

Διαγώνισμα στην κυκλική κίνηση.

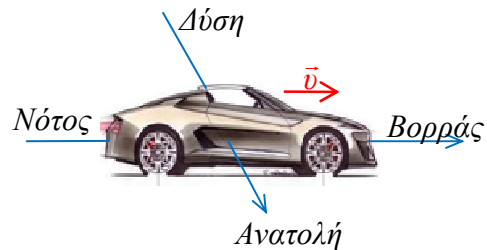
Θέμα Α. (Για τις ερωτήσεις Α.1 έως και Α.4 να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της πρότασης και δίπλα το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή πρόταση.)

Α.1) Στην ομαλή κυκλική κίνηση ενός κινητού σταθερή παραμένει:

- α) μόνο η γραμμική ταχύτητα $\vec{v}_{\gamma\gamma}$,
- β) μόνο η γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$,
- γ) τόσο η γραμμική $\vec{v}_{\gamma\gamma}$ όσο και η γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$,
- δ) η κεντρομόλος επιτάχυνσης $\vec{a}_\kappa$.

Α.2) Ένα αυτοκίνητο έχει φορά κίνησης από το νότο προς το βορρά. Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του κάθε τροχού του αυτοκινήτου έχει κατεύθυνση προς:

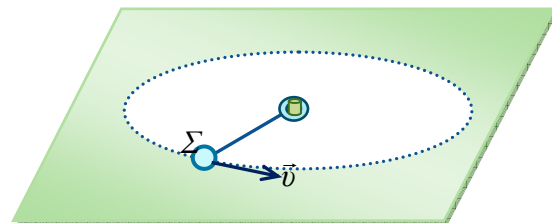
- α) το βορρά,
- β) το νότο,
- γ) τη δύση
- δ) την ανατολή.



Α.3) Αν σε ένα κινητό που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση η περίοδος υποδιπλασιασθεί, τότε:

- α) η γραμμική ταχύτητα υποδιπλασιάζεται,
- β) η γωνιακή ταχύτητα τετραπλασιάζεται,
- γ) η κεντρομόλος επιτάχυνση διπλασιάζεται,
- δ) απαιτείται τετραπλάσια κεντρομόλος δύναμη.

Α.4) Ένα σώμα Σ είναι δεμένο στην άκρη ενός νήματος και εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο όπως στο σχήμα. Αν διπλασιασθεί η γραμμική ταχύτητα περιστροφής του σώματος,



- α) διπλασιάζεται ο χρόνος για μια περιστροφή,
- β) τετραπλασιάζεται το πλήθος των στροφών ανά λεπτό,
- γ) διπλασιάζεται η κεντρομόλος επιτάχυνση,
- δ) τετραπλασιάζεται η δύναμη που ασκεί το νήμα στο σώμα.

Α.5) (Σημειώστε στο τετράδιό σας το γράμμα της κάθε πρότασης και δίπλα αναγράψτε την ένδειξη Σωστό ή Λάθος, ανάλογα αν η πρόταση είναι σωστή ή λανθασμένη).

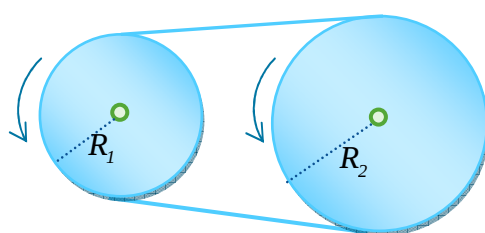
α) Στην ομαλή κυκλική κίνηση το μέτρο της ταχύτητας παραμένει σταθερό και συνεπώς δεν υπάρχει κανενός είδους επιτάχυνση.

β) Σε μια ομαλή κυκλική κίνηση το κινητό έχει μέτρο ταχύτητας v . Όταν η επιβατική ακτίνα του κινητού διαγράψει γωνία 180° , το μέτρο της μεταβολής της ταχύτητας είναι $\Delta v = 2v$.

