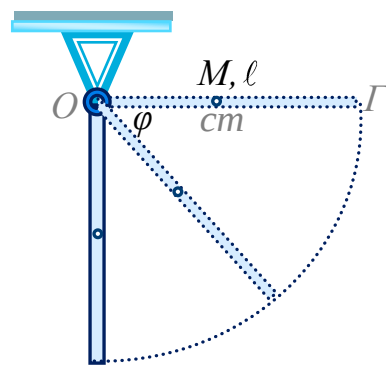


Ράβδος σε κατακόρυφη στροφική κίνηση που "ελευθερώνεται".

Μια ομογενής κυλινδρική ράβδος $ΟΓ$ μάζας $M = 2,5\text{Kg}$ και μήκους $\ell = 1,2\text{m}$ είναι αρθρωμένη στο ένα άκρο της $Ο$ και μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές σε κατακόρυφο επίπεδο περί οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο της $Ο$. Φέρουμε την ράβδο σε οριζόντια θέση και την αφήνουμε ελεύθερη να εκτελέσει στροφική κίνηση.

Όταν η ράβδος έχει στραφεί κατά γωνία φ το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας της ράβδου μεταβάλλεται με ρυθμό $\frac{dv_{cm}}{dt} = 1,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.



α) Στη θέση αυτή να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής.

Όταν η ράβδος γίνεται κατακόρυφη με κάποιο μηχανισμό αφαιρείται ο άξονας περιστροφής της ράβδου από τη άρθρωση και η ράβδος ελευθερώνεται. Η αφαίρεση του άξονα περιστροφής διαρκεί απειροελάχιστο χρόνο χωρίς την δράση εξωτερικών ροπών στη ράβδο και την απώλεια ενέργειας.

β) Να βρείτε τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της ράβδου αμέσως μετά την αφαίρεση του άξονα.

γ) Να υπολογίσετε την δύναμη που ασκεί η άρθρωση στη ράβδο αμέσως πριν την αφαίρεση του άξονα.

Μετά χρόνο $t = 0,4\text{s}$ μετά την αφαίρεση του άξονα και την ελευθέρωση της ράβδου να υπολογίσετε:

δ) την κινητική ενέργεια και την στροφορμή της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της,

ε) το ρυθμούς μεταβολής της κινητικής ενέργειας και της στροφορμής της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της.

Αν η ράβδος κτυπάει στο οριζόντιο δάπεδο αφού διαγράψει δύο στροφές μετά την ελευθέρωσή της να βρείτε:

στ) την απόσταση του κέντρου μάζας της ράβδου από το δάπεδο μόλις αυτή ελευθερώνεται.

Δίνονται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα κάθετο σε αυτή που διέρχεται από το κέντρο μάζας της $I_{cm} = \frac{1}{12}M\ell^2$, $g = 10\text{ms}^{-2}$ και $\pi^2 = 10$.

Οι απαντήσεις

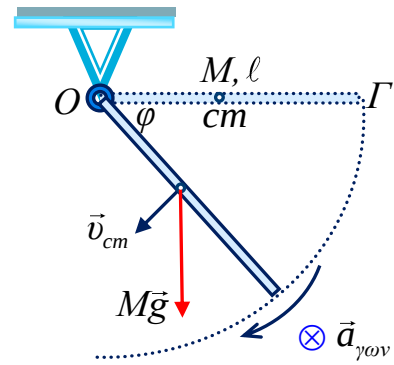
$$\alpha) I_O = I_{cm} + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow I_O = \frac{1}{12}M\ell^2 + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2$$

$$I_O = \frac{1}{3}M\ell^2 \Rightarrow I_O = 1,2\text{Kgm}^2$$

$$\frac{dv_{cm}}{dt} = \frac{d\left(\omega\frac{\ell}{2}\right)}{dt} = \frac{\ell}{2}\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \frac{dv_{cm}}{dt} = \frac{\ell}{2}a_{\gamma\omega\psi}$$

$$\Rightarrow a_{\gamma\omega\psi} = 3\text{rad} / \text{s}^2$$

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau = I_O a_{\gamma\omega\psi} \Rightarrow \frac{dL}{dt} = 3,6 \frac{\text{Kgm}^2}{\text{s}^2}$$



