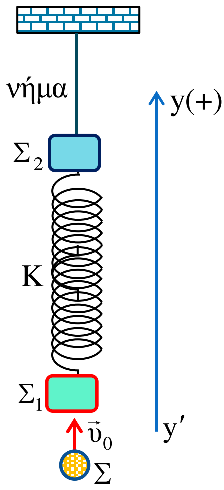
Κρούση -ταλάντωση -χαλάρωση ή κόψιμο νήματος.

Στα άκρα ενός κατακορύφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς Κ είναι δεμένα δύο σώματα Σ_1 και Σ_2 και η όλη διάταξη είναι κρεμασμένη από αβαρές μη εκτατό νήμα, με όριο θραύσης $T_{\theta\rho}=30N$, όπως φαίνεται στο σχήμα .



Ένα άλλο σώμα Σ μάζας m=0,2Kg κινείται κατακόρυφα και συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με το σώμα Σ_1. Μετά την κρούση,

- το σώμα Σ ανακλάται έχοντας αμέσως μετά το 25% της κινητικής ενέργειας που είχε αμέσως πριν την κρούσης, και
- το σώμα Σ_1 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση σταθεράς Κ με περίοδο $T=0,2\pi\,s$ και σε κάποια απομάκρυνση, που η κινητική του ενέργεια έχει μειωθεί κατά 25% αυτής που είχε αμέσως μετά την κρούση, έχει δυναμική ενέργεια ταλάντωσης $U=0,3J$.

α. Να υπολογισθεί η μάζα M_1 του σώματος Σ_1,

β. Να βρεθεί το πλάτος της ταλάντωσης του Σ_1 και η ταχύτητα του σώματος Σ αμέσως πριν την κρούση.

γ. Να εξαχθεί η χρονική εξίσωση της αλγεβρικής τιμής της δύναμης του ελατηρίου που ασκείται στο σώμα Σ_2 και να προσδιορισθεί το χρονικό διάστημα που το ελατήριο είναι συσπειρωμένο.

δ. Να βρεθεί για ποιες τιμές της μάζας M_2 του σώματος Σ_2 το νήμα δεν χαλαρώνει αλλά ούτε κόβεται.

Δίνεται ότι $g=10m/s^2$ και θεωρούμε θετική φορά προς τα πάνω και ως $t_0=0$ τη στιγμή έναρξης της ταλάντωσης του Σ_1.

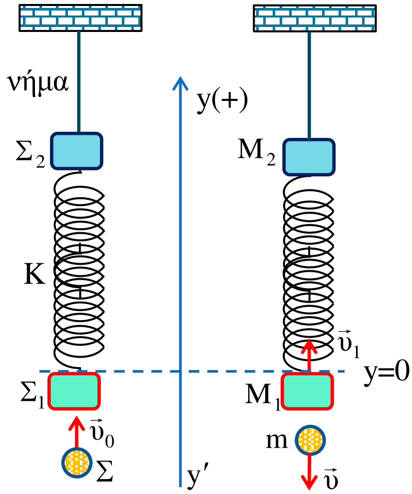
Στόχοι μελέτης -λύσης του προβλήματος.

Γενικός Στόχος: Επανάληψη κρούσης και απλής αρμονικής ταλάντωσης που επηρεάζει την χαλάρωση ή κόψιμο ενός νήματος.

Ειδικοί στόχοι:

- Σωστή εφαρμογή,
  - των εξισώσεων στην μετωπική ελαστική κρούση σώματος με άλλο ακίνητο,
  - των εξισώσεων κινηματικής, δυναμικής και ενεργειών στην α.α.τ,
  - της σχέσης $\Sigma F = -Dy$ στην α.α.τ με αλγεβρικές τιμές για τις επιμέρους δυνάμεις.
- Κατεύθυνση των δυνάμεων που ασκεί ένα παραμορφωμένο ελατήριο και απόδοση αυτών με αλγεβρικές τιμές.
- Δυνάμεις που ασκεί ένα νήμα και μελέτης για το πότε αυτό δε χαλαρώνει ή δεν κόβεται.

Απάντηση -Λύση.



α. Αν $\vec{\upsilon}_0$ και $\vec{\upsilon}$ οι ταχύτητες του σώματος Σ πριν και μετά την κρούση και $\vec{\upsilon}_1$ η ταχύτητα του Σ_1 μετά την κρούση έχουμε,

$$K_{\Sigma,\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} = \frac{25}{100}K_{\Sigma,\pi\rho\iota\nu} \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{4}\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 \quad (1)$$

με $\upsilon = \dfrac{m-M_1}{m+M_1}\upsilon_0$ (2) …και επειδή το Σ ανακλάται $\upsilon<0 \xrightarrow{(2)} m-M_1<0 \Rightarrow m<M_1$.

