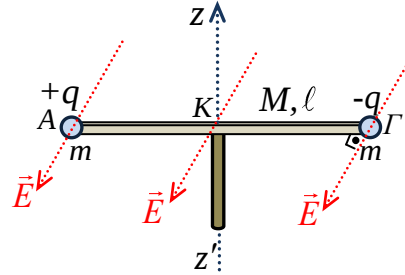


Ένα ηλεκτρικό δίπολο μέσα στο ομογενές ηλεκτρικό πεδίο και η μελέτη του ως μηχανικό στερεό.

Μια ομογενής μονωτική λεπτή ράβδος ΑΓ μήκους $\ell = 0,4\text{m}$ και μάζας $M = 0,3\text{Kg}$ είναι κατάλληλα στερεωμένη στο μέσον της και έχει την δυνατότητα περιστροφής χωρίς τριβές σε οριζόντιο επίπεδο περί κατακόρυφο άξονα $z'z$ που διέρχεται από το μέσον της. Στα άκρα της ράβδου είναι συγκολλημένα δύο όμοια σημειακά σφαιρίδια μάζας $m = 0,2\text{Kg}$ που είναι φορτισμένα με αντίθετα φορτία $+q$



και $-q$ με $q = 2,5 \cdot 10^{-6}\text{C}$. Έτσι δημιουργείται ένα ηλεκτρικό δίπολο. Κάποια στιγμή και ενώ το σύστημα αυτό του διπόλου που ηρεμεί, εφαρμόζουμε οριζόντιο ομογενές ηλεκτρικό πεδίο έντασης $E = 10^6 \frac{\text{N}}{\text{C}}$ με διεύθυνση κάθετη στην αρχική θέση της ράβδου.

α) Να βρεθεί η γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος σε συνάρτηση με την γωνία που σχηματίζει η ράβδος με την αρχική θέση.

Όταν η ράβδος έχει στραφεί κατά $\varphi = 39,79^\circ$ να βρείτε (ξεχωριστά) για όλο το σύστημα, για την ράβδο αλλά και για κάθε σφαιρίδιο, το ρυθμό μεταβολής,

β) της στροφορμής,

γ) της κινητικής ενέργειας.

Σε κάποια θέση καθώς το σύστημα στρέφεται αποκτά την μέγιστη γωνιακή ταχύτητα. Να βρείτε,

δ) τη θέση στην οποία συμβαίνει η μεγιστοποίηση της γωνιακής ταχύτητας,

ε) την μέγιστη γωνιακή ταχύτητα.

στ) στη θέση αυτή την δύναμη που ασκεί η ράβδος σε κάθε σφαιρίδιο.

Στην ανωτέρω στροφική κίνηση να βρείτε,

ζ) σε ποιά θέση μηδενίζεται η ταχύτητα του συστήματος. Μετά τον μηδενισμό της ταχύτητας το σύστημα θα ηρεμήσει;

Δίνονται: Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονά της $I = \frac{1}{12} M \ell^2$,

ενώ για την ροπή αδράνειας των σφαιριδίων αυτά να θεωρηθούν ότι έχουν αμελητέες διαστάσεις. $[\eta\mu\varphi = 0,64 \text{ συν}\varphi = 0,76 \text{ } g = 10\text{ms}^{-2}]$

Η απάντηση

Ροπή αδράνειας ράβδου: $I_\rho = \frac{1}{12} M \ell^2 \xrightarrow{s.I} I_\rho = \frac{1}{12} 0,3 \cdot 0,4^2 \Rightarrow$

$$I_\rho = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Kgm}^2$$

Ροπή αδράνειας σφαιριδίου: $I_\sigma = m \left(\frac{\ell}{2} \right)^2$

$$\xrightarrow{s.I} I_\rho = 0,2 \cdot 0,2^2 \Rightarrow$$

$$I_\rho = 8 \cdot 10^{-3} \text{ Kgm}^2$$

Ροπή αδράνειας συστήματος: $I = I_\rho + 2I_\sigma \Rightarrow$

$$I = 20 \cdot 10^{-3} \text{ Kgm}^2$$

Κάθε φορτισμένο σωματίδιο δέχεται από το ομογενές ηλεκτρικό πεδίο δύναμη $F = Eq \Rightarrow$

$$F = 10^6 \frac{\text{N}}{\text{C}} 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ C} \Rightarrow F = 2,5 \text{ N}$$

