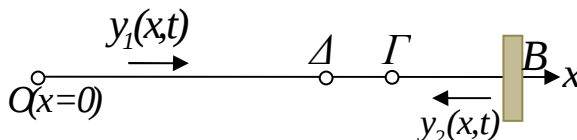


Στάσιμα κύματα σε μια χορδή ύστερα από ανάκλαση.

Μια οριζόντια ελαστική χορδή OB μήκους $\ell = 110m$ εκτείνεται κατά μήκος του άξονα $x'x$ και είναι ακλόνητα στερεωμένη στο άκρο της B. Το ελεύθερο άκρο της χορδής $O(x=0)$ το θεωρούμε αρχή μετρήσεων του άξονα $x'x$. Στο σημείο $O(x=0)$ υπάρχει πηγή παραγωγής αρμονικών εγκάρσιων κυμάτων. Η πηγή αυτή αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ με θετική ταχύτητα ταλάντωσης και σε χρόνο $\Delta t = 0,2s$ κάνει μια πλήρη ταλάντωση διαγράφοντας μήκος τροχιάς $s = 0,4m$. Εξαιτίας αυτής της ταλάντωσης δημιουργείται εγκάρσιο κύμα $y_1(x,t)$ το οποίο διαδίδεται προς τα θετικά του άξονα διάδοσης $x'x$ και τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,55s$ κτυπάει στο άκρο B οπότε ανακλάται δημιουργώντας κύμα $y_2(x,t)$.



- A)** Να γραφούν οι εξισώσεις των τρεχόντων κυμάτων $y_1(x,t)$ και $y_2(x,t)$.
- B)** Εξηγήστε ότι η συμβολή των δύο αυτών κυμάτων δίνει στάσιμο κύμα του οποίου ζητείται η εξίσωση $y_{στ}(x,t)$ - για το ίδιο σύστημα αναφοράς που γράφτηκαν και οι εξισώσεις των τρεχόντων κυμάτων-.
- Γ)** Να βρεθεί το πλήθος των δεσμών και των κοιλιών στη χορδή.
- Δ)** Για το σημείο $\Gamma(x_\Gamma = 80cm)$ να γίνει σε βαθμολογημένους άξονες και σε συνάρτηση με το χρόνο η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης $y_\Gamma = f(t)$.
- Ε)** Να βρείτε την απομάκρυνση του σημείου $\Delta(x_\Delta = 65cm)$ τις χρονικές στιγμές $t_2 = 0,75s$ και $t_3 = \frac{61}{40}s$.
- Στ)** Να σχεδιασθεί το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος τη χρονική στιγμή $t = \frac{119}{60}s$.
- Ζ)** Ένα σημείο M της χορδής είναι μεταξύ πρώτου και δεύτερου δεσμού του στάσιμου κύματος και έχει ενέργεια ταλάντωσης ίση με το 36% της ενέργειας μιας κοιλίας. Να βρείτε την απομάκρυνση του σημείου αυτού τη χρονική στιγμή $t = \frac{73}{60}s$.
- Η)** Αν τριπλασιάσουμε την συχνότητα διέγερσης της χορδής πόσοι δεσμοί στάσιμου κύματος δημιουργούνται στη χορδή.
- Θ)** Αν η χορδή ήταν ακλόνητα δεμένη και στα δύο άκρα της, για ποιές συχνότητες θα δημιουργούνταν στάσιμα κύματα στην χορδή αυτή;

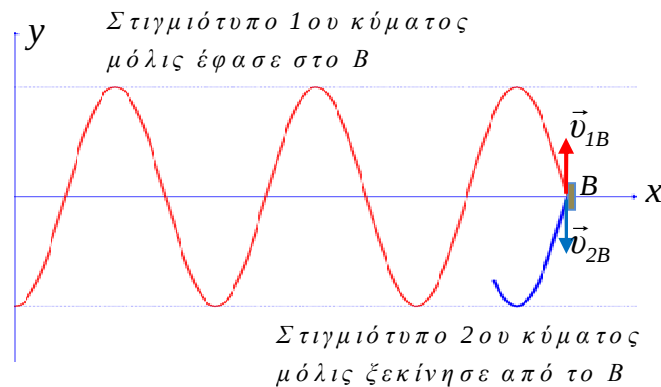
Απάντηση.