Από (1) και (2) έχουμε

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{m-M_1}{m+M_1}\upsilon_0\right)^2 = \frac{1}{4}\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{m-M_1}{m+M_1}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{m-M_1}{m+M_1} = \pm\frac{1}{2} \xrightarrow{m<M_1}$$

$$\frac{m-M_1}{m+M_1} = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2m-2M_1 = -m-M_1 \Rightarrow M_1 = 3m \Rightarrow M_1 = 3\cdot 0{,}2Kg \Rightarrow \mathbf{M_1 = 0{,}6Kg}$$

β. Σε κάποια απομάκρυνση y για το Σ_1 έχουμε , $K = \dfrac{75}{100}K_{\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{\eta}\varsigma} = \dfrac{3}{4}K_{\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{\eta}\varsigma}$.

Μόλις άρχισε η ταλάντωση του Σ_1 αυτό ήταν στην θέση ισορροπίας του, οπότε

$$K_{\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{\eta}} = K_{max} = E_{\tau\alpha\lambda\acute{\alpha}\nu\tau\omega\sigma\eta\varsigma} = \frac{1}{2}DA^2 .$$

Άρα $K = \dfrac{3}{4}E_{\tau\alpha\lambda}$ και η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης του Σ_1 στην θέση εκείνη είναι

$$K + U = E_{\tau\alpha\lambda} \Rightarrow \frac{3}{4}E_{\tau\alpha\lambda} + U = E_{\tau\alpha\lambda} \Rightarrow U = \frac{1}{4}E_{\tau\alpha\lambda} \Rightarrow U = \frac{1}{4}\frac{1}{2}DA^2 \xrightarrow{D=K}$$

$$U = \frac{1}{8}KA^2 \quad (3)$$

Κυκλική συχνότητα ταλάντωσης $\omega = \dfrac{2\pi}{T} \xrightarrow{(S.I)} \omega = \dfrac{2\pi}{0{,}2\pi} \Rightarrow \omega = 10\ rad/s$.

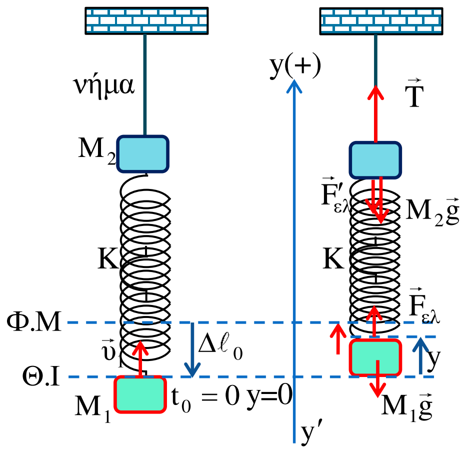
Σταθερά επαναφοράς $D = M_1\omega^2 \xrightarrow{D=K} K = M_1\omega^2 \xrightarrow{(S.I)} K = 60N/m$

$$(3) \Rightarrow A = \sqrt{\frac{8U}{K}} \xrightarrow{(S.I)} A = \sqrt{\frac{8\cdot 0{,}3J}{60N/m}} \Rightarrow \mathbf{A = 0{,}2m}$$

Η ταχύτητα του Σ_1 αμέσως μετά την κρούση είναι η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης, οπότε $\upsilon_1=\omega A \xrightarrow{(S.I)} \upsilon_1=2m/s$

Ναι αλλά $\upsilon_1=\dfrac{2m}{m+M_1}\upsilon_0 \Rightarrow \quad \upsilon_0=\dfrac{m+M_1}{2m}\upsilon_1 \xrightarrow{(S.I)} \upsilon_0=\dfrac{0,2Kg+0,6Kg}{2\cdot 0,2Kg}2\dfrac{m}{s} \Rightarrow$

$\boldsymbol{\upsilon_0=4\dfrac{m}{s}}$.



γ. $y(t)=A\eta\mu(\omega t+\varphi_0)$ … επειδή την $t_0=0$, $y=0$ και $\upsilon_1>0$ θα είναι $\varphi_0=0$, οπότε $y(t)=0,2\eta\mu(10t)$ (S.I) (4)

Για τον ταλαντωτή Σ_1 ισχύει,

$\Sigma F=-Dy \Rightarrow \underbrace{F_{\varepsilon\lambda}+M_1 g}_{\text{αλγεβρικές τιμές}}=-Dy \xrightarrow{(S.I)}$

$\underset{\text{αλγεβρική τιμή}}{F_{\varepsilon\lambda}}\ -0,6\cdot 10=-60y \Rightarrow$

$\underset{\text{αλγεβρική τιμή}}{F_{\varepsilon\lambda}}=6-60y$ (S.I) με $-0,2\le y\le 0,2m$

