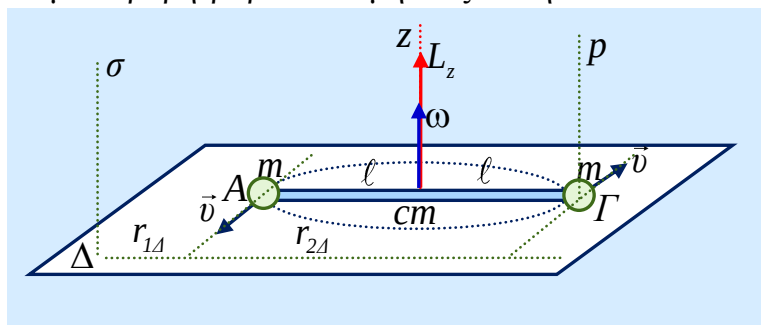


Η στροφορμή σώματος που στρέφεται περί άξονα που διέρχεται από cm.

Γενική πρόταση: Η στροφορμή ενός στερεού σώματος που στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω , περί άξονα $z'z$ κάθετο στο επίπεδό του που διέρχεται από το κέντρο μάζας του, έχει τιμή $L = I_{cm}\omega$ και είναι ίδια και ως προς οποιοδήποτε άλλον άξονα παράλληλο με τον άξονα περιστροφής $z'z$.

1η περίπτωση.

Ένα σύστημα αποτελείται από μια αβαρή ράβδο AG μήκους 2ℓ η οποία στα άκρα της A και Γ φέρει δύο σημειακές σφαίρες (1) και (2) ίδιας μάζας m . Το σύστημα αυτό στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από σταθερό άξονα $z'z$ που διέρχεται από το μέσον της ράβδου (που αποτελεί και το κέντρο μάζας του συστήματος).



Να υπολογισθεί η στροφορμή του συστήματος ως προς,

- α)** τον άξονα $z'z$ που διέρχεται από το κέντρο μάζας του συστήματος,
- β)** τον άξονα $p'p$ που είναι παράλληλος με τον $z'z$ και διέρχεται από το άκρον Γ της αβαρούς ράβδου,
- γ)** τον άξονα $\sigma'\sigma$ που είναι παράλληλος με τον $z'z$ και διέρχεται από ένα τυχαίο σημείο Δ .

Παρατήρηση: Η στροφορμή γίνεται γύρω από τον ίδιο άξονα $z'z$ που διέρχεται από το cm, αλλά ο υπολογισμός της στροφορμής γίνεται για διάφορους άξονες παράλληλους με τον άξονα περιστροφής.

α) Κάθε σημειακή μάζα έχει γραμμική ταχύτητα $v = \omega\ell$ και στροφορμή ως προς τον $z'z$ $L = mv\ell$. Η στροφορμή του συστήματος των δύο σημειακών σφαιρών είναι $L_z = mv\ell + mv\ell \xrightarrow{v=\omega\ell} L_z = 2m\omega\ell^2$ (1).

Η ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς τον άξονα $z'z$ που διέρχεται από το κέντρο μάζας είναι $I_{cm} = m\ell^2 + m\ell^2 = 2m\ell^2$ (2).

Από (1) και (2) παίρνουμε: $L_z = 2m\ell^2\omega \Rightarrow L_z = I_{cm}\omega$

β) $L_p = L_{1p} + L_{2p} = mv2\ell + mv \cdot 0 \xrightarrow{v=\omega\ell} L_p = 2m\omega\ell^2 \xrightarrow{(2)} L_p = I_{cm}\omega$

γ) $L_\sigma = L_{1\sigma} + L_{2\sigma} = -mvr_{1\Delta} + mvr_{2\Delta} \xrightarrow{r_{2\Delta}-r_{1\Delta}=2\ell} L_\sigma = 2m\omega\ell^2 \xrightarrow{(2)} L_\sigma = I_{cm}\omega$