β) Ας βρούμε τη γωνιακή ταχύτητα στροφικής κίνησης της ράβδου και την ταχύτητα του cm μόλις αυτή γίνει κατακόρυφη και *πριν την αφαίρεση* του άξονα περιστροφής.

$$\frac{1}{2}I_O\omega^2 = Mg\frac{\ell}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{1}{3}M\ell^2\omega^2 = Mg\frac{\ell}{2}$$

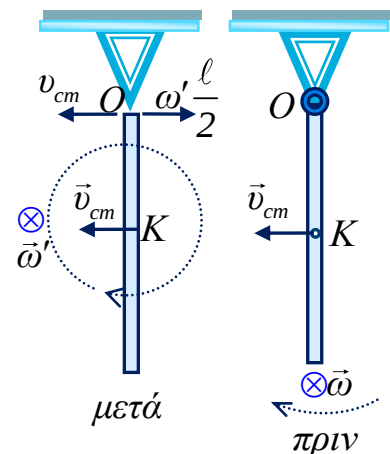
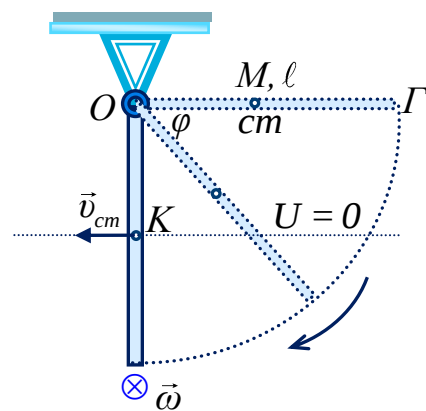
$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{\ell}} \Rightarrow \omega = 5\text{rad} / \text{s}$$

$$v_{cm} = \omega\frac{\ell}{2} \Rightarrow v_{cm} = 3\text{m} / \text{s}$$

Μετά την αφαίρεση του άξονα η ράβδος εκτελεί:

- μία στροφική κίνηση γύρω από ελεύθερο (νοητό) οριζόντιο άξονα κάθετο στη ράβδο που διέρχεται από το κέντρο μάζας αυτής K, και
- μια μεταφορική κίνηση

Υπολογισμός της γωνιακής ταχύτητας ω' αμέσως μετά την αφαίρεση του άξονα περιστροφής.



1η αντιμετώπιση:

Η ταχύτητα του σημείου O αμέσως μετά είναι όσο και πριν (δεν πρόλαβε να αλλάξει ...όπως και η v_{cm}) δηλαδή μηδέν...

$$v_O = 0 \Rightarrow v_{cm} = \omega'\frac{\ell}{2} \Rightarrow \omega\frac{\ell}{2} = \omega'\frac{\ell}{2} \Rightarrow \omega = \omega' \Rightarrow \omega' = 5\text{rad} / \text{s}$$

(...δεν μπορούμε ...χωρίς υπολογισμούς να πούμε ότι δεν πρόλαβε να αλλάξει και η ω γιατί άλλαξε ο άξονας περιστροφής...).

Με δεδομένη την παρατήρηση ότι η v_{cm} δεν πρόλαβε να αλλάξει $v_{cm, αμέσωςμετά} = v_{cm, αμέσωςπριν} = v_{cm} = \omega \frac{\ell}{2}$ μπορούμε να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα ενεργειακά αλλά και με διατήρηση στροφορμής.

2η αντιμετώπιση :

Αφού δεν υπάρχουν απώλειες ενέργειας $K_{πριν} = K_{μετά} \Rightarrow$

$$\frac{1}{2} I_O \omega^2 = \frac{1}{2} I_K \omega'^2 + \frac{1}{2} M v_{cm}^2 \xrightarrow[\text{βλ. υπόθεση}]{v_{cm} = \omega \ell / 2}$$

$$\frac{1}{2} \frac{1}{3} M \ell^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{12} M \ell^2 \omega'^2 + \frac{1}{2} M \left(\omega \frac{\ell}{2} \right)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{6} M \ell^2 \omega^2 = \frac{1}{24} M \ell^2 \omega'^2 + \frac{1}{8} M \ell^2 \omega^2 \Rightarrow \omega = \omega' \Rightarrow \omega' = 5 \text{ rad / s}$$

3η αντιμετώπιση :

Αφού δεν υπάρχουν ροπές εξωτερικών δυνάμεων κατά την διάρκεια αφαίρεσης του άξονα περιστροφής έχουμε διατήρηση στροφορμής ...

