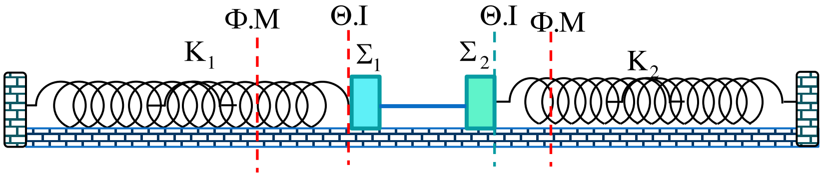
# Μέγιστο πλάτος ταλάντωσης για να μη χαλαρώσει το νήμα

Το σύστημα του σχήματος είναι πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο με τα ελατήρια να έχουν σταθερές $K_1=40\ N/m$ και $K_2=120\ N/m$, τα δε σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$ που συνδέονται με αβαρές μη εκτατό νήμα να έχουν μάζες $m_1=1Kg$ και $m_2=0,6Kg$ αντίστοιχα. Στην ανωτέρω κατάσταση όλο το σύστημα ισορροπεί με το νήμα πλήρως τεντωμένο, τα ελατήρια σε επιμήκυνση και το ελατήριο σταθεράς $K_2$ να έχει δυναμική ενέργεια ελαστικότητας $U_{ελ,2}=0,6J$.




Απομακρύνουμε το σώμα $Σ_2$ από την θέση ισορροπίας του, τόσο ώστε το ελατήριο να συσπειρωθεί κατά $\Delta\ell_2=5\ cm$ ( και προφανώς μαζί με το σώμα $Σ_2$ έλκεται και το $Σ_1$ με το νήμα πάντοτε τεντωμένο).

Από την θέση αυτή την $t_0=0$ αφήνουμε ελεύθερο το σώμα $Σ_2$ και το σύστημα αρχίζει απλή αρμονική ταλάντωση χωρίς αρχική ταχύτητα, με το νήμα να παραμένει συνεχώς τεντωμένο.

**α.** Εξηγείστε ότι η σταθερά επαναφοράς του συστήματος είναι $D=K_1+K_2$.

**β.** Να γραφούν οι χρονικές εξισώσεις της δυναμικής $U(t)$ και κινητικής $K(t)$ ενέργειας ταλάντωσης και να γίνουν οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις.

Όταν το ελατήριο σταθεράς $K_2$ είναι συσπειρωμένο κατά $\Delta\ell'_2=2\ cm$, να υπολογισθεί,

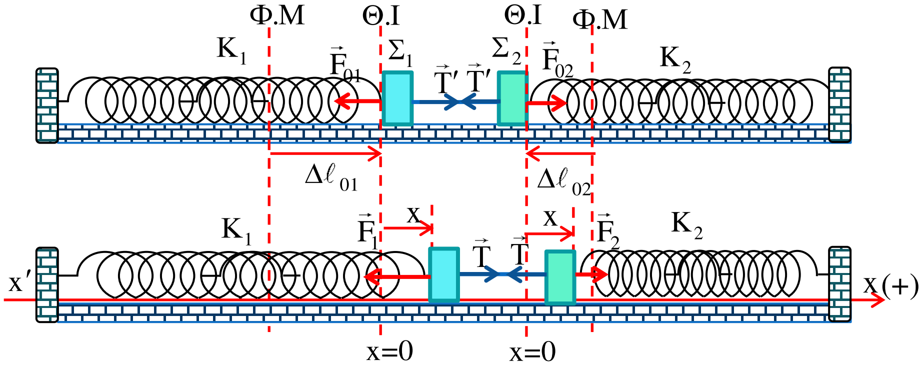
**γ.** η κινητική ενέργεια κάθε σώματος $Σ_1$ και $Σ_2$,

**δ.** η δύναμη που ασκεί το νήμα σε κάθε σώμα.

Για την ταλάντωση του συστήματος της ανωτέρω διάταξης,

**ε.** να βρείτε ποιο μπορεί να είναι το μέγιστο πλάτος της ταλάντωσης, ώστε να μην χαλαρώσει το νήμα.

## Απάντηση -λύση




**(*) Βασική πρόταση:** Ένα αβαρές νήμα δεμένο σε δύο σώματα, ασκεί σε αυτά ελκτικές δυνάμεις που έχουν ίσα μέτρα…( δείτε μια απόδειξη στο τέλος επεξεργασίας της άσκησης ).

