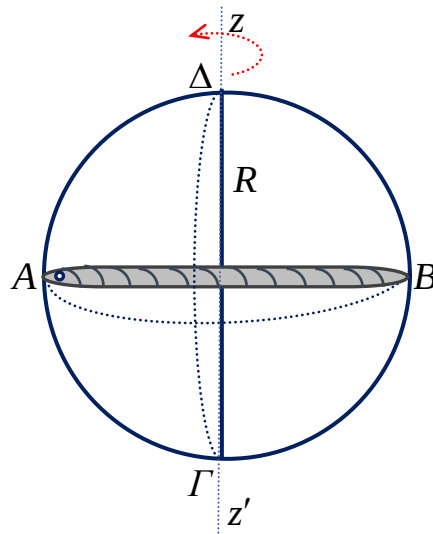


Ροπή αδράνειας που μεταβάλλεται-Σχετική κίνηση- Διατήρηση στροφορμής.

Μια γυάλινη σφαίρα ακτίνας $R = 0,6m$ έχει στερεωμένες στο εσωτερικό της δύο λεπτές μεταλλικές ράβδους που ταυτίζονται με δύο διαμέτρους μια οριζόντια AB και μια κατακόρυφη $\Gamma\Delta$. Η σφαίρα μπορεί να περιστρέφεται περί κατακόρυφο άξονα $z'z$ που ταυτίζεται με την κατακόρυφη διάμετρο $\Gamma\Delta$. Ένα φίδι μάζας $m = 2,5Kg$ και μήκος $\ell = 1,2m$ είναι τεντωμένο πάνω στην μεταλλική οριζόντια διάμετρο AB , όπως στο σχήμα. Κάποια στιγμή $t_0 = 0$ με μια στιγμιαία ροπή δίνουμε στη γυάλινη σφαίρα γωνιακή ταχύτητα $\omega_0 = 2,5rad / s$.



Ταυτόχρονα το φίδι αρχίζει να κινείται κατά μήκος του οριζοντίου μεγίστου κύκλου της γυάλινης σφαίρας. Την χρονική στιγμή t_1 το φίδι είναι το μισό κατά μήκος του μεγίστου οριζοντίου κύκλου και το άλλο μισό πάνω στην μεταλλική οριζόντια διάμετρο AB . Τη χρονική στιγμή $t_2 = 10s$ μόλις έχει φύγει ολόκληρο από την μεταλλική διάμετρο και είναι όλο πάνω στο μέγιστο οριζόντιο κύκλο της γυάλινης σφαίρας έχοντας αποκτήσει ταχύτητα $v = 0,2m / s$ ως προς τον γυάλινη σφαίρα.

α) Να βρείτε την ροπή αδράνειας του συστήματος "γυάλινη σφαίρα - φίδι" τις χρονικές στιγμές t_0, t_1, t_2 .

β) Να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα της γυάλινης σφαίρας τη χρονική στιγμή t_2 .

γ) Για το χρονικό διάστημα από t_0 έως t_2 να βρείτε το έργο της δύναμης που ασκήθηκε από το φίδι στη γυάλινη σφαίρα, καθώς και το έργο της δύναμης που δέχθηκε το φίδι από τη γυάλινη σφαίρα. Να σχολιάσετε τις διαφορετικές τιμές για τα δύο έργα.

δ) Να βρείτε τη γωνία στροφής $\Delta\varphi$ της γυάλινης σφαίρας μεταξύ των χρονικών στιγμών t_0 και t_2 .

Δίνεται η ροπή αδράνειας της γυάλινης σφαίρας (με τις δύο μεταλλικές ράβδους) ως προς τον άξονα $z'z$, $I_\sigma = 2,7Kgm^2$ και η ροπή αδράνειας λεπτής κυλινδρικής ομογενούς ράβδου ως προς άξονα κάθετο στην ράβδο που διέρχεται από κέντρο αυτής $I_{cm} = \frac{1}{2}m\ell^2$. $g = 10ms^{-2}$

Να θεωρήσετε ότι το φίδι είναι περίπου ομογενές λεπτό κυλινδρικό σώμα με πάχος αμελητέο ως προς την ακτίνα της γυάλινης σφαίρας και σταθερή την ροπή της δύναμης που ασκεί το φίδι στην σφαίρα.

