

1.69 Η θέση ισορροπίας του ταλαντωτή πριν την δράση της $\vec{F}$ είναι στη θέση Γ που είναι κάτω από τη θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου κατά $\Delta\ell_0$ και ισχύει $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow mg = F_{ελ} \Rightarrow mg = K\Delta\ell_0 \Rightarrow \Delta\ell_0 = 0,3m$.

Το ζητούμενο στο θέμα αυτό είναι ο υπολογισμός του έργου της μεταβλητής δύναμης και απαραίτητο προς τούτο είναι η μετατόπιση στο αντίστοιχο χρονικό διάστημα.

Ας προσέξουμε την συνισταμένη των δυνάμεων σε τυχαία μετατόπιση y .

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα στη θέση αυτή είναι:

✚ το βάρος του σώματος $B = mg = 30N$,

✚ η δύναμη του ελατηρίου $F_{ελ} = K\Delta\ell \Rightarrow$

$$F_{ελ} = K(\Delta\ell_0 + y) \Rightarrow$$

$$F_{ελ} = 100(0,3 + y)$$

$$F_{ελ} = 30 + 100y \text{ (S.I.)},$$

✚ η δύναμη $F = 30 + 100y \text{ (S.I.)}$.

$$\Sigma F = B + F - F_{ελ} \Rightarrow$$

$$\Sigma F = 30 + (30 + 100y) - (30 + 100y) \Rightarrow$$

$$\Sigma F = 30N = \text{σταθερή!!} \Rightarrow a = \frac{\Sigma F}{m} \Rightarrow a = \frac{30N}{3Kg}$$

$$\Rightarrow a = 10ms^{-2}.$$

Επειδή η μετατόπιση έγινε με σταθερή

επιτάχυνση θα είναι $y = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}10 \cdot 0,2^2$

$\Rightarrow y = 0,2m$. Το έργο της δύναμης

$F = 30 + 100y$ βρίσκεται από το εμβαδόν της

$F = f(y)$ για $0 \leq y \leq 0,2m$

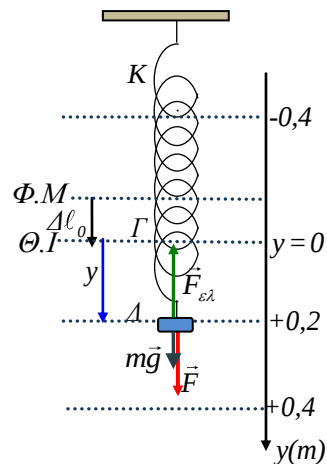
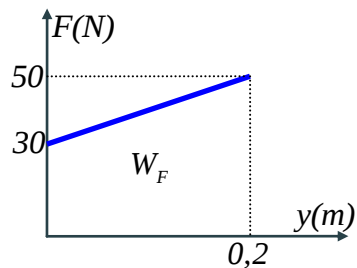
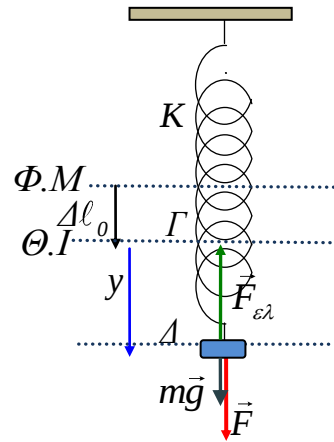
$$W_F = \frac{30 + 50}{2} 0,2 \Rightarrow W_F = 8J$$

Ενέργεια ταλάντωσης $E = W_F = 8J$ Πλάτος

ταλάντωσης $E = \frac{1}{2}DA^2$ $A = \sqrt{\frac{2E}{K}} \Rightarrow A = 0,4m$.