γ) Σε μια ομαλή κυκλική κίνηση η χρονική εξίσωση της γωνία φ που διαγράφει η επιβατική ακτίνα του κινητού, μπορεί να περιγράφεται από τη εξίσωση $\varphi = 5t^2$ (S.I).

δ) Εξαιτίας της στροφικής κίνησης της Γης γύρω από τον άξονά της ένας άνθρωπος στην Αθήνα έχει την ίδια γραμμική ταχύτητα με κάποιον που είναι στη Στοκχόλμη.

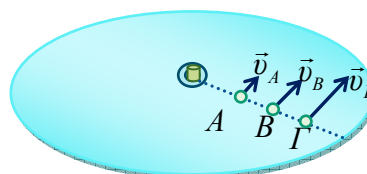
ε) Στο σχήμα οι δύο δίσκοι διαφορετικών ακτίνων στρέφονται γύρω από κατακόρυφους άξονες που διέρχονται από τα κέντρα τους με την βοήθεια ενός μη εκτατού ιμάντα που δεν γλιστράει πάνω στους δύο δίσκους. Επειδή οι δύο δίσκοι με τον ιμάντα στρέφονται ως σύστημα θα έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα.



(Μονάδες: 5x5=25)

Θέμα Β.

B.1) Ο οριζόντιος δίσκος του σχήματος στρέφεται περί κατακόρυφο που διέρχεται από το κέντρο του. Για τα τρία σημεία Α, Β, Γ της ίδιας ακτίνας δίνεται ότι τα Α και Γ κάποια στιγμή έχουν γραμμικές ταχύτητες v_A και v_Γ . Την ίδια στιγμή το σημείο Β, που είναι το μέσον του τμήματος ΑΓ, θα έχει ταχύτητα:



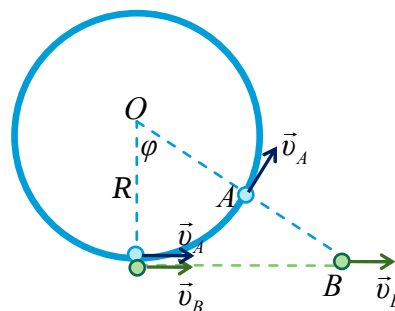
α) $v_B = v_A + v_\Gamma$ β) $v_B = \frac{v_A + v_\Gamma}{2}$

γ) $v_B = v_\Gamma - v_A$ δ) $v_B = \frac{v_\Gamma - v_A}{2}$

Επιλέξτε τη σωστή σχέση. (Μονάδες: 2)

Δικαιολογείστε την απάντησή σας. (Μονάδες: 7)

B.2) Δύο κινητά Α και Β ξεκινούν ταυτόχρονα από το ίδιο σημείο με ταχύτητες v_A και v_B που εκείνη τη στιγμή έχουν την ίδια κατεύθυνση. Το κινητό Α εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση και το Β ευθύγραμμη ομαλή κίνηση όπως στο σχήμα. Όταν η επιβατική ακτίνα του κινητού Α διαγράψει γωνία φ (rad), το κέντρο του κύκλου και τα κινητά



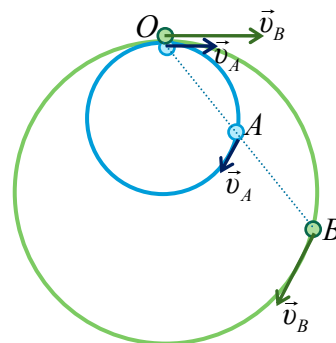
A και B είναι στην ίδια ευθεία. Οι ταχύτητες v_A και v_B συνδέονται με τη σχέση:

α) $v_A = v_B \varphi$ β) $v_B = v_A \varphi$ γ) $v_A = v_B \frac{\varphi}{\varepsilon \varphi \varphi}$ δ) $v_B = \frac{1}{2} v_A \varphi^2$

Επιλέξτε τη σωστή σχέση. (Μονάδες: 2)

Δικαιολογείστε την απάντησή σας. (Μονάδες: 6)

B.3) Δύο κινητά A και B ξεκινούν ταυτόχρονα από το ίδιο σημείο O με ταχύτητες v_A και $v_B = 2v_A$ που εκείνη τη στιγμή έχουν την ίδια κατεύθυνση και διαγράφουν τις κυκλικές τροχιές του σχήματος κινούμενα με ομαλή κυκλική κίνηση. Το σημείο αφετηρίας O και τα κινητά A και B είναι σε κάθε χρονική στιγμή στην ίδια ευθεία.