Απάντηση

α) Χρονική στιγμή $t_0 = 0$: $I_0 = I_{0,σφαίρας} + I_{0,φιδιού} \Rightarrow I_0 = I_{\sigma} + \frac{1}{12}ml^2 \Rightarrow$
 $I_0 = 2,7kgm^2 + 0,3Kgm^2 \Rightarrow I_0 = 3kgm^2$

Χρονική στιγμή t_1 : $I_1 = I_{1,σφαίρας} + I_{1,φιδιού}$

Η ροπή αδράνειας του μισού φιδιού που είναι πάνω στην AB είναι :

$$I_{1,\phi 1} = \frac{1}{12} \frac{m}{2} \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 + \frac{m}{2} \left(\frac{\ell}{4} \right)^2 \Rightarrow$$

$$I_{1,\phi 1} = \frac{1}{3} \frac{m}{2} \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 \Rightarrow I_{1,\phi 1} = \frac{1}{3} \frac{m}{2} R^2 \Rightarrow$$

$$I_{1,\phi 1} = 0,15Kgm^2$$

Η ροπή αδράνειας του άλλου μισού φιδιού που είναι πάνω στον μέγιστο οριζόντιο κύκλο, υπολογίζεται από την γενική σχέση ορισμού της

ροπής αδράνειας $I = \sum_{i=1}^n (m_i r_i^2)$, λαμβάνοντας

υπόψη ότι κάθε στοιχειώδης μάζα απέχει απόσταση $r_i = R$ από τον άξονα περιστροφής $z'z$.

$$I_{1,\phi 2} = \sum_{i=1}^n (m_i r_i^2) \Rightarrow I_{1,\phi 2} = \sum_{i=1}^n (m_i R^2) \Rightarrow$$

$$I_{1,\phi 2} = R^2 \sum_{i=1}^n (m_i) \Rightarrow I_{1,\phi 2} = \frac{m}{2} R^2 \Rightarrow$$

$$I_{1,\phi 2} = 0,45Kgm^2 \dots \text{έτσι η ροπή του συστήματος}$$

$$\text{είναι } I_1 = I_{1,σφαίρας} + I_{1,φιδιού} \Rightarrow$$

$$I_1 = 2,7Kgm^2 + 0,15Kgm^2 + 0,45Kgm^2 \Rightarrow I_1 = 3,3Kgm^2$$

Χρονική στιγμή $t_2 = 10s$: $I_2 = I_{2,σφαίρας} + I_{2,φιδιού}$

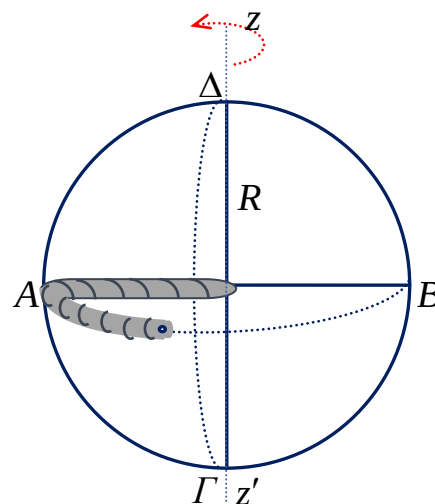
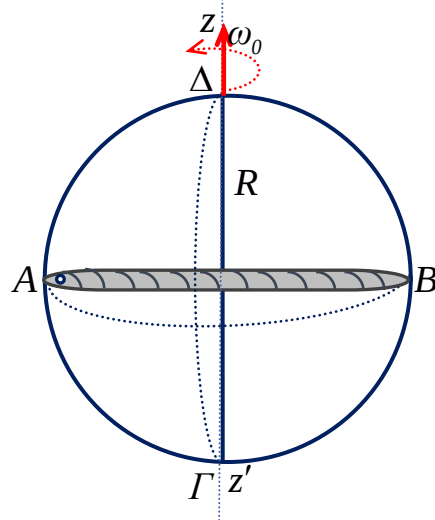
Η ροπή αδράνειας του φιδιού που είναι πάνω στον μέγιστο οριζόντιο κύκλο , υπολογίζεται από την γενική σχέση ορισμού της ροπής αδράνειας