A) $T = 0,2s \Rightarrow f = 5Hz \Rightarrow \omega = 10\pi \frac{rad}{s}$, $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\ell}{t_1} \Rightarrow v = \frac{1,1m}{0,55s}$

$$\Rightarrow v = 2 \text{ m/s} , \lambda = \frac{v}{f} \Rightarrow \dots \lambda = 0,4 \text{ m}$$

Εξίσωση 1ου κύματος: $y_1(x,t) = A \eta \mu \left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} \right) \Rightarrow$

$$y_1(x,t) = 0,1 \eta \mu (10\pi t - 5\pi x) \text{ (S.I.)}$$



Παρατήρηση: Αφού το B είναι ακλόνητα στερεωμένο, θα έχει συνολικά ταχύτητα $v_B = 0$ (δεσμός), άρα πρέπει το ανακλώμενο κύμα (2) που ξεκινάει από B, να έχει ταχύτητα $\vec{v}_{2B}$ τέτοια ώστε: $\vec{v}_{1B} + \vec{v}_{2B} = 0 \Rightarrow \vec{v}_{2B} = -\vec{v}_{1B}$.

Δηλαδή το κύμα (2) ξεκινάει από την θέση $x = \ell$ με απομάκρυνση $y = 0$ και αρνητική ταχύτητα ταλάντωσης $v_{2B} < 0$. Έτσι η φάση κάθε σημείου της χορδής που αρχίζει την ταλάντωση εξαιτίας του κύματος (2) είναι $\varphi = \pi$, ενώ η φάση κάθε σημείου της χορδής τη στιγμή που αρχίζει να ταλαντώνεται εξαιτίας του κύματος (1) είναι $\varphi = 0$. Επίσης επειδή η αρχή $O(x=0)$ είναι ελεύθερη για κίνηση εκεί έχουμε κοιλία.

Εξίσωση 2ου κύματος: $y_2(x,t) = A \eta \mu \left(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi_0 \right) \Rightarrow$

$y_2(x,t) = 0,1 \eta \mu (10\pi t + 5\pi x + \varphi_0)$ (S.I.). Το σημείο B εξαιτίας αυτού του κύματος έχει εξίσωση $y_{2B}(t) = 0,1 \eta \mu (10\pi t + 5\pi x_B + \varphi_0) \Rightarrow$

$$y_{2B}(t) = 0,1 \eta \mu (10\pi t + 5\pi \cdot 1,1 + \varphi_0) \Rightarrow y_{2B}(t) = 0,1 \eta \mu (10\pi t + 5,5\pi + \varphi_0) .$$

Η φάση αυτού του σημείου μόλις αρχίζει την ταλάντωση εξαιτίας του 2ου κύματος δηλαδή την $t_1 = 0,55 \text{ s}$, είναι $\varphi_{2B} = \pi \Rightarrow 10\pi \cdot 0,55 + 5,5\pi + \varphi_0 = \pi \Rightarrow \varphi_0 = -10\pi \dots$ άρα η εξίσωση του 2ου κύματος- για το ίδιο σύστημα αναφοράς - είναι: $y_{2B}(t) = 0,1 \eta \mu (10\pi t + 5\pi x_B - 10\pi)$ (S.I.) $\forall t \geq 0,55 \text{ s}$.

B) Για να δημιουργηθεί στάσιμο κύμα στη χορδή αυτή πρέπει να έχουμε κοιλία στην αρχή και δεσμό στο τέλος. Για να μπορεί να γίνει αυτό πρέπει η συνταγμένη της θέσης του τελευταίου δεσμού να συμπίπτει με το μήκος της

$$\text{χορδής} \dots x_B = \ell = (2k+1) \frac{\lambda}{4} \Rightarrow \ell = (2k+1) \frac{v}{4f} \Rightarrow f = (2k+1) \frac{v}{4\ell}$$

$f = (2k + 1) \frac{2}{4,1,1} \Rightarrow f = (2k + 1) \frac{5}{11}$ (S.I) (1). Δηλαδή για να έχουμε στάσιμα κύματα στη χορδή αυτή πρέπει οι συχνότητες να είναι ακέραια περιττά πολλαπλάσια της θεμελιώδους συχνότητας $f_0 = \frac{5}{11} \text{ Hz}$... η ποσότητα $2k + 1$ πρέπει να είναι ακέραιος περιττός αριθμός. Τώρα επειδή η συχνότητα είναι $f = 5 \text{ Hz} \xrightarrow{(1)} 5 = (2k + 1) \frac{5}{11} \Rightarrow 2k + 1 = 11$ που είναι πράγματι ακέραιος περιττός αριθμός.