α) Πιο γρήγορα θα φθάσει στο σημείο εκκίνησης O το κινητό B που έχει την μεγαλύτερη ταχύτητα.

β) Το κινητό B διαγράφει κυκλική τροχιά διπλάσιας ακτίνας από αυτή που διαγράφει το κινητό A.

Επιλέξτε τη σωστή σχέση. (Μονάδες: 2)

Δικαιολογείστε την απάντησή σας. (Μονάδες: 6)

Θέμα Γ.

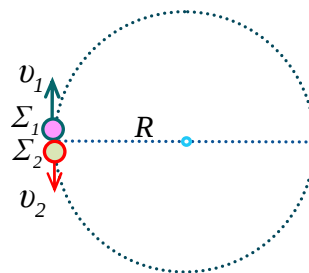
Δύο κινητά εκτελούν ομαλές κυκλικές κινήσεις κινούμενα στον ίδιο κύκλο με περιόδους $T_1 = 2,6s$ και $T_2 = 1,4s$. Τα κινητά ξεκινούν από το ίδιο σημείο την ίδια στιγμή $t_0 = 0$ και κινούνται αντίρροπα.

Να βρείτε:

α) πότε θα συναντηθούν για πρώτη φορά;

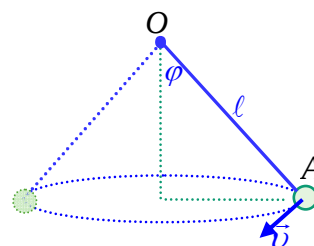
β) πότε συναντώνται για πρώτη φορά στο ίδιο σημείο O από το οποίο ξεκίνησαν;

γ) πόσες άλλες φορές συναντιούνται μέχρι τη στιγμή που θα συναντηθούν για πρώτη φορά στο σημείο O από το οποίο ξεκίνησαν; (Μονάδες 6+9+10=25)



Θέμα Δ.

Ένα νήμα OA μήκους $\ell = \frac{2}{3}m$ είναι εξαρτημένο από το άκρο του O σε σταθερό σημείο. Μια μάζα $m = 0,6Kg$ είναι δεμένη στο άλλο άκρο του νήματος. Εκτρέπουμε το σφαιρίδιο από τη θέση ισορροπίας και με τεντωμένο το νήμα του δίνουμε οριζόντια ταχύτητα $\bar{v}$ κάθετη στο κατακόρυφο επίπεδο στο οποίο έγινε η μετατόπιση. Παρατηρούμε ότι το



σφαιρίδιο διαγράφει οριζόντια κυκλική τροχιά και όλη η διάταξη κωνική επιφάνεια.

α) Εξηγείστε ότι η κυκλική κίνηση του σφαιριδίου είναι ομαλή.

β) Αν η το νήμα που διαγράφει κωνική επιφάνεια σχηματίζει με τον άξονα του κώνου γωνία $\varphi = 53^\circ$ ($\eta\mu 53^\circ = 0,8$ και $\sigma\upsilon\nu 53^\circ = 0,6$).

β.1 Ποιες είναι οι δυνάμεις συνιστούν την κεντρομόλο δύναμη, της οποίας να υπολογίστε το μέτρο.

β.2 Να βρείτε την κεντρομόλο επιτάχυνση και την γραμμική ταχύτητα του σφαιριδίου.

γ) Να υπολογισθεί η τάση του νήματος.

δ) Πάνω από ποια τιμή πρέπει να είναι η γωνιακή ταχύτητα που πρέπει να έχει το σφαιρίδιο, για να μπορεί το νήμα να διαγράφει κωνική επιφάνεια.

$$g = 10 \text{ m/s}^2$$

(Μονάδες $5+(5+5)+5+5=25$).



...Οι απαντήσεις ...