**α.** Αρχική κατάσταση ισορροπίας ($1^{o}$ σχήμα):

$\Sigma_1$: $\Sigma\vec{F}_x = 0 \Rightarrow T'\text{-}F_{01}=0 \Rightarrow T'=K_1\Delta\ell_{01}$ (1)

$\Sigma_2$: $\Sigma\vec{F}_x = 0 \Rightarrow -T'+F_{02}=0 \Rightarrow T'=K_2\Delta\ell_{02}$ (2)

Από (1) και (2) έχουμε $K_1\Delta\ell_{01}=K_2\Delta\ell_{02} \xrightarrow{S.I} 40\cdot\Delta\ell_{01}=120\cdot\Delta\ell_{02} \Rightarrow$

$\Delta\ell_{01}=3\Delta\ell_{02}$ (3).

Για μια τυχαία απομάκρυνση x των ταλαντωτών από την θέση ισορροπίας των ($2^{o}$ σχήμα) έχουμε για το όλο σύστημα :

$$\Sigma\vec{F}_x = \vec{F}_1+\vec{T}+\vec{T}+\vec{F}_2 \Rightarrow \Sigma\vec{F}_x = -K_1\left(\Delta\ell_{01}+x\right)+T-T+K_2\left(\Delta\ell_{02}-x\right) \Rightarrow$$

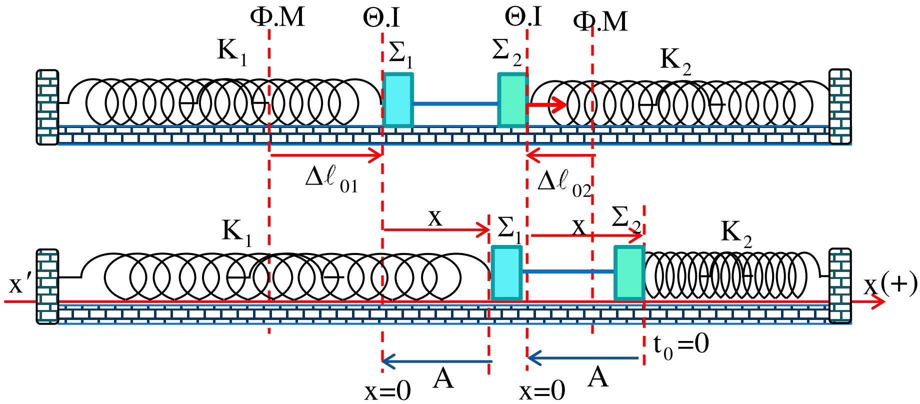
$$\Sigma\vec{F}_x = -\left(K_1+K_2\right)x - K_1\Delta\ell_{01}+K_2\Delta\ell_{02} \xrightarrow{(3)S.I} \Sigma\vec{F}_x = -\left(K_1+K_2\right)x$$

Άρα έχουμε α.α.τ με σταθερά επαναφοράς $\mathbf{D = K_1 + K_2} \xrightarrow{S.I} \mathbf{D = 160N/m}$

**β.** Στη θέση ισορροπίας η δυναμική ενέργεια ελαστικότητας του ελατηρίου σταθεράς $K_2$ είναι,

$$U_{\varepsilon\lambda,2}=\frac{1}{2}K_2\Delta\ell_{02}^2 \Rightarrow \Delta\ell_{02} = \sqrt{\frac{2U_{\varepsilon\lambda,2}}{K_2}} \xrightarrow{S.I} \Delta\ell_{02} = 0{,}10m \xrightarrow{(3)} \Delta\ell_{01}=0{,}30m$$

Τη χρονική στιγμή που αρχίζει η ταλάντωση το ελατήριο σταθεράς $K_2$ είναι συσπειρωμένο κατά $\Delta\ell_2 = 5cm = 0{,}05m$ και άρα το σώμα $\Sigma_2$ έχει απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας του κατά $x=\Delta\ell_{02}+\Delta\ell_2=0{,}15\text{m}$ …προφανώς τόση είναι και απομάκρυνση του σώματος $\Sigma_1$.