Άρα στην περίπτωση αυτή η στροφορμή είναι ίδια για άξονα παράλληλο με τον άξονα περιστροφής που διέρχεται από το cm, $L_z = L_p = L_\sigma = I_{cm}\omega$

2η περίπτωση:

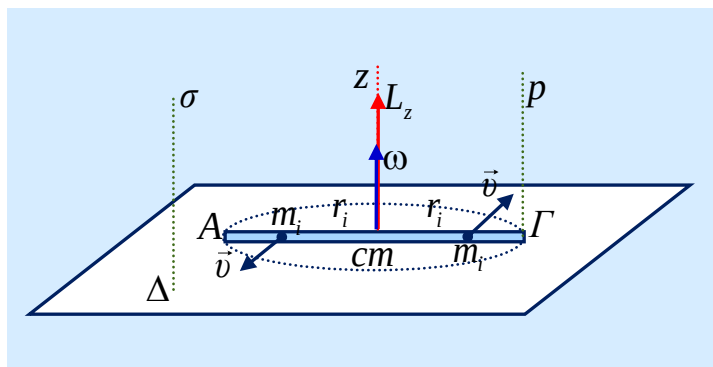
Μια ομογενής κυλινδρική λεπτή ράβδος ΑΓ μάζας M και μήκους ℓ στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από σταθερό άξονα $z'z$ που διέρχεται από το μέσον της ράβδου (που αποτελεί και το κέντρο μάζας της).

Να υπολογισθεί η στροφορμή του συστήματος ως προς,

α) τον άξονα $z'z$ που διέρχεται από το κέντρο μάζας της,

β) τον άξονα $p'p$ που είναι παράλληλος με τον $z'z$ και διέρχεται από το άκρον Γ της αβαρούς ράβδου,

γ) τον άξονα $\sigma'\sigma$ που είναι παράλληλος με τον $z'z$ και διέρχεται από ένα τυχαίο σημείο Δ.



Η ράβδος μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από n δυάδες σημειακών μαζών m_i συμμετρικές ως προς το cm της ράβδου και που απέχουν από αυτό απόσταση r_i . Κάθε σημειακή μάζα έχει γραμμική ταχύτητα $v_i = \omega r_i$ και στροφορμή ως προς τον $z'z$ $L_i = m v_i r_i$. Η στροφορμή του συστήματος των σημειακών αυτών μαζών είναι $L_{iz} = m v_i r_i + m v_i r_i \xrightarrow{v_i = \omega r_i} L_{iz} = 2 m_i \omega r_i^2 \Rightarrow L_{iz} = (2 m_i r_i^2) \omega$.

Η στροφορμή του συστήματος των σημειακών αυτών μαζών είναι ίδια και κάθε άλλον παράλληλο άξονα π.χ για το $p'p$ είναι

$$L_{ip} = L_{i1p} + L_{i2p} = m v_i (r_i + \frac{l}{2}) - m v_i (\frac{l}{2} - r_i) \Rightarrow L_{ip} = 2 m v_i r_i \xrightarrow{v_i = \omega r_i}$$

$$L_{ip} = 2 m_i \omega r_i^2 \Rightarrow L_{ip} = (2 m_i r_i^2) \omega \dots \text{όμοια βρίσκουμε } L_{i\sigma} = (2 m_i r_i^2) \omega$$

Η στροφορμή όλης της ράβδου είναι προφανώς το άθροισμα όλων των n δυάδων των σημειακών μαζών m_i ...

$$L_z = L_p = L_\sigma = \Sigma(L_{iz}) = \Sigma((2 m_i r_i^2) \omega) \Rightarrow L_z = L_p = L_\sigma = \omega \Sigma(2 m_i r_i^2) (1).$$