Θέμα Α. 1-β, 2-γ, 3-δ, 4-δ, 5(α-Λ, β-Σ, γ-Λ, δ-Λ, ε-Λ)

Θέμα Β.

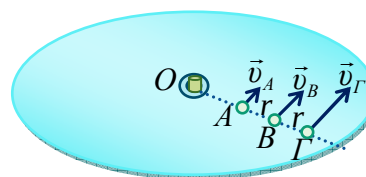
B.1) $v_A = \omega(OA) = \omega r_A \Rightarrow v_A = \omega(r_B - r)(1)$

$v_\Gamma = \omega(O\Gamma) = \omega r_\Gamma \Rightarrow v_\Gamma = \omega(r_B + r) \quad (2)$

$(1)+(2) \dots v_A + v_\Gamma = 2\omega r_B \xrightarrow{v_B = \omega r_B}$

$v_A + v_\Gamma = 2v_B \Rightarrow v_B = \frac{v_A + v_\Gamma}{2}$

Άρα σωστή η σχέση (β).



$OB = r_B$
 $OA = r_A$
 $O\Gamma = r_\Gamma$
 $AB = B\Gamma = r$

B.2) Κινητό Α: $\widehat{(OA)} = s_A = v_A t$

$\xrightarrow{s_A = R\varphi} R\varphi = v_A t \quad (1)$

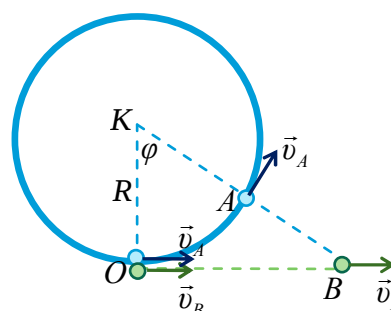
Κινητό Β: $s_B = v_B t \xrightarrow{s_B = R\epsilon\varphi\varphi}$

$R\epsilon\varphi\varphi = v_B t \quad (2)$

Από (1) και (2) με διαίρεση κατά μέλη

παίρνουμε: $\frac{\varphi}{\epsilon\varphi\varphi} = \frac{v_A}{v_B} \Rightarrow v_A = v_B \frac{\varphi}{\epsilon\varphi\varphi}$

Άρα σωστή η σχέση (γ).



B.3) Τα κέντρα των κυκλικών τροχιών θα είναι πάνω στην διεύθυνση Oy που είναι αρχικά κάθετη στις ταχύτητες. Σε τυχαία χρονική στιγμή t η επιβατική του 1ου κινητού διέγραψε γωνία $\varphi_1 = \omega_1 t$ και του 2ου κινητού $\varphi_2 = \omega_2 t$.

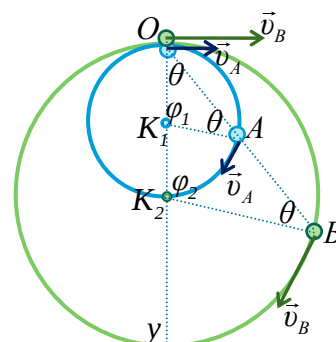
Το τρίγωνο K_1OA είναι ισοσκελές, οπότε $\sphericalangle(K_1OA) = \sphericalangle(K_1AO) = \theta$ και συνεπώς $\varphi_1 = \pi - 2\theta \quad (1)$

Επίσης το τρίγωνο K_2OB είναι ισοσκελές, οπότε $\sphericalangle(K_2OB) = \sphericalangle(K_2BO) = \theta$ και συνεπώς $\varphi_2 = \pi - 2\theta \quad (1)$.

Από (1) και (2) έχουμε: $\varphi_1 = \varphi_2 \Rightarrow \omega_1 t = \omega_2 t \Rightarrow \omega_1 = \omega_2 = \omega$ δηλαδή τα κινητά έχουν την ίδια συχνότητα και περίοδο.

α) Για να φθάσουν και πάλι στο O θέλουν μία περίοδο και επειδή έχουν την ίδια περίοδο φθάνουν ταυτόχρονα, άρα η πρόταση (α) είναι λανθασμένη.