Μόλις το σύστημα αφήνεται ελεύθερο επειδή έχει ταχύτητα μηδέν η θέση $x=+0{,}15\text{m}$ είναι η ακραία θετική θέση , άρα το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι $\mathbf{A=0{,}15m}$

Επίσης $D=(m_1+m_2)\omega^2 \Rightarrow \omega=\sqrt{\dfrac{D}{m_1+m_2}} \xrightarrow{S.I} \boldsymbol{\omega=10rad/s}$

Επειδή την $t_0=0$ $x=+A$ οι χρονικές εξισώσεις απομάκρυνσης και ταχύτητας είναι,

$$x(t)=A\eta\mu(\omega t+\varphi_0)\ \ldots\Rightarrow x(t)=0{,}15\eta\mu\left(10t+\frac{\pi}{2}\right)\ (S.I)\ \text{ή}$$

$$x(t)=0{,}15\sigma\upsilon\nu(10t)\ (S.I)\ \ (4)$$

$$\upsilon(t)=\omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t+\varphi_0)\ \ldots\Rightarrow \upsilon(t)=1{,}5\sigma\upsilon\nu\left(10t+\frac{\pi}{2}\right)(S.I)\ \text{ή}\ \upsilon(t)=1{,}5\eta\mu(10t+\pi)\ \text{ή}$$

$$\upsilon(t)=-1{,}5\eta\mu(10t)\ (S.I)\ \ (5)$$

**Χρονική εξίσωση της δυναμικής ενέργεια ταλάντωσης** :

$$U=\frac{1}{2}Dx^2 \xrightarrow{4} U(t)=\frac{1}{2}160.0{,}15^2\eta\mu^2\left(10t+\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow U(t)=1{,}8\eta\mu^2\left(10t+\frac{\pi}{2}\right)\ \text{ή}$$

$$U(t)=1{,}8\sigma\upsilon\nu^2(10t)\ \ (S.I)$$

**Χρονική εξίσωση της κινητικής ενέργεια ταλάντωσης** :

$$K=\frac{1}{2}(m_1+m_2)x^2 \xrightarrow{(5)} K(t)=\frac{1}{2}1{,}60.1{,}5^2\sigma\upsilon\nu^2\left(10t+\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow$$

$$K(t)=1{,}8\sigma\upsilon\nu^2\left(10t+\frac{\pi}{2}\right) \text{ ή } K(t)=1{,}8\eta\mu^2(10t) \text{ (S.I)}$$

(*) Αν χρησιμοποιήσουμε την σχέσεις :

$$\sigma\upsilon\nu(2\theta)=\sigma\upsilon\nu^2\theta-\eta\mu^2\theta \Rightarrow \sigma\upsilon\nu(2\theta)=2\sigma\upsilon\nu^2\theta-1 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2\theta=\frac{1+\sigma\upsilon\nu(2\theta)}{2} \quad \text{και}$$

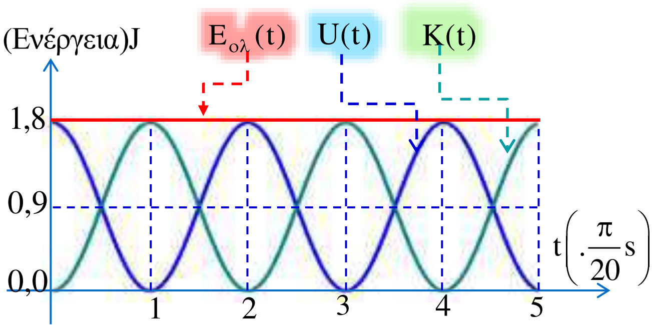
$$\sigma\upsilon\nu(2\theta)=\sigma\upsilon\nu^2\theta-\eta\mu^2\theta \Rightarrow \sigma\upsilon\nu(2\theta)=1-2\eta\mu^2\theta \Rightarrow \eta\mu^2\theta=\frac{1-\sigma\upsilon\nu(2\theta)}{2}$$