$$L_{πριν} = L_{μετά} \Rightarrow I_O \omega = I_{cm} \omega' + M v_{cm} \frac{\ell}{2} \xrightarrow[\text{βλ. υπόθεση}]{v_{cm} = \omega \ell / 2}$$

$$\frac{1}{3} M \ell^2 \omega = \frac{1}{12} M \ell^2 \omega' + M \omega \frac{\ell}{2} \frac{\ell}{2} \Rightarrow \frac{1}{3} M \ell^2 \omega = \frac{1}{12} M \ell^2 \omega' + \frac{1}{4} M \omega \ell^2 \Rightarrow$$

$$\omega = \omega' \Rightarrow \omega' = 5 \text{ rad / s}$$

Υ) Για τον υπολογισμό της δύναμης της άρθρωσης μελετάμε την κίνηση του κέντρου μάζας K ... που είναι κυκλική ... θεωρώντας όλες τις δυνάμεις ως ασκούμενες στο cm και όλη της μάζα της ράβδου στο cm.

Έστω ότι η άρθρωση ασκεί μια δύναμη $\vec{A}$ την οποία αναλύουμε σε δύο συνιστώσες την ακτινική $\vec{A}_\kappa$ και τη εφαπτομενική $\vec{A}_\epsilon$.

Γράφουμε για το cm και τους δύο αυτούς άξονες τον 2ο νόμο Newton...

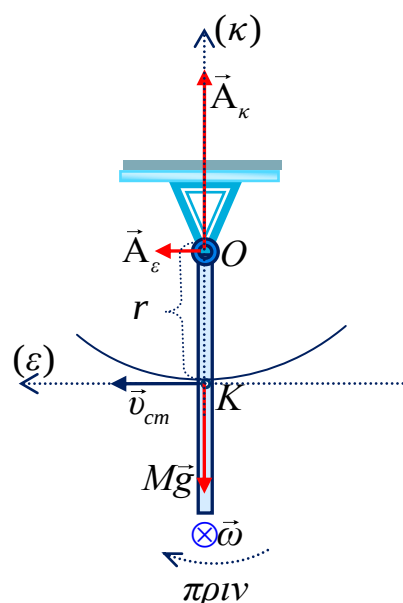
$$\Sigma \vec{F}_\kappa = M \vec{a}_\kappa \Rightarrow A_\kappa - Mg = M \frac{v_{cm}^2}{r} \Rightarrow$$

$$A_\kappa - Mg = M \omega^2 r \Rightarrow A_\kappa = Mg + M \omega^2 \frac{\ell}{2} \Rightarrow$$

$$A_\kappa = 62,5 \text{ N}$$

$$\Sigma \vec{F}_\epsilon = M \vec{a}_\epsilon \Rightarrow \dots A_\epsilon = M \frac{\ell}{2} a_{γων} \dots \text{και επειδή } a_{γων} = 0 \text{ (γιατί;) θα έχουμε}$$

$$A_\epsilon = 0, \text{ άρα } A = A_\kappa = 62,5 \text{ N}$$



δ) Μετά την αφαίρεση του άξονα, στη ράβδο ασκείται μόνο το βάρος της που όμως δεν έχει ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής και έτσι η ράβδος εκτελεί σύνθετη κίνηση η οποία αποτελείται από :

- μια ομαλή στροφική κίνηση - γύρω από ελεύθερο (νοητό) οριζόντιο άξονα κάθετο στη ράβδο που διέρχεται από το κέντρο μάζας της K - με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega' = 5 \text{ rad/s}$, και
- μια μεταφορική κίνηση κατά την οποία το cm της διαγράφει οριζόντια βολή. Την κίνηση αυτή την μελετάμε σε δύο άξονες έναν οριζόντιο $x'x$ και ένα κατακόρυφο $y'y$.

➤ Στο οριζόντιο άξονα η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλή με $v_x = v_{cm} = \text{σταθερή} \Rightarrow v_x = 3 \text{ m/s}$ και $x = v_x t \Rightarrow x = 3t \text{ (S.I.)}$.