Η ποσότητα όμως $\Sigma(2 m_i r_i^2)$ είναι το άθροισμα όλων των στοιχειωδών μαζών της ράβδου επί το τετράγωνο της απόστασης κάθε στοιχειώδους μάζας από τον άξονα $z'z$ και αποτελεί την ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα αυτόν που διέρχεται από το cm, $I_{cm} = \Sigma(2 m_i r_i^2)$. Έτσι η (1) γράφεται

$$L_z = L_p = L_\sigma = I_{cm} \omega \Rightarrow L_z = L_p = L_\sigma = \frac{1}{12} M \ell^2 \omega$$

Άρα η στροφορμή μιας ράβδου που στρέφεται περί άξονα που διέρχεται από το cm είναι $L_{cm} = I_{cm}\omega$ και είναι *ίδια και για κάθε άλλον άξονα* παράλληλο με τον άξονα περιστροφής που διέρχεται από το cm, $L_z = L_p = L_\sigma = I_{cm}\omega$.

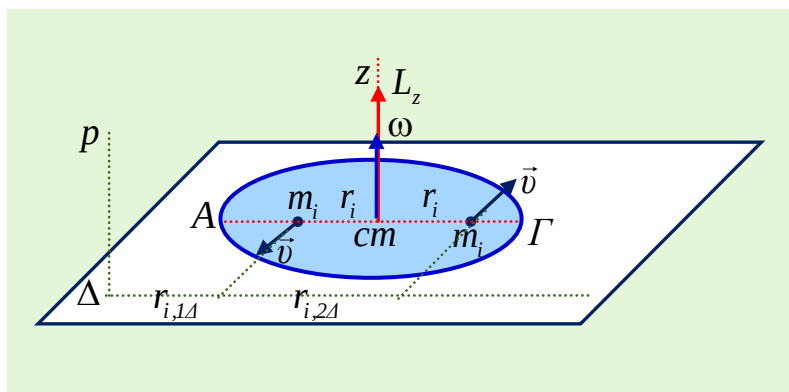
3η περίπτωση:

Ένας ομογενής δίσκος μάζας M και ακτίνας R στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από σταθερό άξονα $z'z$ που διέρχεται από το κέντρο μάζας του.

Να υπολογισθεί η στροφορμή του συστήματος ως προς,

α) τον άξονα $z'z$ που διέρχεται από το κέντρο μάζας του συστήματος,

β) τον άξονα $p'p$ που είναι παράλληλος με τον $z'z$ και διέρχεται από το τυχαίο σημείο Δ .



Ο δίσκος μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από n δυάδες σημειακών μαζών m_i συμμετρικές ως προς το κέντρο μάζας του (cm) και που απέχουν από αυτό απόσταση r_i . Κάθε σημειακή μάζα έχει γραμμική ταχύτητα $v_i = \omega r_i$ και στροφορμή ως προς τον $z'z$ $L_i = m v_i r_i$. Η στροφορμή του συστήματος των σημειακών αυτών μαζών είναι $L_{iz} = m v_i r_i + m v_i r_i \xrightarrow{v_i = \omega r_i} L_{iz} = 2 m_i \omega r_i^2 \Rightarrow L_{iz} = (2 m_i r_i^2) \omega$.

Η στροφορμή του συστήματος των σημειακών αυτών μαζών είναι ίδια και κάθε άλλον παράλληλο άξονα π.χ για το $p'p$ είναι

$$L_{ip} = L_{i1p} + L_{i2p} = -m v_i r_{i,1\Delta} + m v_i r_{i,2\Delta} \Rightarrow L_{ip} = m v_i (r_{i,2\Delta} - r_{i,1\Delta}) \Rightarrow L_{ip} = m v_i 2 r_i \xrightarrow{v_i = \omega r_i} L_{ip} = 2 m_i \omega r_i^2 \Rightarrow L_{ip} = (2 m_i r_i^2) \omega \dots$$

Η στροφορμή όλου του δίσκου είναι προφανώς το άθροισμα όλων των n δυάδων των σημειακών μαζών m_i ...