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος προκύπτει από την συμβολή των δύο κυμάτων $y_{\sigma\tau}(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$

$$\Rightarrow y_{\sigma\tau}(x,t) = 0,1\eta\mu(10\pi t - 5\pi x) + 0,1\eta\mu(10\pi t + 5\pi x_B - 10\pi)$$

$\Rightarrow y_{\sigma\tau}(x,t) = 0,2\sigma\upsilon\nu(5\pi x - 5\pi)\eta\mu(10\pi t - 5\pi)$ (S.I) (2). Το στάσιμο κύμα αρχίζει να δημιουργείται την $t_1 = 0,55\text{s}$ και η δημιουργία του σε όλη την χορδή ολοκληρώνεται την $t = 2t_1 = 1,1\text{s}$. Η εξίσωση (2) απλοποιούμενη μαθηματικά γίνεται $y_{\sigma\tau}(x,t) = 0,2\sigma\upsilon\nu(5\pi x)\eta\mu(10\pi t)$ (S.I) (3).

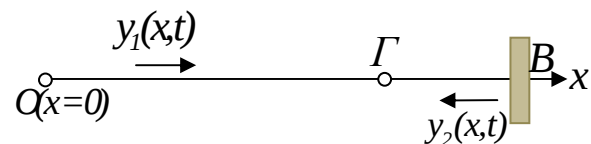
Γ) ... $2k + 1 = 11 \Rightarrow k = 5$... άρα ... έχουμε έξι δεσμούς και έξι κοιλίες.

Δ) Το σημείο $\Gamma(x_\Gamma = 80\text{cm})$ δέχεται το 1ο κύμα την χρονική στιγμή

$$t'_1 = \frac{0,8\text{m}}{2\text{m/s}} = 0,4\text{s} \text{ και το 2ο}$$

κύμα (οπότε αρχίζει και η συμβολή) την χρονική στιγμή

$$t'_2 = \frac{(0,8 + 0,3 + 0,3)\text{m}}{2\text{m/s}} = 0,7\text{s}.$$



Το σημείο Γ εξαιτίας του 1ου κύματος έχει εξίσωση ταλάντωσης $y_{1\Gamma}(t) = 0,1\eta\mu(10\pi t - 5\pi \cdot 0,8) \Rightarrow y_{1\Gamma}(t) = 0,1\eta\mu(10\pi t - 4\pi)$ (S.I) (4) και αυτή ισχύει για $t \geq 0,4\text{s}$.

Το σημείο Γ εξαιτίας του 2ου κύματος έχει εξίσωση ταλάντωσης $y_{2\Gamma}(t) = 0,1\eta\mu(10\pi t + 5\pi \cdot 0,8 - 10\pi) \Rightarrow y_{2\Gamma}(t) = 0,1\eta\mu(10\pi t - 6\pi)$ (S.I) (5) και αυτή ισχύει για $t \geq 0,7\text{s}$... οπότε αρχίζει η συμβολή και στο Γ αρχίζει η δημιουργία του στάσιμου κύματος ... άρα η εξίσωση ταλάντωσης του Γ είναι

$$y_{\sigma\tau,\Gamma}(t) = 0,2\sigma\upsilon\nu(5\pi \cdot 0,8)\eta\mu(10\pi t) \Rightarrow$$

$$y_{\sigma\tau,\Gamma}(t) = 0,2\sigma\upsilon\nu(5\pi \cdot 0,8)\eta\mu(10\pi t) \Rightarrow$$

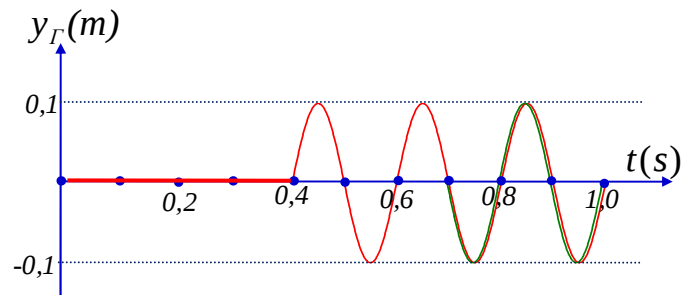
$$y_{\sigma\tau,\Gamma}(t) = 0,2\eta\mu(10\pi t) \text{ (S.I). } \forall t \geq 0,7\text{s}$$

✚ Για $t < 0,4\text{s}$, $y_\Gamma(t) = 0$ γιατί δεν έχει φθάσει κανένα κύμα στο Γ .