Οι προηγούμενες σχέσεις για την δυναμική και κινητική ενέργεια γράφονται,

$$U(t)=1{,}8\sigma\upsilon\nu^2(10t) \Rightarrow U(t)=1{,}8\frac{1+\sigma\upsilon\nu(20t)}{2} \Rightarrow U(t)=0{,}9+0{,}9\sigma\upsilon\nu(20t) \text{ (S.I)}$$

$$K(t)=1{,}8\eta\mu^2(10t) \Rightarrow K(t)=1{,}8\frac{1-\sigma\upsilon\nu(20t)}{2} \Rightarrow K(t)=0{,}9-0{,}9\sigma\upsilon\nu(20t) \text{ (S.I)}$$

**Σχόλιο:** Οι εξισώσεις αυτές διευκολύνουν για την γραφική παράσταση των U(t) και K(t) αλλά και εύρεσης της περιόδου αυτών.




**γ.** Όταν το ελατήριο σταθεράς $K_2$ είναι συσπειρωμένο κατά $\Delta\ell_2=2cm$ η απομάκρυνση του ταλαντωτή $\Sigma_2$ από τη θέση ισορροπίας του είναι ( βλέπε επόμενο σχήμα )

$$x=\Delta\ell_{02}+\Delta\ell_2 \Rightarrow x=12cm \Rightarrow x=0{,}12m$$

( αφού το νήμα είναι τεντωμένο τόση είναι και η απομάκρυνση του ταλαντωτή $\Sigma_1$ από **τη δική του θέση ισορροπίας** ).

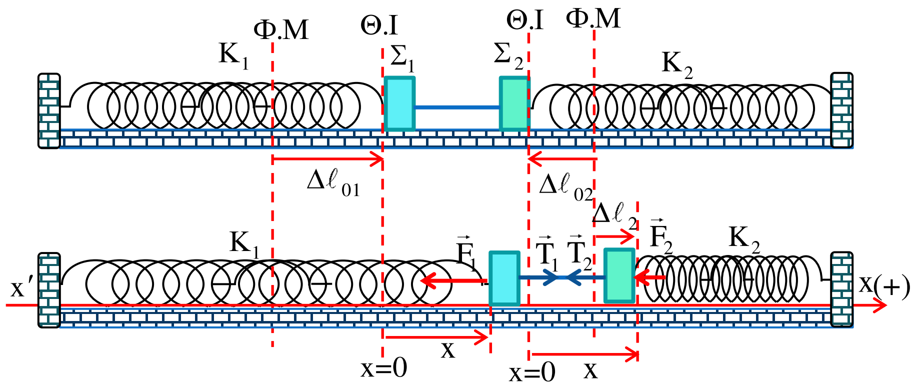
Η ταχύτητα της ταλάντωσης στην ανωτέρω απομάκρυνση βρίσκεται από την διατήρηση της ενέργειας ταλάντωσης,

$$K+U=E \Rightarrow \frac{1}{2}(m_1+m_2)\upsilon^2+\frac{1}{2}Dx^2=\frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow \upsilon=+\sqrt{\frac{D(A^2-x^2)}{m_1+m_2}} \Rightarrow$$

$$\upsilon=+\omega\sqrt{A^2-x^2} \xrightarrow{S.I} \mathbf{\upsilon=+0{,}9m/s}$$

Κινητική ενέργεια $\Sigma_1$: $K_1=\frac{1}{2}m_1\upsilon^2 \xrightarrow{S.I} \mathbf{K_1=0{,}405J}$

Κινητική ενέργεια $\Sigma_2$: $K_2=\frac{1}{2}m_2\upsilon^2 \xrightarrow{S.I} \mathbf{K_2=0{,}243J}$




**δ.** Κάθε σώμα $\Sigma_1$ ή $\Sigma_2$ είναι επιμέρους ταλαντωτής - ως μέρος του ενιαίου ταλαντωτή – και έχει κυκλική συχνότητα ταλάντωσης ω=10rad/s και (προσοχή!!!) διαφορετική σταθερά επαναφοράς από τον ενιαίο ταλαντωτή.