Οι δύο αυτές δυνάμεις αποτελούν ζεύγος και είναι οι μόνες ασκούμενες στο σύστημα που έχουν ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής $z'z$. Σε μια τυχαία θέση που η ράβδος έχει στραφεί κατά φ η συνολική ροπή που δέχεται το σύστημα ως προς

τον άξονα περιστροφής είναι $\Sigma\tau = Fr + Fr \Rightarrow \Sigma\tau = 2Fr \Rightarrow \Sigma\tau = 2F \frac{\ell}{2} \sin\varphi$

$$\Rightarrow \Sigma\tau = F\ell \sin\varphi \text{ (ή και ως ροπή του ζεύγους)}$$

$$\Sigma\tau = F2r \dots).$$

Παρατηρούμε ότι η ροπή αυτή δεν είναι σταθερή, άρα η κίνηση θα είναι μη ομαλά μεταβαλλόμενη.

α) Η γωνιακή επιτάχυνση στην τυχαία θέση θα

$$\text{είναι } \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\Sigma\tau}{I} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{F\ell \sin\varphi}{I} \xrightarrow{s.I}$$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{2,5 \cdot 0,4 \cdot \sin\varphi}{20 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = 50 \sin\varphi \text{ (S.I.)}$$

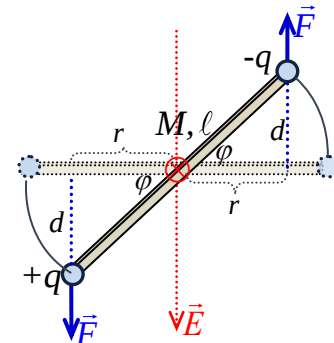
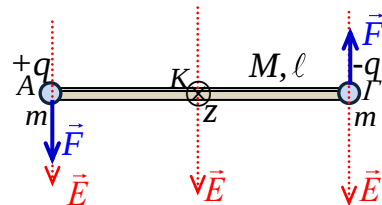
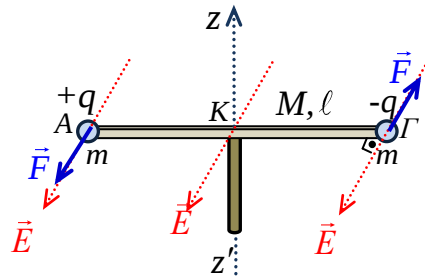
β) Όταν η ράβδος έχει στραφεί κατά γωνία $\varphi = 39,79^\circ$ η γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος είναι $\alpha_{\gamma\omega\nu} = 50 \sin\varphi \Rightarrow$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = 50,076 \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = 38 \text{ rad} / \text{s}^2.$$

Ας υπολογίσουμε με εφαρμογή του ΘΜΚΕ την γωνιακή ταχύτητα του συστήματος στη θέση αυτή. $\Delta K = W_{\text{ολ}} \Rightarrow K = W_F + W_F \Rightarrow$

$$\frac{1}{2} I \omega^2 = Fd + Fd \Rightarrow \frac{1}{2} I \omega^2 = 2F \frac{\ell}{2} \eta \mu\varphi \Rightarrow \frac{1}{2} I \omega^2 = F\ell \eta \mu\varphi \Rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2F\ell \eta \mu\varphi}{I}} \xrightarrow{s.I} \omega = \sqrt{\frac{2 \cdot 2,5 \cdot 0,4 \cdot 0,64}{20 \cdot 10^{-3}}} \Rightarrow \omega = 8 \text{ rad} / \text{s}.$$



Σχήμα σε κάτοψη
το βλέπουμε "από πάνω"

Ρυθμός μεταβολής της στροφορμής.

