υποθέσαμε για αυτές **σταθερή τιμή** κατά την διάρκεια της κρούσης ή οι ανωτέρω τιμές είναι η **μέση τιμή** των δυνάμεων.

β. Οι μετατοπίσεις των σωμάτων κατά την διάρκεια της κρούσης μπορούν να βρεθούν με τρείς τρόπους:

1ος τρόπος: Από την γραφική παράσταση της αλγεβρικής τιμής της ταχύτητας των συγκρουομένων σωμάτων με το χρόνο.

Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση των ταχυτήτων με το χρόνο από λίγο πριν την κρούση μέχρι και λίγο μετά την κρούση. Η κρούση θεωρούμε ότι αρχίζει την t=0 και τελειώνει την t=2ms. Υπολογίζουμε την χρονική στιγμή t_1 κατά την διάρκεια της κρούσης (βλέπε σχήμα) που αντιστρέφεται η ταχύτητα του 1ου σώματος. Από τη γεωμετρία του σχήματος παίρνουμε



$$\varepsilon\varphi = \frac{6-0}{t_1-0} = \frac{|-2-0|}{2-t_1} \text{ ή } \frac{6}{t_1} = \frac{2}{2-t_1}$$

$$\text{ή } \frac{3}{t_1} = \frac{1}{2-t_1} \text{ ή } t_1 = 1{,}5\text{ms}.$$

Το πρώτο σώμα μετατοπίσθηκε κατά Δx_1 που βρίσκεται από το εμβαδόν της $\upsilon_1(t)$ για

$$0 \le t \le 2\text{ms} \;, \ldots \; \Delta x_1 = \frac{1}{2}(1{,}5-0)\text{ms}\cdot 6\frac{\text{m}}{\text{s}} + \frac{1}{2}(2-1{,}5)\text{ms}\cdot\left(-2\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \text{ ή } \Delta x_1 = 4\text{mm}$$

Το δεύτερο σώμα μετατοπίσθηκε κατά Δx_2 που βρίσκεται από το εμβαδόν της $\upsilon_2(t)$ για

$$0 \le t \le 2\text{ms}, \; \ldots \; \Delta x_2 = \frac{1}{2}(2-0)\text{ms}\cdot 4\frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ ή } \Delta x_2 = 4\text{mm}$$

2ος τρόπος: Από το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για κάθε σώμα για την διάρκεια της κρούσης.

1ο σώμα: $\Delta K_1 = W o\lambda$ ή $\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_0^2 = -F_1\Delta x_1$ ή $\Delta x_1 = \frac{m_1\left(\upsilon_0^2 - \upsilon_1^2\right)}{2F_1}$ και με αντικατάσταση των δεδομένων παίρνουμε $\Delta x_1 = 4\text{mm}$

1ο σώμα: $\Delta K_2 = W o\lambda$ ή $\frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 = F_2\Delta x_1$ ή $\Delta x_2 = \frac{m_2\upsilon_2^2}{2F_2}$ και με αντικατάσταση των δεδομένων παίρνουμε $\Delta x_2 = 4\text{mm}$

3ος τρόπος: Με εξισώσεις κινηματικής ...

1ο σώμα: Η επιτάχυνση (επιβράδυνση) κατά την διάρκεια της κρούσης είναι $\alpha_1 = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} \Rightarrow$

$$\alpha_1 = \frac{0 - 6\text{m/s}}{1{,}5\text{ms} - 0} \Rightarrow \alpha_1 = -4000\text{m/s}^2$$ ...και η μετατόπιση είναι $\Delta x_1 = \upsilon_o t + \frac{1}{2}\alpha_1 t^2 \Rightarrow$