➤ Στον κατακόρυφο άξονα - που ασκείται το βάρος - έχουμε ελεύθερη πτώση με σταθερή επιτάχυνση $a_y = g = 10 \text{ m/s}^2$ και με εξισώσεις ταχύτητας και θέσης $v_y = gt \Rightarrow v_y = 10t \text{ (S.I.)}$ και

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow y = 5t^2 \text{ (S.I.)}.$$

Ύστερα από $t = 0,4 \text{ s}$ η ράβδος θα έχει

$$v_x = 3 \text{ m/s}, v_y = 4 \text{ m/s},$$

$$v'_{cm} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \Rightarrow v'_{cm} = 5 \text{ m/s}$$

$$\text{και } \omega' = 5 \text{ rad/s}.$$

Κινητική ενέργεια :

$$K = K_{\text{μετ}} + K_{\text{στροφ}} \Rightarrow$$

$$K = \frac{1}{2}Mv_{cm}'^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega'^2$$

$$I_{cm} = \frac{1}{12}M\ell^2 \Rightarrow I_{cm} = 0,3 \text{ Kg m}^2$$

$$K = \frac{1}{2}2,5 \cdot 5^2 + \frac{1}{2}0,3 \cdot 5^2 \Rightarrow K = 35 \text{ J}$$

Θα μπορούσαμε να βρούμε πόσο κατέβηκε το cm και να πάρουμε Θ.Μ.Κ.Ε ή διατήρηση μηχανικής ενέργειας ...

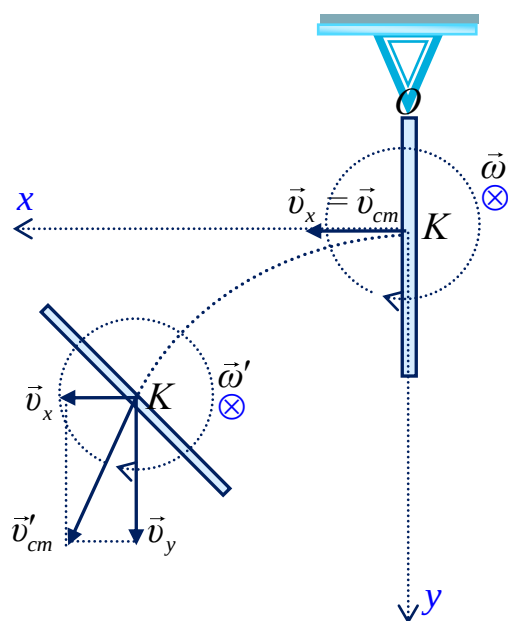
$$y = 5t^2 \Rightarrow y = 0,8 \text{ m}.$$

$$K - K_{\text{αρχ}} = W_B = Mgy \Rightarrow K = K_{\text{αρχ}} + Mgy \Rightarrow$$

$$K = \frac{1}{2}I_{cm}\omega'^2 + \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + Mgy \dots \Rightarrow K = 35 \text{ J}$$

Στροφορμή:

$$L = I_{cm}\omega' \Rightarrow L = 0,3 \text{ Kg m}^2 \cdot 5 \text{ rad/s} \Rightarrow L = 1,5 \text{ Kg m}^2/\text{s}$$



ε) $K = \frac{1}{2} M v_{cm}'^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega'^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2} M v_x'^2 + \frac{1}{2} M v_y'^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega'^2$ και με απλή παραγωγή $v_x = st$ και $\omega' = st$ παίρνουμε

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} M v_x'^2 + \frac{1}{2} M v_y'^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega'^2 \right) \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} M v_y'^2 \right) \Rightarrow$$

$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{2} 2 M v_y' \frac{dv_y'}{dt} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = M v_y' a_y = M g v_y' \Rightarrow \frac{dK}{dt} = 100 \text{ J / s}$$

Ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ... $\frac{dL}{dt} = \Sigma \tau = 0$

στ) Αφού η ράβδος διαγράφει δύο πλήρεις στροφές κτυπάει στο έδαφος με το κάτω άκρο της και την ίδια κατεύθυνση που είχε μόλις αφέθηκε "ελευθερώθηκε".

$$\text{Χρόνος καθόδου: } t_k = 2T = \frac{2 \cdot 2\pi}{\omega'} = \frac{4\pi}{5} \text{ s}$$

$$\text{Μετατόπιση κέντρου μάζας κατά την κάθοδο } \Delta y = \frac{1}{2} g t_k^2 \dots \Delta y = 32 \text{ m}$$

$$\text{Απόσταση cm από το δάπεδο } H = 32 \text{ m} + 0,6 \text{ m} \Rightarrow H = 32,6 \text{ m}$$