**Σώμα -ταλαντωτής $\Sigma_1$:**

Έχει σταθερά επαναφοράς, $D_1=m_1\omega^2 \xrightarrow{S.I} D_1=100N/m$ και για τις δυνάμεις που ασκούνται στο $\Sigma_1$ στον άξονα ταλάντωσης και συνιστούν την δύναμη επαναφοράς ισχύει, $\Sigma F_x=-D_1x \Rightarrow \underbrace{T_1+F_1}_{\text{αλγεβρικές τιμές}}=-D_1x \Rightarrow T_1-K_1(\Delta\ell_{01}+x)=-D_1x \Rightarrow$

$$T_1=K_1(\Delta\ell_{01}+x)-D_1x \ (6) \xrightarrow{S.I} T_1=40(0{,}30+0{,}12)-100\cdot 0{,}12 \Rightarrow T_1=4{,}8N \ .$$

**Σώμα -ταλαντωτής $\Sigma_2$:**

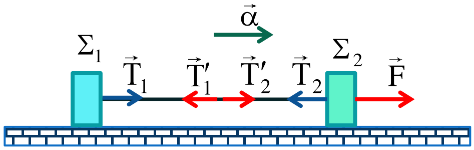
Έχει σταθερά επαναφοράς, $D_2=m_2\omega^2 \xrightarrow{S.I} D_2=60N/m$ και για τις δυνάμεις που ασκούνται στο $\Sigma_2$ στον άξονα ταλάντωσης και συνιστούν την δύναμη επαναφοράς ισχύει, $\Sigma F_x=-D_2x \Rightarrow \underbrace{T_2+F_2}_{\text{αλγεβρικές τιμές}}=-D_2x \Rightarrow T_2-K_2(x-\Delta\ell_{02})=-D_2x \ (7) \Rightarrow$

$T_2=K_2\Delta\ell_2-D_2x\ (7)\xrightarrow{S.I}T_2=120\cdot 0{,}02-60\cdot 0{,}12\Rightarrow T_2=-4{,}8N$ (αλγεβρική τιμή ).
(*) Αναμενόμενο οι αντίθετες αλγεβρικές τιμής και τα ίδια μέτρα τιμών με βάση την παραπάνω βασική πρόταση.

**ε.** Από το προηγούμενο ερώτημα η αλγεβρική τιμή της δύναμης που ασκεί το νήμα στο σώμα $\Sigma_1$ σε συνάρτηση με την απομάκρυνση x, δίνεται από τη σχέση (6),
$T_1=K_1\left(\Delta\ell_{01}+x\right)-D_1x\xrightarrow{S.I}T_1=40\left(0{,}30+x\right)-100x\Rightarrow T_1=12-60x$ (S.I) (8).
Το νήμα εφόσον είναι τεντωμένο ασκεί στο $\Sigma_1$ πάντα ελκτική δύναμη, που για το δεδομένο σύστημα αναφοράς έχει **θετική αλγεβρική τιμή** οπότε από την (8) έχουμε
$T_1=12-60x\geq 0\xrightarrow{S.I}x\leq 0{,}2m\ldots$άρα $A_{max}=0{,}2m$.
Ανάλογη επεξεργασία και μελέτη μπορεί να γίνει και με το σώμα $\Sigma_2$. Εδώ η αλγεβρική τιμή της δύναμης που ασκεί το νήμα στο σώμα $\Sigma_2$ σε συνάρτηση με την απομάκρυνση x, δίνεται από τη σχέση (7),
$T_2-K_2(x-\Delta\ell_{02})=-D_2x\xrightarrow{S.I}T_2-120(x-0{,}1)=-60x\Rightarrow T_2=60x-12$ (S.I) (9)
Το νήμα εφόσον είναι τεντωμένο ασκεί στο $\Sigma_2$ πάντα ελκτική δύναμη, που για το δεδομένο σύστημα αναφοράς έχει **αρνητική αλγεβρική τιμή** οπότε από την (9) έχουμε,
$T_2=60x-12\leq 0\xrightarrow{S.I}x\leq 0{,}2m\ldots$άρα $A_{max}=0{,}2m$.
(*) Η αλγεβρική τιμή της $T_2$ είναι αναμενόμενη αφού $\vec{T}_2=-\vec{T}_1$
**Προσοχή!** Οι $T_1$ και $T_2$ στις σχέσεις (6) και (7) αποδίδονται με τις αλγεβρικές τιμές τους