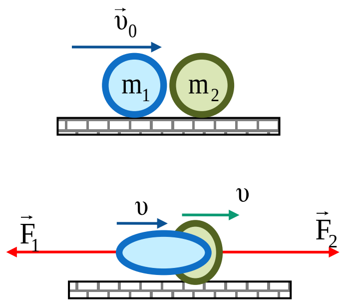
$$\Delta x_1 = 6\cdot 2\cdot 10^{-3} + \frac{1}{2}(-4000)\left(2\cdot 10^{-3}\right)^2 \Rightarrow \Delta x_1 = 4\cdot 10^{-3}\text{m} \text{ ή } \Delta x_1 = 4\text{mm}$$

2ο σώμα: Η επιτάχυνση κατά την διάρκεια της κρούσης είναι $\alpha_2 = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} \Rightarrow \alpha_2 = \frac{4\text{m/s} - 0}{2\text{ms} - 0} \Rightarrow$

$\alpha_2 = 2000\text{m/s}^2$ ... και η μετατόπιση είναι $\Delta x_2 = \frac{1}{2}\alpha_2 t^2 \Rightarrow \Delta x_2 = \frac{1}{2}(2000)\left(2\cdot 10^{-3}\right)^2 \Rightarrow$

$$\Delta x_2 = 4\cdot 10^{-3}\text{m} \text{ ή } \Delta x_2 = 4\text{mm}.$$

γ. Αρχικά το 1ο σώμα επιβραδύνεται αλλά έχει μεγαλύτερη ταχύτητα από το 2ο σώμα που επιταχύνεται και ως εκ τούτου το «πλησιάζει» ... ουσιαστικά υπάρχει ελαστική παραμόρφωση με το 1ο σώμα να «μπαίνει» μέσα στο 2ο έως ότου τα σώματα αποκτήσουν κοινή ταχύτητα ...μετά το 2ο αποκτά μεγαλύτερη ταχύτητα και τα σώματα απομακρύνονται. Ενεργειακά μέρος της κινητικής ενέργειας του συστήματος μετατρέπεται σε δυναμική ενέργεια ελαστικότητας που στην συνέχεια μετασχηματίζεται και πάλι σε κινητική.



Αμέσως πριν
πριν την κρούση

η μέγιστη ελαστική
παραμόρφωση

Η μέγιστη δυναμική ενέργεια ελαστικότητας είναι στη μέγιστη ελαστική παραμόρφωση που γίνεται όταν τα σώματα αποκτούν (στιγμιαία) κοινή ταχύτητα, που υπολογίζεται από τη διατήρηση της ορμής $m_1\upsilon_0 = m_1\upsilon + m_2\upsilon \Rightarrow \upsilon = \dfrac{m_1\upsilon_0}{m_1+m_2} \Rightarrow$

$$\upsilon = \frac{1Kg.6m/s}{1Kg+2Kg} \Rightarrow \upsilon = \frac{1Kg.6m/s}{1Kg+2Kg} \Rightarrow \upsilon = 2m/s$$

$$K_{\alpha\rho\chi} = K_{\sigma\upsilon\sigma\tau} + U_{max} \Rightarrow \frac{1}{2}m_1\upsilon_0^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon^2 + \frac{1}{2}m_1\upsilon^2 + U_{max} \Rightarrow$$

$$U_{max} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_0^2 - \frac{1}{2}(m_1+m_2)\upsilon^2 \xrightarrow{S.I} U_{max} = 12J$$

Β. Κρούση σε προσεγγιστικά μονωμένα συστήματα.

Μια σφαίρα μάζας m_1=1Kg πέφτει κατακόρυφα και συγκρούεται με ταχύτητα υ_0=6m/s μετωπικά και ελαστικά με άλλη σφαίρα μάζας m_2=2Kg που ηρεμεί δεμένη πάνω σε ελατήριο. Αν ο χρόνος κρούσης είναι Δt=2ms, να βρείτε:

α. τις δυνάμεις κρούσης που ασκούνται σε κάθε σώμα,

β. τις μετατοπίσεις των σωμάτων κατά την διάρκεια της κρούσης.