Επειδή η $\vec{F}_{\varepsilon\lambda}$ που ασκείται στο Σ_1 και $\vec{F}'_{\varepsilon\lambda}$ που ασκείται στο Σ_2 είναι αντίθετες

$\vec{F}'_{\varepsilon\lambda}=-\vec{F}_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow \underbrace{F'_{\varepsilon\lambda}=-F_{\varepsilon\lambda}}_{\text{αλγεβρικές τιμές}} \Rightarrow \underset{\text{αλγεβρική τιμή}}{F'_{\varepsilon\lambda}}=-6+60y$ (S.I) (5) με $-0,2\le y\le 0,2m$

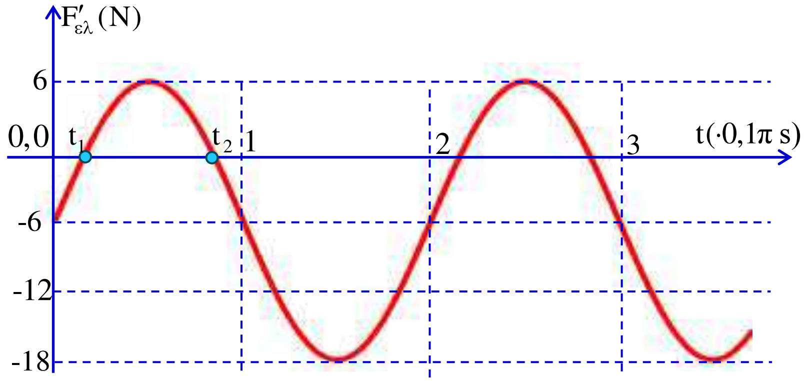
Από (4) και (5) έχουμε, $\underset{\text{αλγεβρική τιμή}}{F'_{\varepsilon\lambda}}=-6+60\cdot 0,2\eta\mu(10t) \Rightarrow$

$F'_{\varepsilon\lambda}=-6+12\eta\mu(10t)$ (S.I) (6)

… και η γραφική παράσταση της ανωτέρω χρονικής εξίσωσης της αλγεβρικής τιμής $F'_{\varepsilon\lambda}(t)$ αποδίδεται με το παρακάτω διάγραμμα

Να σημειώσουμε ότι,

- Ελατήριο συσπειρωμένο «απωθεί» οπότε $F'_{\varepsilon\lambda}>0$ και $F_{\varepsilon\lambda}<0$
- Ελατήριο σε επιμήκυνση «έλκει» οπότε $F'_{\varepsilon\lambda}<0$ και $F_{\varepsilon\lambda}>0$



Στην ερώτηση θέλει το ελατήριο συσπειρωμένο, άρα $F'_{ελ} > 0$ και αυτό στην πρώτη περίοδο της ταλάντωσης είναι στο χρονικό διάστημα $t_1 < t < t_2$

$F'_{ελ} > 0 \Rightarrow -6 + 12ημ(10t) > 0 \Rightarrow ημ(10t) > \frac{1}{2}$, $ημ(10t) = \frac{1}{2}$ όταν:

- $10t_1 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{60}s$
- $10t_2 = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow t_2 = \frac{5\pi}{60}s$

Άρα $F'_{ελ} > 0$ δηλαδή το ελατήριο θα είναι συσπειρωμένο στην πρώτη περίοδο της ταλάντωσης στο χρονικό διάστημα $\frac{\pi}{60}s < t < \frac{5\pi}{60}s$ και γενικότερα σε κάθε περίοδο στο χρονικό διάστημα,

$$NT + \frac{\pi}{60}s < t < NT + \frac{5\pi}{60}s \Rightarrow N \cdot 0,2\pi + \frac{\pi}{60} < t < N \cdot 0,2\pi + \frac{5\pi}{60} \quad (S.I) \text{ με } N \in \mathbb{Z}^+$$

…και λίγο διαφορετικά … με απομακρύνσεις

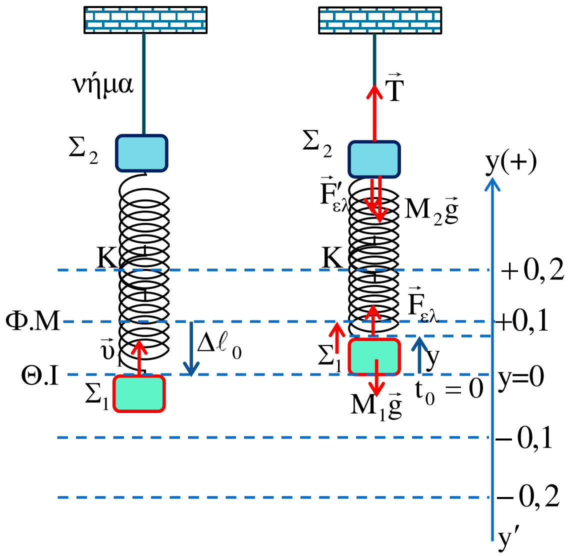
Το ελατήριο στη θέση ισορροπίας του ταλαντωτή $Σ_1$ έχει στατική επιμήκυνση κατά $\Delta\ell_0 = \frac{M_1 g}{K} \xrightarrow{(S.I)} \Delta\ell_0 = 0,10m$ και το ελατήριο θα είναι συσπειρωμένο για απομάκρυνση y>0,1m