$$I = \sum_{i=1}^n (m_i r_i^2) \text{ όπως παραπάνω.}$$

$$I_{2,\phi} = \sum_{i=1}^n (m_i r_i^2) \Rightarrow I_{2,\phi} = \sum_{i=1}^n (m_i R^2) \Rightarrow I_{2,\phi} = R^2 \sum_{i=1}^n (m_i) \Rightarrow I_{2,\phi} = mR^2 \Rightarrow$$

$$I_{1,\phi 2} = 0,9Kgm^2 \dots \text{έτσι η ροπή του συστήματος είναι}$$

$$I_2 = I_{2,σφαίρας} + I_{2,φιδιού} \Rightarrow I_2 = 2,7Kgm^2 + 0,9Kgm^2 \Rightarrow I_2 = 3,6Kgm^2$$



β) Στην κίνηση αυτή υπάρχει διατήρηση της στροφορμής του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής $z'z$.

$$L_0 = L_2 \Rightarrow I_0 \omega_0 = L_{\text{σφαίρας}} + L_{\text{φιδιού}} \Rightarrow I_0 \omega_0 = I_{\sigma} \omega + L_{\text{φιδιού}}$$

Η στροφορμή $L_{\text{φιδιού}}$ του φιδιού οφείλεται τόσο στην μετοχική κίνηση του φιδιού που είναι στροφική ($L'_{\text{φιδιού}}$) όσο και εξαιτίας της ίδιας (σχετικής) κίνησης ως προς την σφαίρα ($L''_{\text{φιδιού}}$) ... $L_{\text{φιδιού}} = L'_{\text{φιδιού}} + L''_{\text{φιδιού}}$

$$L'_{\text{φιδιού}} = I_{2,\varphi} \omega = mR^2 \omega, \quad L''_{\text{φιδιού}} = mvR$$

$$\text{Άρα} \quad I_0 \omega_0 = I_{\sigma} \omega + mR^2 \omega + mvR \xrightarrow{\text{S.I.}}$$

$$3.2,5 = 2,7\omega + 2,5.0,6^2 \omega + 2,5.0,2.0,6 \Rightarrow$$

$$7,5 = 2,7\omega + 0,9\omega + 0,3 \Rightarrow 7,5 = 3,6\omega + 0,3$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega = 2 \text{ rad / s}}$$

Σχόλιο: Η στροφορμή του φιδιού όταν είναι πάνω στον μέγιστο οριζόντιο κύκλο μπορεί να υπολογισθεί και ως εξής: Κάθε στοιχειώδης μάζα m_i του φιδιού απέχει από άξονα περιστροφής $z'z$ την ίδια απόσταση R , έχει το ίδιο μέτρο ταχύτητας $v_i = v + \omega R$ εφαπτόμενη της τροχιάς και διάνυσμα στροφορμής ως προς τον άξονα περιστροφής $L_{i,\varphi} = m_i v_i R$. Η συνολική στροφορμή του φιδιού θα είναι

$$L_{\varphi} = \sum_{i=1}^{i=n} (L_{i,\varphi}) = \sum_{i=1}^{i=n} (m_i v_i R) \Rightarrow L_{\varphi} = \sum_{i=1}^{i=n} (m_i (v + \omega R) R) \Rightarrow$$

$$L_{\varphi} = (v + \omega R) R \sum_{i=1}^{i=n} (m_i) \Rightarrow L_{\varphi} = (v + \omega R) R m \Rightarrow L_{\varphi} = mvR + mR^2 \omega \dots$$