- Για όλο το σύστημα: $\left(\frac{dL}{dt}\right)_{\text{συσ}} = \Sigma \tau_{\text{συσ}} = I \alpha_{\gamma\omega\nu} \xrightarrow{S.I}$

$$\left(\frac{dL}{dt}\right)_{\text{συσ}} = 20 \cdot 10^{-3} \cdot 38 \Rightarrow \left(\frac{dL}{dt}\right)_{\text{συσ}} = 0,76 \text{Kgm}^2 / \text{s}^2 \dots$$

Ο υπολογισμός της μεταβολής της στροφορμής του συστήματος υπολογίζεται

και ως εξής $\left(\frac{dL}{dt}\right)_{\text{συσ}} = \Sigma \tau_{\text{συσ}} = F \ell \sin \varphi \Rightarrow \left(\frac{dL}{dt}\right)_{\text{συσ}} = 2,5 \cdot 0,4 \cdot 0,76 \Rightarrow$

$$\left(\frac{dL}{dt}\right)_{\text{συσ}} = 0,76 \text{Kgm}^2 / \text{s}^2$$

- Για την ράβδο: $\left(\frac{dL}{dt}\right)_{\rho} = \Sigma \tau_{\rho} \Rightarrow \left(\frac{dL}{dt}\right)_{\rho} = I_{\rho} \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \left(\frac{dL}{dt}\right)_{\rho} = 4 \cdot 10^{-3} \cdot 38$
 $\Rightarrow \left(\frac{dL}{dt}\right)_{\rho} = 0,152 \text{Kgm}^2 / \text{s}^2.$

- Για κάθε σφαιρίδιο: $\left(\frac{dL}{dt}\right)_{\sigma} = \Sigma \tau_{\sigma} \Rightarrow \left(\frac{dL}{dt}\right)_{\sigma} = I_{\sigma} \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow$
 $\left(\frac{dL}{dt}\right)_{\sigma} = 8 \cdot 10^{-3} \cdot 38 \Rightarrow \left(\frac{dL}{dt}\right)_{\sigma} = 0,304 \text{Kgm}^2 / \text{s}^2.$

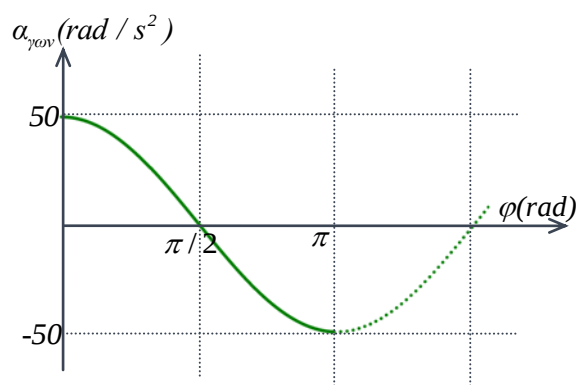
Υ) Ρυθμός μεταβολής κινητικής ενέργειας.

Για όλο το σύστημα: $\left(\frac{dK}{dt}\right)_{\text{συσ}} = \Sigma \tau_{\text{συσ}} \omega = I \alpha_{\gamma\omega\nu} \omega \Rightarrow \left(\frac{dK}{dt}\right)_{\text{συσ}} = 6,08 \text{J} / \text{s}$

Για τη ράβδο: $\left(\frac{dK}{dt}\right)_{\rho} = \Sigma \tau_{\rho} \omega = I_{\rho} \alpha_{\gamma\omega\nu} \omega \Rightarrow \left(\frac{dK}{dt}\right)_{\rho} = 1,216 \text{J} / \text{s}$

Για κάθε σφαιρίδιο: $\left(\frac{dK}{dt}\right)_{\sigma} = \Sigma \tau_{\sigma} \omega = I_{\sigma} \alpha_{\gamma\omega\nu} \omega \Rightarrow \left(\frac{dK}{dt}\right)_{\sigma} = 2,432 \text{J} / \text{s}$

δ) Από διάγραμμα $\alpha_{\gamma\omega\nu} = f(\varphi)$ φαίνεται ότι, από $\varphi = 0$ έως $\varphi = \pi/2$ η κίνηση είναι επιταχυνόμενη ενώ μετά την $\varphi = \pi/2$ γίνεται επιβραδυνόμενη. Προφανώς η μεγιστοποίηση της γωνιακής ταχύτητας γίνεται στο τέλος της επιταχυνόμενης κίνησης σε γωνιακή θέση $\varphi = \pi/2$.