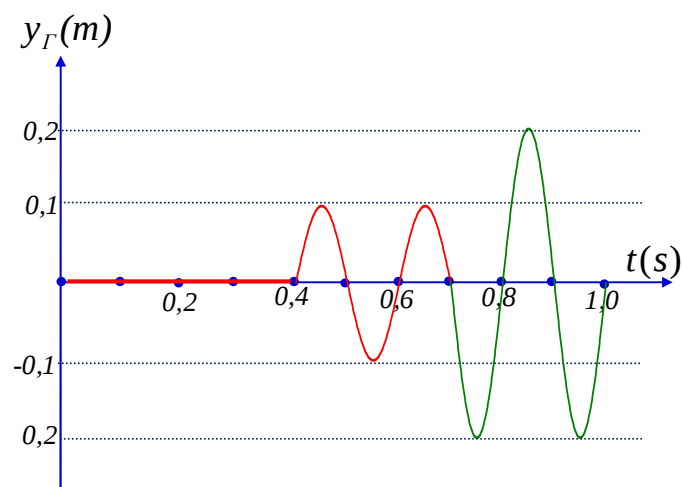
✚ Για $0,4\text{s} \leq t < 0,7\text{s}$, $y_{1\Gamma}(t) = 0,1\eta\mu(10\pi t - 4\pi)$ ταλάντωση εξαιτίας μόνο του 1ου κύματος.

✚ Για $t \geq 0,7\text{s}$, $y_{\sigma\tau,\Gamma}(t) = 0,2\eta\mu(10\pi t)$ ταλάντωση εξαιτίας της συμβολής που έχει δημιουργήσει στάσιμο κύμα.

Οι δύο ανεξάρτητες ταλαντώσεις
 $y_{1Γ}(t)$ και $y_{2Γ}(t)$ του σημείου $Γ$.



Η συνολική - τελική ταλάντωση του
 σημείου $Γ$ μέχρι την συμβολή και
 μετά από αυτή.



- Ε)** Το σημείο $\Delta(x_{\Delta}=65\text{cm})$ δέχεται το 1ο κύμα την χρονική στιγμή
 $t'_{\Delta} = \frac{0,65\text{m}}{2\text{m/s}} = 0,325\text{s}$ και το 2ο κύμα (οπότε αρχίζει και η συμβολή) την
 χρονική στιγμή $t''_{\Delta} = \frac{(0,65 + 2 \cdot (1,1 - 0,65))\text{m}}{2\text{m/s}} = 0,755\text{s}$.

Το σημείο Δ εξαιτίας του 1ου κύματος έχει εξίσωση ταλάντωσης $y_{1Δ}(t) = 0,1\eta\mu(10\pi t - 5\pi \cdot 0,65) \Rightarrow y_{1Δ}(t) = 0,1\eta\mu(10\pi t - 3,25\pi)$ (S.I) και αυτή ισχύει για $t \geq 0,325s$.

Το σημείο Δ εξαιτίας της συμβολής έχει εξίσωση (μετά την $t''_{\Delta} = 0,755s$)

$$y_{\sigma\tau,\Delta}(t) = 0,2\sigma\upsilon\nu(5\pi \cdot 0,65)\eta\mu(10\pi t) \Rightarrow$$

$$y_{\sigma\tau,\Delta}(t) = 0,2\sigma\upsilon\nu(3,25\pi)\eta\mu(10\pi t) \Rightarrow$$

$$y_{\sigma\tau,\Delta}(t) = -0,1\sqrt{2}\eta\mu(10\pi t) \text{ (S.I)} \quad \forall t \geq 0,755s$$

✚ Άρα για $t = 0,75s$ στο Δ έχει φθάσει μόνο το 1ο κύμα ... και

$$y_{\Delta} = 0,1\eta\mu(10\pi \cdot 0,75 - 3,25\pi) \Rightarrow y_{\Delta} = 0,1\eta\mu(4,25\pi) \Rightarrow y_{\Delta} = 5\sqrt{2}cm$$