$y = 0,1ημ(10t) > 0 \Rightarrow ημ(10t) > \frac{1}{2}$, $ημ(10t) = \frac{1}{2}$ … με την ίδια συνέχεια όπως παραπάνω ή με μελέτη μέσω στρεφομένου διανύσματος….

δ. Το σώμα Σ2 ισορροπεί οπότε, $\Sigma\vec{F}_y = 0 \Rightarrow \vec{T} + \vec{F}'_{\varepsilon\lambda} + M_2\vec{g} = 0 \Rightarrow$

$$\underset{\text{αλγεβρικές τιμές}}{T + F'_{\varepsilon\lambda}} - M_2 \cdot 10 = 0 \xrightarrow{(5)} \underset{\text{αλγεβρική τιμή}}{T} + (-6 + 60y) - 10M_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\underset{\text{αλγεβρική τιμή}}{T} = 6 + 10M_2 - 60y \quad (6)$$



Για να μην χαλαρώσει το νήμα πρέπει να ασκεί ελκτική δύναμη $\vec{T}$ στο Σ2, δηλαδή δύναμη με φορά προς τα πάνω – θετική και να έχει θετική αλγεβρική τιμή $T \geq 0$ σε οποιαδήποτε απομάκρυνση y του ταλαντωτή, άρα και η ελάχιστη τιμή $T_{min} \geq 0$.

$(6) \Rightarrow T = 6 + 10M_2 - 60y \Rightarrow T_{min} = 6 + 10M_2 - 60y_{max} \geq 0 \xrightarrow{S.I}$

$6 + 10M_2 - 60(+0,2) \geq 0 \Rightarrow -6 + 10M_2 \geq 0 \Rightarrow \mathbf{M_2 \geq 0,6Kg} \quad (7)$

Για να μην κοπεί το νήμα πρέπει αφενός να ασκεί ελκτική δύναμη στο Σ2, δηλαδή δύναμη με φορά προς τα πάνω – θετική και να έχει θετική αλγεβρική τιμή αλλά μικρότερη από το όριο θραύσης $T \leq T_{\theta\rho}$ σε οποιαδήποτε απομάκρυνση y του ταλαντωτή, άρα και η μέγιστη τιμή T_{max} να πληροί τη σχέση $T_{max} \leq T_{\theta\rho} = 30N$

$(6) \Rightarrow T = 6 + 10M_2 - 60y \Rightarrow T_{max} = 6 + 10M_2 - 60y_{min} \leq 30 \xrightarrow{S.I}$

$6 + 10M_2 - 60(-0,2) \leq 30 \Rightarrow 18 + 10M_2 \leq 30 \Rightarrow \mathbf{M_2 \leq 1,2Kg} \quad (8)$

Από (7,8) φαίνεται ότι για να μην κοπεί το νήμα, αλλά ούτε να χαλαρώσει πρέπει η μάζα M_2 του Σ_2 να έχει τιμές στην περιοχή $\mathbf{0,6Kg \le M_2 \le 1,2Kg}$

Σχόλιο: Στην εκφώνηση ζητείται « η χρονική εξίσωση της **αλγεβρικής** τιμής της δύναμης του ελατηρίου που ασκείται στο σώμα Σ_2» .
Η έκφραση «αλγεβρική» τιμή της $F'_{\varepsilon\lambda}$ είναι πλεονασμός …γιατί στην εξίσωση $\Sigma F = -Dy \Rightarrow \underbrace{F_{\varepsilon\lambda} + M_1 g}_{\text{αλγεβρικές τιμές}} = -Dy$ αφού το y έχει αλγεβρικές τιμές $-0,2 \le y \le +0,2m$ και η $F'_{\varepsilon\lambda}$ αλλάζει φορά ανάλογα με την συσπείρωση ή επιμήκυνση του ελατηρίου (..και παίρνει θετικές ή αρνητικές τιμές) πρέπει και αυτή στην ανωτέρω εξίσωση να «δηλώνει και αποδίδει» **αλγεβρικές** τιμές.