ε) Ας υπολογίσουμε με εφαρμογή του ΘΜΚΕ την γωνιακή ταχύτητα του συστήματος στη θέση αυτή.

$$\Delta K = W_{o\lambda} \Rightarrow K = W_F + W_F \Rightarrow \frac{1}{2} I \omega^2 = Fd + Fd \Rightarrow \frac{1}{2} I \omega^2 = 2F \frac{\ell}{2} \eta \mu \varphi \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} I \omega^2 = F \ell \eta \mu \varphi \xrightarrow{\varphi=\pi/2} \frac{1}{2} I \omega_{\max}^2 = F \ell \Rightarrow \omega_{\max} = \sqrt{\frac{2F\ell}{I}} \xrightarrow{s.I} \omega_{\max} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2,5 \cdot 0,4}{20 \cdot 10^{-3}}} \Rightarrow \omega_{\max} = 10 \text{ rad/s}.$$

στ) Το σφαιρίδιο ως υλικό σημείο εκτελεί κυκλική κίνηση και στη ανωτέρω θέση $\varphi = \pi/2$ έχει γραμμική ταχύτητα $v = \omega_{\max} \frac{\ell}{2}$. Στη θέση αυτή η ράβδος είναι παράλληλη με το πεδίο. Οι ασκούμενες στο σφαιρίδιο δυνάμεις είναι :

- η ηλεκτρική δύναμη $F = 2,5N$,
- το βάρος του $mg = 2N$, και
- η δύναμη $\vec{A}$ από την ράβδο η οποία πρέπει να έχει τέτοια κατεύθυνση και μέτρο ώστε να δίνει δύο συνιστώσες,

✚ μία ακτινική A_k που μαζί με την ηλεκτρική δύναμη $\vec{F}$ - που έχει επίσης στη θέση αυτή τη διεύθυνση της ακτίνας - να συνιστούν την κεντρομόλο δύναμη.

✚ μια κατακόρυφη A_z που να εξουδετερώνει το βάρος του σφαιριδίου.

Αφού το σφαιρίδιο εκτελεί οριζόντια κυκλική τροχιά για τον ακτινικό άξονα θα ισχύει $\Sigma F_k = m a_k \Rightarrow A_k - F = m \omega_{\max}^2 \frac{l}{2} \xrightarrow{s.I} A_k = 6,5N$.

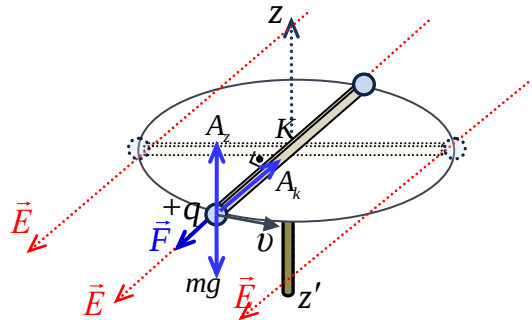
Αφού το σφαιρίδιο ισορροπεί στον κατακόρυφο άξονα $z'z$ ισχύει $\Sigma F_z = 0 \Rightarrow A_z - mg = 0 \Rightarrow A_z - mg = 0 \Rightarrow A_z = 2N$.

Η συνολική δύναμη που ασκεί η ράβδος στο σφαιρίδιο είναι $\vec{A} = \vec{A}_k + \vec{A}_z \Rightarrow A = \sqrt{A_k^2 + A_z^2} \Rightarrow A = 6,8N$. Η δύναμη αυτή σχηματίζει με την οριζόντια ράβδο γωνία $\varepsilon\varphi\theta = \frac{A_z}{A_k} \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta = \frac{2}{6,5} = 0,307 \Rightarrow \theta = 17,1^\circ$.

ζ) Ας δούμε με εφαρμογή του ΘΜΚΕ την κινητική ενέργεια του συστήματος σε συνάρτηση με την γωνία στροφής...

$$\Delta K = W_{o\lambda} \Rightarrow K = W_F + W_F \Rightarrow K = Fd + Fd \Rightarrow K = 2F \frac{\ell}{2} \eta \mu \varphi \Rightarrow$$

$K = F \ell \eta \mu \varphi$ Από εδώ φαίνεται ότι η κινητική μηδενίζεται όταν $\eta \mu \varphi = 0$... όταν $\varphi = 0$ και $\varphi = \pi \text{ rad}$... άρα η ταχύτητα μηδενίζεται όταν το σφαιρίδιο βρεθεί σε αντιδιαμετρική με την αρχική θέση δηλαδή σε $\varphi = \pi \text{ rad}$. Στη θέση αυτή δεν μπορεί να ηρεμήσει διότι το ηλεκτρικό πεδίο ασκεί στα φορτισμένα σωματίδια ζεύγος δυνάμεων που το στρέφει ανάδρομα με την αρχική φορά κίνησης και μέχρι την αρχική θέση. Γενικά κάνει μια στροφική ταλάντωση μεταξύ των θέσεων $\varphi = 0$ και $\varphi = \pi \text{ rad}$.