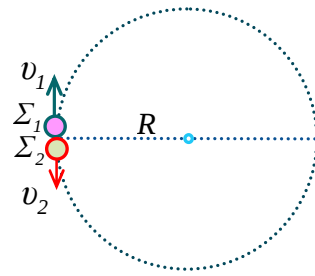
β) $v_B = 2v_A \Rightarrow \omega R_B = 2\omega R_A \Rightarrow R_B = 2R_A$ άρα η πρόταση αυτή είναι σωστή.



Θέμα Γ.

α) Από τη γεωμετρία του σχήματος φαίνεται ότι σε κάθε συνάντηση το άθροισμα των διαστημάτων είναι $N \cdot 2\pi R$, όπου N η τάξη των συναντήσεων.

$$\begin{aligned}
1\eta \text{ συνάντηση: } & s_1 + s_2 = 1.2\pi R \\
2\eta \text{ συνάντηση: } & s_1 + s_2 = 2.2\pi R \\
N\text{-ιοστή συνάντηση: } & s_1 + s_2 = N.2\pi R \\
s_1 + s_2 = N.2\pi R \Rightarrow & v_1 t + v_2 t = N.2\pi R \Rightarrow \\
\frac{2\pi R}{T_1} t + \frac{2\pi R}{T_2} t = & N.2\pi R \Rightarrow t = N \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}
\end{aligned}$$



Η σχέση αυτή δίνει όλες τις χρονικές στιγμές συνάντησης.

Για την 1η συνάντηση $t = 1 \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}$ και με αντικατάσταση $t = 0,91s$.

β) Όταν συναντηθούν για 1η φορά στη θέση αφετηρίας θα έχουν διαγράψει ακέραιο αριθμό στροφών και έστω ότι το 1ο κινητό έκανε k στροφές και το 2ο λ στροφές με $(k, \lambda) \in \mathbb{Z}^+$.

$$1\text{ο κινητό: } \varphi_1 = \omega_1 t \Rightarrow k2\pi = \frac{2\pi}{T_1} t \Rightarrow k = \frac{t}{T_1} \quad (1)$$

$$2\text{ο κινητό: } \varphi_2 = \omega_2 t \Rightarrow \lambda 2\pi = \frac{2\pi}{T_2} t \Rightarrow \lambda = \frac{t}{T_2} \quad (2).$$

Με διαίρεση κατά μέλη παίρνουμε: $\frac{k}{\lambda} = \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow \frac{k}{\lambda} = \frac{1,4}{2,6}$...κάνουμε ανάγωγο

το κλάσμα ... $\frac{k}{\lambda} = \frac{7}{13}$ και επειδή $(k, \lambda) \in \mathbb{Z}^+$ οι μικρότερες ακέραιες τιμές που

μπορούν να πάρουν (θεωρία αριθμών) είναι $k = 7$ και $\lambda = 13$ που αντιστοιχούν και στην πρώτη συνάντηση στο σημείο αφετηρίας. Ο αντίστοιχος χρόνος βρίσκεται από την (1) ή (2) ... $t = kT_1 \Rightarrow t = 7.2,6s \Rightarrow t = 18,2s$.

Γενικά για τις συναντήσεις στο σημείο αφετηρίας έχουμε

Συναντήσεις στο σημείο αφετηρίας			
	Στροφές 1ου κινητού	Στροφές 1ου κινητού	Χρόνος συνάντησης
1η συνάντηση	1.7=7	1.13=13	$t=7.2,6=18,2s$
2η συνάντηση	2.7=14	2.13=26	$t=14.2,6=36,4s$
3η συνάντηση	3.7=21	3.13=39	$t=21.2,6=54,6s$
n-ιοστή συνάντηση	n.7	n.13	$t=n.18,2s$

γ) Το πλήθος των συναντήσεων τη χρονική στιγμή $t = 18,2s$ βρίσκεται από την γενική εξίσωση του 1ου ερωτήματος $t = N \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} \Rightarrow t = N \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} \Rightarrow$
 $N = 20$ συναντήσεις.

Θέμα Δ.