$$L_z = L_p = \Sigma(L_{iz}) = \Sigma((2 m_i r_i^2) \omega) \Rightarrow L_z = L_p = \omega \Sigma(2 m_i r_i^2) (1).$$

Η ποσότητα όμως $\Sigma(2 m_i r_i^2)$ είναι το άθροισμα όλων των στοιχειωδών μαζών του δίσκου επί το τετράγωνο της απόστασης κάθε στοιχειώδους μάζας από τον άξονα $z'z$ και αποτελεί την ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα αυτόν που διέρχεται από το cm, $I_{cm} = \Sigma(2 m_i r_i^2)$. Έτσι η (1) γράφεται $L_z = L_p = I_{cm} \omega$

$$\Rightarrow L_z = L_p = \frac{1}{12} M R^2 \omega$$

Άρα η στροφορμή ενός δίσκου που στρέφεται περί άξονα που διέρχεται από το cm είναι $L_{cm} = I_{cm}\omega$ και είναι *ίδια και για κάθε άλλον άξονα* παράλληλο με τον άξονα περιστροφής που διέρχεται από το cm, $L_z = L_p = I_{cm}\omega$.

Παρατήρηση (άλλη μια φορά): Η στροφική κίνηση σε όλες τις περιπτώσεις γίνεται γύρω από τον ίδιο άξονα $z'z$ που διέρχεται από το cm, αλλά ο υπολογισμός της στροφορμής γίνεται για διάφορους άξονες παράλληλους με τον άξονα περιστροφής.

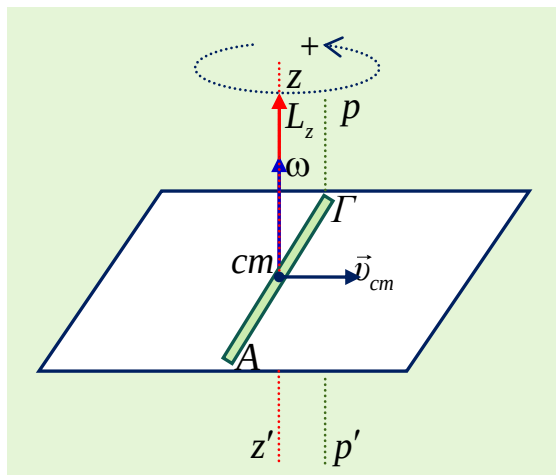
1η εφαρμογή:

Μια ομογενής λεπτή ράβδος ΑΓ μάζας M και μήκους ℓ εκτελεί σύνθετη κίνηση πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Μεταφέρεται με ταχύτητα v_{cm} και στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από σταθερό άξονα $z'z$ που διέρχεται από το κέντρο μάζας της, έχοντας τη φορά του σχήματος.

Να υπολογισθεί η στροφορμή της ράβδου ως προς,

α) τον άξονα περιστροφής $z'z$ που διέρχεται από το κέντρο μάζας της,

β) τον άξονα $p'p$ που είναι παράλληλος με τον $z'z$ και διέρχεται από το άκρον Γ της ράβδου,



$$\alpha) L_z = L_{\text{στροφικής}} + L_{\text{μεταφορικής}} = I_z \omega + M v_{cm} r \Rightarrow L_z = I_{cm} \omega \Rightarrow L_z = \frac{1}{12} M \ell^2 \omega$$

$=0$

$$\beta) L_\Gamma = L_{\text{στροφικής}} + L_{\text{μεταφορικής}} = I_{cm} \omega + M v_{cm} r \Rightarrow L_\Gamma = I_{cm} \omega + M v_{cm} \frac{\ell}{2} \Rightarrow$$

ίδιο

$$L_\Gamma = \frac{1}{12} M \ell^2 \omega + M v_{cm} \frac{\ell}{2}$$

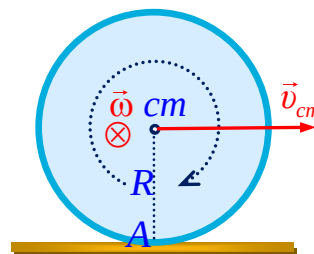
2η εφαρμογή:

Μια ομογενής σφαίρα μάζας M και ακτίνας R κυλίζει χωρίς ολίσθηση πάνω σε οριζόντιο δάπεδο.