Σχόλια .

1. Στην άσκηση η ροπή του ζεύγους των δυνάμεων $\Sigma\tau = F\ell\sin\varphi$ δεν είναι σταθερή και συνεπώς το έργο της στην ανωτέρω στροφική κίνηση δεν μπορεί να υπολογισθεί από την σχέση $W = \Sigma\tau\cdot\varphi$.

2. Το έργο για μετατόπιση κατά φ μπορεί να υπολογισθεί και ως εξής :

$$W = q(V_A - V_{A'}) + (-q)(V_{\Gamma} - V_{\Gamma'}) \Rightarrow$$

$$W = q(V_A - V_{A'}) + q(V_{\Gamma'} - V_{\Gamma}) \Rightarrow$$

$$W = qEd + qEd = 2Eqd \Rightarrow W = 2F \frac{\ell}{2} \eta\mu\varphi$$

$$\Rightarrow W = F\ell\eta\mu\varphi$$

3. Γενικά το έργο σταθερής δύναμης ($\vec{F} = st$) που η τροχιά του σημείου εφαρμογής είναι καμπυλόγραμμη ισούται με το γινόμενο της δύναμης επί την προβολή της τροχιάς στην διεύθυνση της δύναμης ...

Για μια στοιχειώδη μετατόπιση κατά ds_i το στοιχειώδες

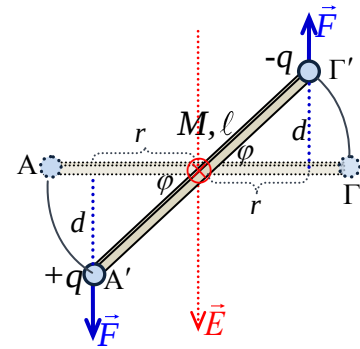
έργο της δύναμης $\vec{F}$ είναι

$$dW_i = Fds_i\cos\theta_i \Rightarrow dW_i = F(ds_i\cos\theta_i) \Rightarrow$$

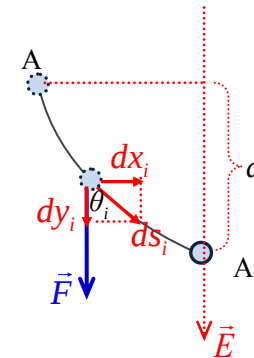
$$dW_i = Fdy_i \Rightarrow W_F = \sum_{i=1}^n (Fdy_i) \Rightarrow W_F = F \sum_{i=1}^n (dy_i)$$

$$\Rightarrow W_F = Fd$$

$$W_F = \text{δύναμη} \times \left(\begin{array}{l} \text{προβολή της διαδρομής} \\ \text{στην διεύθυνση της δύναμης} \end{array} \right)$$



Σχήμα σε κάτοψη
το βλέπουμε "από πάνω"



4. Η ασκούμενη στο δίπολο ροπή από το ηλεκτρικό πεδίο είναι $\Sigma\tau = F\ell\sin\varphi$ ή $\Sigma\tau = Eq\ell\sin\varphi$, όπου φ η γωνία στροφής ως προς την αρχική θέση. Η ποσότητα $\vec{\tau}^* = q\vec{\ell}$ ονομάζεται "διπολική ροπή" και έχει φορά από το αρνητικό φορτίο προς το θετικό φορτίο. Η ασκούμενη στο δίπολο μηχανική ροπή γράφεται $\Sigma\tau = Eq\ell\sin\varphi$

$$\Sigma\tau = q\ell E\eta\mu(90^\circ - \varphi)$$

$$\Sigma\tau = \tau^* E\eta\mu\theta$$

$$\Sigma\tau = \tau^* E\eta\mu(\vec{\tau}^*, \vec{E})$$

$$\Sigma\vec{\tau} = \vec{\tau}^* \times \vec{E}$$