Υ) Η δύναμη που ασκεί το φίδι στη σφαίρα είναι η μοναδική δύναμη από τις ασκούμενες στη σφαίρα που έχει έργο και συνεπώς το έργο της ισούται με την μεταβολή της κινητικής ενέργειας της σφαίρας.

$$W_{F,\sigma} = \Delta K_{\text{σφαίρας}} \Rightarrow W_{F,\sigma} = \frac{1}{2} I_{\sigma} \omega^2 - \frac{1}{2} I_{\sigma} \omega_0^2 \Rightarrow W_{F,\sigma} = \frac{1}{2} I_{\sigma} (\omega^2 - \omega_0^2) \xrightarrow{\text{S.I.}}$$

$$W_{F,\sigma} = \frac{1}{2} 2,7 (2^2 - 2,5^2) \Rightarrow \boxed{W_{F,\sigma} = -3,0375 \text{ J}}$$

Ομοίως η δύναμη που ασκεί η σφαίρα στο φίδι είναι η μοναδική δύναμη από τις ασκούμενες στο φίδι δυνάμεις που έχει έργο και συνεπώς το έργο της ισούται με την μεταβολή της κινητικής ενέργειας του φιδιού.

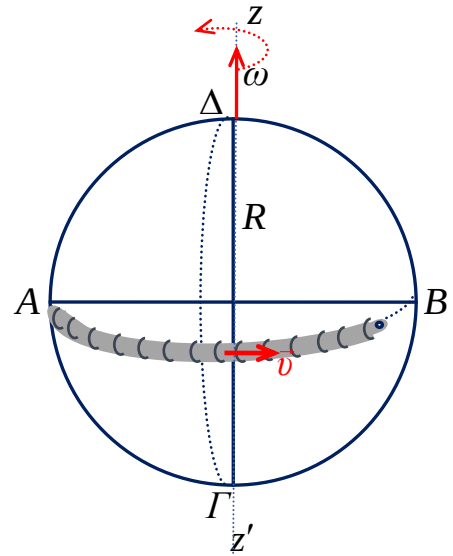
$$W_{F,\varphi} = \Delta K_{\text{φιδιού}} \Rightarrow W_{F,\varphi} = K_{\varphi, \text{τελική}} - K_{\varphi, \text{αρχική}}$$

Υπολογισμός της αρχικής κινητικής ενέργειας του φιδιού.

Αρχικά το φίδι (χρονική $t_0 = 0$) είναι ακίνητο ως την γυάλινη σφαίρα και έχει την μετοχική κίνηση από την στροφική κίνηση της σφαίρας . Εξαιτίας αυτής της στροφικής κίνησης έχει κινητική ενέργεια...

$$K_{\varphi, \text{αρχική}} = \frac{1}{2} I_{0,\varphi} \omega_0^2 \xrightarrow{\text{S.I.}} K_{\varphi, \text{αρχική}} = \frac{1}{2} 0,3.2,5^2 \Rightarrow K_{\varphi, \text{αρχική}} = 0,9375 \text{ J}$$

Τη χρονική στιγμή t_2 το φίδι μετέχει της στροφικής κίνησης της γυάλινης



σφαίρας έχοντας γωνιακή ταχύτητα ω και ταυτόχρονα έχει και ίδια (σχετική) κίνηση ως προς την σφαίρα με ταχύτητας $v = 0,2 \text{ m/s}$. Κάθε στοιχειώδους μάζα m_i του φιδιού έχει το ίδιο μέτρο ταχύτητας $v' = v + \omega R$ (ως προς ακίνητο παρατηρητή). Η κινητική ενέργεια του φιδιού θα είναι:

$$K_{\varphi, \text{τελική}} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \xrightarrow{v_i = v + \omega R} K_{\varphi, \text{τελική}} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} m_i (v + \omega R)^2 \right) \Rightarrow$$

$$K_{\varphi, \text{τελική}} = \frac{1}{2} (v + \omega R)^2 \sum_{i=1}^n (m_i) \Rightarrow K_{\varphi, \text{τελική}} = \frac{1}{2} m (v + \omega R)^2 \xrightarrow{\text{S.I.}}$$

$$K_{\varphi, \text{τελική}} = \frac{1}{2} 2,5 (0,2 + 2,0,6)^2 \Rightarrow K_{\varphi, \text{τελική}} = 2,45 \text{ J}$$