α) Αφού το σφαιρίδιο κινείται σε οριζόντιο επίπεδο $\Sigma \vec{F}_z = 0 \Rightarrow F_z = mg \Rightarrow F \sin \varphi = mg$ (1). Στο εφαπτομενικό

άξονα (ε) δεν υπάρχουν δυνάμεις

$\Sigma \vec{F}_\epsilon = 0 \Rightarrow \vec{a}_\epsilon = 0$ και συνεπώς το μέτρο της ταχύτητας παραμένει σταθερό... $v_{\text{μέτρο}} = \text{σταθερή}$...

κίνηση ομαλή κυκλική....

β.1) Σε κάθε περίπτωση κυκλικής κίνησης η συνισταμένη στον ακτινικό άξονα είναι κεντρομόλος δύναμη και στην περίπτωση μας αυτή είναι η $\vec{F}_\kappa$... $\Sigma \vec{F}_\kappa = \vec{F}_\kappa$ Ειδικά

αν η κίνηση είναι ομαλή κυκλική η συνισταμένη όλων των δυνάμεων

είναι κεντρομόλος δύναμη και αυτό συμβαίνει στην παρούσα άσκηση $\Sigma \vec{F}_\kappa = \vec{F} + \vec{B} = \vec{F}_\kappa$.

$$\Sigma F_\kappa = F_\kappa = F \eta \mu \varphi$$

$$\Sigma F_z = 0 \Rightarrow F_z = mg \text{ ή } F \sin \varphi = mg \quad \left. \vphantom{\Sigma F_z = 0} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Sigma F_\kappa = F \eta \mu \varphi \\ mg = F \sin \varphi \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\Sigma F_\kappa}{mg} = \varepsilon \varphi \varphi$$

$$\Rightarrow \Sigma F_\kappa = mg \varepsilon \varphi \varphi$$

$$\text{Πιο εύκολα } \varepsilon \varphi \varphi = \frac{\Sigma F_\kappa}{mg} \Rightarrow \Sigma F_\kappa = mg \varepsilon \varphi \varphi \Rightarrow \Sigma F_\kappa = 0,6 \text{ Kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \frac{0,8}{0,6} \Rightarrow$$

$$\Sigma F_\kappa = 8 \text{ N}$$

$$\beta.2) \Sigma F_\kappa = m a_\kappa \dots a_\kappa = \frac{40 \text{ m}}{3 \text{ s}^2}$$

$$\Sigma F_\kappa = m \frac{v^2}{r} \xrightarrow{r = \ell \eta \mu \varphi = \frac{2}{3} \cdot 0,8 = \frac{1,6}{3} \text{ m}} v = \sqrt{\frac{\Sigma F_\kappa r}{m}} \Rightarrow v = 2,67 \text{ m/s}$$

γ) Από τη σχέση (1) $F \sin \varphi = mg$ έχουμε $F = 10 \text{ N}$.

$$\delta) \Sigma F_\kappa = m \omega^2 r \Rightarrow mg \varepsilon \varphi \varphi = m \omega^2 \ell \eta \mu \varphi \Rightarrow g \frac{\eta \mu \varphi}{\sin \varphi} \varphi = m \omega^2 \ell \eta \mu \varphi \Rightarrow$$

$$\sin \varphi = \frac{g}{\omega^2 \ell} \quad (2) \quad \text{Ναι αλλά } 0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \text{ rad} \Rightarrow 1 > \sin \varphi > 0 \quad (3)$$

✚ $\varphi = 0$ δεν μπορεί να υπάρξει διότι τότε δεν θα είχαμε κωνικές διαδρομές

✚ $\varphi = \pi / 2 \text{ rad}$ πάλι δεν μπορεί να υπάρξει κίνηση σε οριζόντιο επίπεδο διότι δεν υπάρχει δύναμη εξουδετέρωσης του βάρους.

$$\text{Από (2) και (3) παίρνουμε } 1 > \frac{g}{\omega^2 \ell} \Rightarrow \omega > \sqrt{\frac{g}{\ell}} \Rightarrow \omega > 3,87 \text{ rad/s}$$