**Σχόλιο:** Εδώ η εξίσωση απομάκρυνσης $x(t)=0{,}15\eta\mu\left(10t+\frac{\pi}{2}\right)$ (S.I) ισχύει για κάθε για κάθε σώμα - ταλαντωτή $\Sigma_1$ και $\Sigma_2$ , αλλά με x=0 στη θέση ισορροπίας του κάθε ταλαντωτή -που είναι και το κέντρο της ταλάντωσής του και είναι σε διαφορετική θέση για κάθε ταλαντωτή.
Αν είχαμε ενιαία αρχή x=0 για την θέση ισορροπίας του $\Sigma_1$ τότε η εξίσωση $x(t)=0{,}15\eta\mu\left(10t+\frac{\pi}{2}\right)$ είναι η απομάκρυνση του $\Sigma_1$, ενώ η **θέση-συντεταγμένη** του $\Sigma_2$ για το σύστημα αυτό είναι $x(t)=L+0{,}15\eta\mu\left(10t+\frac{\pi}{2}\right)$, όπου L το μήκος του νήματος.

**Βασική πρόταση** : Ένα αβαρές νήμα δεμένο σε δύο σώματα, ασκεί σε αυτά ελκτικές δυνάμεις που έχουν ίσα μέτρα…




Έστω δύο σώματα $\Sigma_1$ και $\Sigma_2$ όπως στο σχήμα, που είναι δεμένα με ένα νήμα **αβαρές** (με αμελητέα μάζα) και μη εκτατό, με την όλη διάταξη να έλκεται μέσω μιας δύναμης και επιταχύνεται. Το νήμα για να ασκεί δυνάμεις πρέπει να είναι **τεντωμένο** και οι δυνάμεις αυτές είναι πάντοτε **ελκτικές**.

Εδώ το νήμα ασκεί στα σώματα $\Sigma_1$ και $\Sigma_2$ δυνάμεις $\vec{T}_1$ και $\vec{T}_2$.

Αφού το νήμα ασκεί στο $\Sigma_1$ την $\vec{T}_1$, έτσι και το σώμα $\Sigma_1$ ασκεί στο νήμα δύναμη $\vec{T}'_1$ που με βάση τον $3^o$ νόμο Newton θα είναι $\vec{T}'_1 = -\vec{T}_1$ (10) ( δράση -αντίδραση).

Επίσης αφού το νήμα ασκεί στο $\Sigma_2$ την $\vec{T}_2$, έτσι και το σώμα $\Sigma_2$ ασκεί στο νήμα δύναμη $\vec{T}'_2$ που με βάση τον $3^o$ νόμο Newton θα είναι $\vec{T}'_2 = -\vec{T}_2$ (11) ( δράση - αντίδραση).

Για τις μοναδικές δυνάμεις $\vec{T}'_1$ και $\vec{T}'_2$ που ασκούνται στο νήμα με βάση τον $2^o$ νόμο Newton έχουμε $\Sigma\vec{F} = m_{\nu\acute{\eta}\mu\alpha\tau o\varsigma} \cdot \vec{\alpha} \Rightarrow \vec{T}'_1 + \vec{T}'_2 = m_{\nu\acute{\eta}\mu\alpha\tau o\varsigma} \cdot \vec{\alpha} \xrightarrow{m_{\nu\acute{\eta}\mu\alpha\tau o\varsigma}=0}$

$\vec{T}'_1 + \vec{T}'_2 = 0 \Rightarrow \vec{T}'_1 = -\vec{T}'_2 \xrightarrow{(10,11)} \vec{T}_1 = -\vec{T}_2$ και κατά μέτρο $T_1 = T_2$

(*) Αν η διάταξη ισορροπούσε προφανώς θα ισχύει για το νήμα $\Sigma\vec{F} = 0$ ….με τα ίδια συμπεράσματα.