Να υπολογισθεί η στροφορμή της ράβδου ως προς,

α) τον οριζόντιο άξονα περιστροφής της $y'y$ που διέρχεται από το κέντρο μάζας της,

β) τον οριζόντιο άξονα $p'p$ που είναι παράλληλος με τον $y'y$ και διέρχεται από το σημείο επαφής Α της σφαίρας με το δάπεδο.



$$\alpha) L_{cm} = L_{\text{στροφοκίης}} + L_{\text{μεταφορική}} = I_{cm}\omega + Mv_{cm}r \Rightarrow L_{cm} = I_{cm}\omega \Rightarrow$$

$$L_{cm} = \frac{2}{5}Mr^2\omega$$

$$\beta) L_A = L_{\text{στροφοκίης}} + L_{\text{μεταφορική}} = I_{cm}\omega + Mv_{cm}R \Rightarrow L_A = \frac{2}{5}MR^2\omega + Mv_{cm}R$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{κύλιση χωρίς ολίσθηση} \\ v_{cm} = \omega R}]{\text{κύλιση χωρίς ολίσθηση}} L_A = \frac{2}{5}MR^2\omega + M\omega R^2 \Rightarrow L_A = \frac{7}{5}MR^2\omega \text{ ή}$$

$$L_A = \frac{7}{5}MR^2 \frac{v_{cm}^2}{R^2} \Rightarrow L_A = \frac{7}{5}Mv_{cm}^2$$

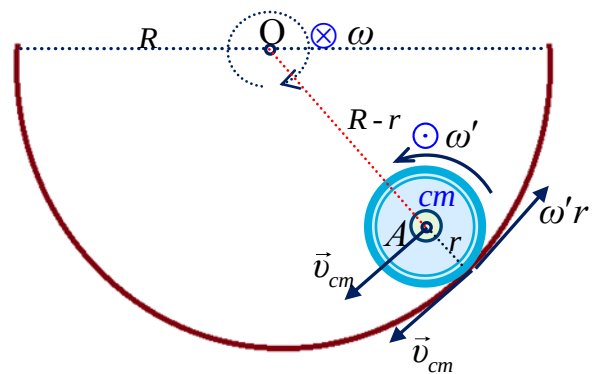
3η εφαρμογή:

Μια ομογενής σφαίρα μάζας M και ακτίνας r κυλίεται χωρίς ολίσθηση στο εσωτερικό μιας ακλόνητης στεφάνης ακτίνας R .

Να υπολογισθεί η στροφορμή της σφαίρας

α) ως προς το άξονα αυτοπεριστροφής της που διέρχεται από το κέντρο μάζας της

β) ως άξονα παράλληλο με τον άξονα αυτοπεριστροφής που διέρχεται από το κέντρο O της στεφάνης.



Η σφαίρα εκτελεί κύλιση χωρίς ολίσθηση με γωνιακή ταχύτητα αυτοπεριστροφής ω' γύρω από τον άξονά της και ταχύτητα μεταφοράς του κέντρου v_{cm} . Αφού η σφαίρα κυλίεται χωρίς ολίσθηση η ταχύτητα του σημείου επαφής της με την ακίνητη στεφάνη θα είναι μηδέν όπου προκύπτει $v_{cm} = \omega'r$ (1), έχει δε φορά αυτοπεριστροφής αυτή που φαίνεται στο σχήμα. Από τη μεταφορική κίνηση του κέντρου μάζας της σφαίρας που είναι κυκλική κίνηση ακτίνας $R-r$ έχουμε $v_{cm} = \omega(R-r)$ (2), όπου ω η γωνιακή ταχύτητα της κυκλικής κίνησης. Αν θέλουμε την σχέση των ω' και ω αυτή προκύπτει από τις (1) και (2).. $v_{cm} = \omega'r = \omega(R-r) \dots$