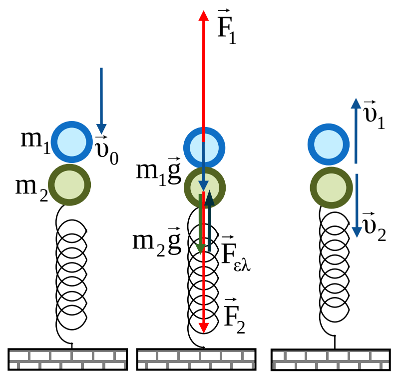
Απάντηση

α. Οι ταχύτητες των σωμάτων μετά την κρούση είναι

$$\upsilon_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1+m_2}\upsilon_0 \Rightarrow \upsilon_1 = \frac{1Kg - 2Kg}{1Kg+2Kg}6\frac{m}{s} \Rightarrow \upsilon_1 = -2m/s$$

... και $\upsilon_2 = \dfrac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_0 \Rightarrow \upsilon_2 = \dfrac{2\cdot 1Kg}{1Kg+2Kg}6\dfrac{m}{s} \Rightarrow$

$\upsilon_2 = 4m/s$.



Το σύστημα αυτό **δεν είναι αυστηρά μονωμένο** αλλά πήραμε διατήρηση ορμής συστήματος θεωρώντας **το σύστημα προσεγγιστικά μονωμένο** [υπάρχουν οι εξωτερικές δυνάμεις $m_1\vec{g}, m_2\vec{g}, \vec{F}_{\varepsilon\lambda}$]. Για την διάρκεια της κρούσης εφαρμόζουμε τον 2ο γενικευμένο νόμο Newton.

1ο σώμα: $\Sigma\vec{F}_x\Delta t = \Delta\vec{p}_1 \Rightarrow \vec{F}_1\Delta t + m_1\vec{g}\Delta t = m_1\vec{\upsilon}_1 - m_1\vec{\upsilon}_0 \Rightarrow -F_1\Delta t + m_1 g\Delta t = -m_1\upsilon_1 - (+m_1\upsilon_0)$

$F_1 = \dfrac{m_1(\upsilon_1 + \upsilon_0)}{\Delta t} + m_1 g \Rightarrow F_1 = \dfrac{1Kg(2+6)m/s}{2\cdot 10^{-3}s} + 1Kg10m/s^2 \Rightarrow F_1 = 4010N$ (μέτρο) .

2ο σώμα: $\Sigma\vec{F}_x\Delta t = \Delta\vec{p}_2 \Rightarrow F_2\Delta t - F_{\varepsilon\lambda}\Delta t + m_2 g\Delta t = m_2\upsilon_2 - 0$ (1)... Επειδή αρχικά το σώμα μάζας m_2 ηρεμεί πάνω στο ελατήριο $F_{\varepsilon\lambda} = m_2 g$ και θεωρώντας αμελητέα τη μετατόπιση κατά την κρούση για να θεωρήσουμε «σταθερή» την δύναμη του ελατηρίου ...η σχέση (1) γράφεται $F_2\Delta t = m_2\upsilon_2 - 0 \Rightarrow F_{1=2} = \dfrac{m_2\upsilon_2}{\Delta t} \Rightarrow F_2 = \dfrac{2Kg\cdot 4m/s}{2\cdot 10^{-3}s} \Rightarrow F_2 = 4000N$ (μέτρο).

Παρατηρείστε όμως εδώ ότι $F_1 \neq F_2$ ... και πως γίνεται αυτό αφού οι δυνάμεις αυτές είναι δράση αντίδραση; Απλά το σύστημα **δεν είναι αυστηρά μονωμένο** αλλά **προσεγγιστικά μονωμένο** και οι σχέσεις για τις ταχύτητες είναι προσεγγιστικές, επίσης εδώ πήραμε σταθερή την δύναμη ελατηρίου αλλά και αυτό είναι προσεγγιστικό.

β. Οι μετατοπίσεις των σωμάτων κατά την διάρκεια της κρούσης μπορούν να βρεθούν με τους τρείς προηγούμενους τρόπους λαμβάνοντας υπόψη τις προηγούμενες προσεγγίσεις.