Και με αντικατάσταση αυτών των δεδομένων στην σχέση $W_{F,\varphi} = K_{\varphi, \text{τελική}} - K_{\varphi, \text{αρχική}} \Rightarrow W_{F,\varphi} = 2,45 \text{ J} - 0,9375 \text{ J} \Rightarrow W_{F,\varphi} = 1,5125 \text{ J}$

Σχόλιο: Οι δυνάμεις που ασκεί το φίδι στη σφαίρα και αντίστροφα είναι αντίθετες, αλλά δεν έχουν απολύτως ίσα έργα διότι έχουν διαφορετικές μετατοπίσεις (στροφικές και γραμμικές).

δ) Η ροπή της δύναμης που ασκεί το φίδι στη σφαίρα είναι η μοναδική που

προκαλεί την μεταβολή της στροφορμής της σφαίρας, οπότε $\Sigma \tau_{\sigma} = \frac{dL}{dt}$ και

επειδή τη ροπή αυτή την θεωρούμε σταθερή $\Sigma \tau_{\sigma} = \frac{\Delta L}{\Delta t} \Rightarrow \Sigma \tau_{\sigma} = \frac{I_{\sigma} \omega - I_{\sigma} \omega_0}{\Delta t}$

$$\Rightarrow \Sigma \tau_{\sigma} = \frac{I_{\sigma} (\omega - \omega_0)}{\Delta t} \xrightarrow{\text{S.I.}} \Sigma \tau_{\sigma} = \frac{2,7 (2 - 2,5)}{10} \text{ Nm} \Rightarrow \Sigma \tau_{\sigma} = -0,135 \text{ Nm}.$$

Το έργο όμως της ροπής δύναμης ασκεί το φίδι στη σφαίρα δίνεται από τη

$$\text{σχέση } W_{F,\sigma} = \Sigma \tau_{\sigma} \Delta \varphi \Rightarrow \Delta \varphi = \frac{W_{F,\sigma}}{\Sigma \tau_{\sigma}} \Rightarrow \Delta \varphi = \frac{-3,0375 \text{ J}}{-0,135 \text{ Nm}} \Rightarrow \Delta \varphi = 22,5 \text{ rad}$$

Σχόλιο: Δεν θα μπορούσε για την κινητική ενέργεια του φιδιού τη χρονική στιγμή t_2 να γράψουμε ότι είναι το άθροισμα της κινητικής λόγω της μετοχικής στροφικής κίνησης και της κινητικής λόγω της ίδιας κίνησης;

$$K_{\varphi, \text{τελική}} = K_{\varphi, \text{τελική στροφικής}} + K_{\varphi, \text{τελική ίδιας κίνησης}} \Rightarrow K_{\varphi, \text{τελική}} = \frac{1}{2} I_{2,\varphi} \omega^2 + \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow$$

$$K_{\varphi, \text{τελική}} = \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 + \frac{1}{2} m v^2 ;$$

Απάντηση: Όχι, στην ανεξαρτησία των κινήσεων για τις ταχύτητες ισχύει $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ ή $v^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos \theta$...από την οποία **δεν** προκύπτει ότι η

$$\text{κινητική ενέργεια } K = \frac{1}{2} m v^2 \text{ είναι } K = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2 \text{ ή } K = K_1 + K_2.$$

Ερώτημα: ... και τότε γιατί στην κύλιση - που είναι σύνθετη κίνηση

μεταφορικής και στροφικής κίνησης - γράφουμε $K_{ολ} = K_{μεταφορική} + K_{στροφική}$

ή $K_{ολ} = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$ (σχολικό βιβλίο σελίδα 128, παρ. 4.9).

... Η απάντηση σε άλλη ανάρτηση