✚ Για $t = \frac{61}{40}s$ στο Δ έχει αρχίσει η συμβολή και $y_{\sigma\tau,\Delta}(t) = -0,1\sqrt{2}\eta\mu(10\pi t)$

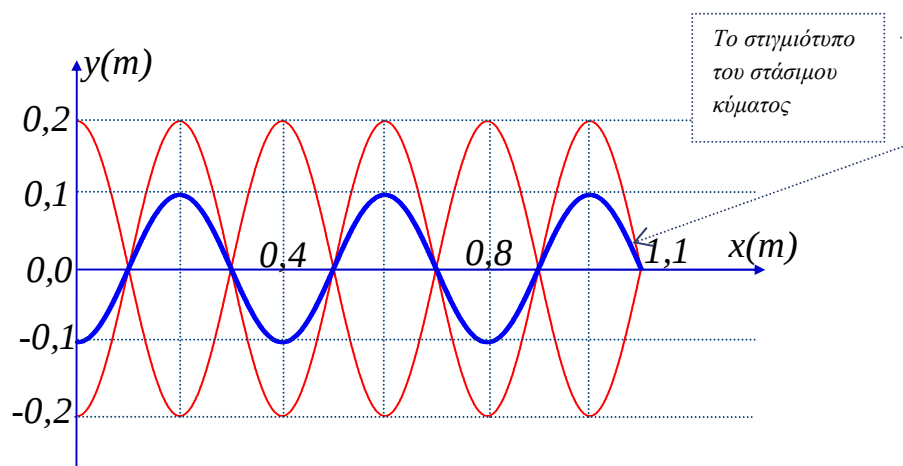
$$\Rightarrow y_{\sigma\tau,\Delta} = -0,1\sqrt{2}\eta\mu\left(10\pi \frac{61}{40}\right) \Rightarrow y_{\sigma\tau,\Delta} = -0,1\sqrt{2}\eta\mu\left(15\pi + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow$$

$$y_{\Delta} = 10cm.$$

Στ) Η εξίσωση του στιγμιότυπου του στάσιμου κύματος τη χρονική στιγμή $t = \frac{119}{60}s$ είναι ...

$$y_{\sigma\tau}(x,t) = 0,2\sigma\upsilon\nu(5\pi x)\eta\mu(10\pi t) \Rightarrow y_{\sigma\tau}(x) = 0,2\sigma\upsilon\nu(5\pi x)\eta\mu\left(10\pi \frac{119}{60}\right) \Rightarrow$$

$y_{\sigma\tau}(x) = -0,1\sigma\upsilon\nu(5\pi x)$... άρα το στιγμιότυπο έχει αντεστραμμένη συνημιτονοειδή μορφή ... με έξι δεσμούς.



$$\text{Ζ)} E_M = \frac{36}{100} E_{\kappa\omicron\iota\lambda} \Rightarrow \frac{1}{2} D A_M^2 = \frac{36}{100} \frac{1}{2} D A_{\kappa\omicron\iota\lambda}^2 \Rightarrow A_M = 0,6 \cdot 2A$$

$$\Rightarrow A_M = 0,12m.$$

Η εξίσωση ταλάντωσης του Μ είναι $y_M(t) = -0,12\eta\mu(10\pi t)$ (γιατί:).

$$y_M(t) = -0,12\eta\mu(10\pi t) \Rightarrow y_M(t) = -0,12\eta\mu\left(10\pi\frac{73}{60}\right) \Rightarrow \dots y_M = -6\text{cm}$$

Η) Και πάλι πρέπει να ισχύει $x_B = \ell = (2k+1)\frac{\lambda'}{4} \Rightarrow \ell = (2k+1)\frac{v}{4f'} \Rightarrow$

$$f' = (2k+1)\frac{v}{4\ell} \Rightarrow 15 = (2k+1)\frac{2}{4 \cdot 1,1} \Rightarrow (2k+1) = 33 \Rightarrow k = 16 \dots$$

άρα 17 δεσμοί...

Θ) Για να έχουμε τώρα στάσιμα κύματα πρέπει... $\ell = N\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \ell = N\frac{v}{2f}$

$$\Rightarrow f = N\frac{v}{2\ell} \Rightarrow f = N\frac{2}{2 \cdot 1,1} \Rightarrow f = N\frac{10}{11}\text{Hz}.$$