$$\alpha) L_{cm} = L_{\text{στροφοκίης}} + L_{\text{μεταφορική}} = I_{cm}\omega' + Mv_{cm}r \Rightarrow L_{cm} = I_{cm}\omega' \Rightarrow$$

$$L_{cm} = \frac{2}{5}Mr^2\omega'$$

$$\beta) L_O = L_{\text{στροφοκίης}} - L_{\text{μεταφορική}} = I_{cm}\omega' - Mv_{cm}(R-r) \Rightarrow$$

$$L_A = \frac{2}{5}Mr^2\omega' - Mv_{cm}(R-r) \xrightarrow[\substack{\text{κύλιση χωρίς ολίσθηση} \\ v_{cm} = \omega'r}]{\text{κύλιση χωρίς ολίσθηση}} L_A = \frac{2}{5}Mv_{cm}^2 - Mv_{cm}(R-r).$$

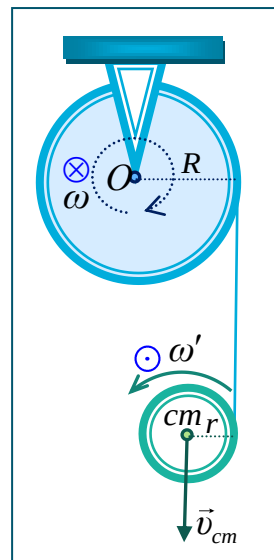
Προσοχή : Οι δύο αυτές στροφορμές λόγω αυτοπεριστροφής και κυκλικής



κίνησης του κέντρου μάζας έχουν αντίθετες φορές...και προφανώς αφαιρούνται!!

4η εφαρμογή:

Από μια ακλόνητη τροχαλία μάζας M και ακτίνας R είναι τυλιγμένο μη εκτατό νήμα στο άλλο άκρο του είναι τυλιγμένος δίσκος μάζας m και ακτίνας $r < R$. Αφήνουμε ελεύθερο το σύστημα με την τροχαλία να στρέφεται και τον δίσκο να κατέρχεται με στροφική και μεταφορική κίνηση. Να γραφεί η σχέση που δίνει την στροφορμή του συστήματος ως τον άξονα περιστροφής της τροχαλίας.



Ο δίσκος αυτοπεριστρέφεται και κάποια στιγμή έχει γωνιακή ταχύτητα αυτοπεριστροφής ω' και ταχύτητα μεταφοράς v_{cm} . Η τροχαλία εκτελεί στροφική κίνηση και την ίδια στιγμή έχει γωνιακή ταχύτητα ω .

✚ Στροφορμή του δίσκου ως τον άξονα αυτοπεριστροφής

$$\text{του, } I_{\delta,cm} = I_{cm,\delta} \omega' \Rightarrow I_{\delta,cm} = \frac{1}{2} m r^2 \omega'.$$

✚ Στροφορμή συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής της τροχαλίας που είναι παράλληλος με τον άξονα αυτοπεριστροφής του δίσκου.

$$L_{ολ,O} = -\underset{\text{ίδιο}}{L_{\delta,cm}(\text{αυτοπεριστροφής}),O} + L_{\delta,\text{μεταφοράς},O} + L_{\text{τροχαλίας},O} \Rightarrow$$

$$L_{ολ,O} = -I_{\delta,cm} \omega' + m v_{cm} (R - r) + I_{\text{τροχ},O} \omega \Rightarrow$$

$$L_{ολ,O} = -\frac{1}{2} m r^2 \omega' + m v_{cm} (R - r) + \frac{1}{2} M R^2 \omega \dots$$