Κυκλική συχνότητα $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{100}{3}} \frac{rad}{s}$

$$y = 0,4\eta\mu\left(\sqrt{\frac{100}{3}}t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ (S.I.) και } v = \frac{4}{\sqrt{3}}\sigma\upsilon\nu\left(\sqrt{\frac{100}{3}}t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ (S.I.)}$$



1.70 Αρχικά και πριν την εφαρμογή του ηλεκτρικού πεδίου οι ασκούμενες στο σώμα δυνάμεις είναι το βάρος $\vec{B} = m\vec{g}$ και η δύναμη του ελατηρίου $\vec{F}_{ελ}$ και αυτό έχει θέση ισορροπίας $\Delta\ell_0$ κάτω από το φυσικό μήκος όπου $\Sigma Fy = 0 \Rightarrow F_{ελ} - mg = 0 \Rightarrow K\Delta\ell_0 = mg \Rightarrow \Delta\ell_0 = 0,1m$.

Μόλις το σώμα το αφήνουμε ελεύθερο από την θέση του φυσικού του μήκους ($t_0 = 0$, $h_0 = 1,00m$) αρχίζει ταλάντωση γύρω από τη θέση ισορροπίας του που είναι σε ύψος $h = 0,90m$. Επειδή μόλις αφήνεται ελεύθερο έχει ταχύτητα μηδέν, η θέση αυτή είναι η ακραία και η απόσταση αυτής από το κέντρο είναι το πλάτος. Έτσι η ταλάντωση αυτή έχει, πλάτος $A_1 = \Delta\ell_0 = 0,1m$, σταθερά

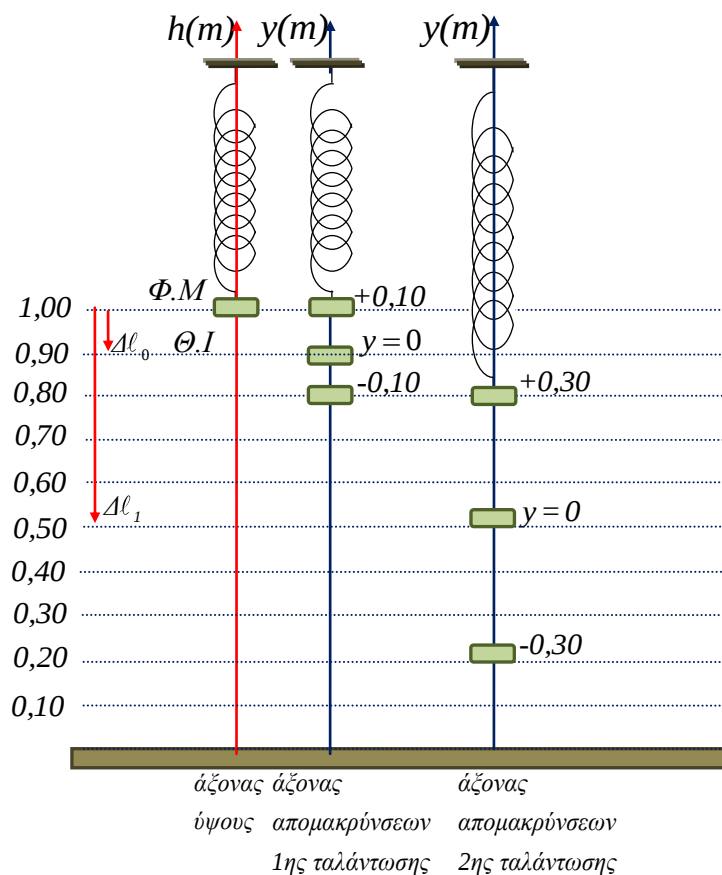
επαναφοράς $D_1 = K = 20N / m$, κυκλική συχνότητα $\omega_1 = \sqrt{\frac{D_1}{m}} \Rightarrow$

$\omega_1 = 10rad / s$, περίοδο $T_1 = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{10}s$ και γίνεται μεταξύ των

θέσεων (ύψη) $h_0 = 1,00m$ και $h = 0,8m$. Τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{T_1}{2} = \frac{\pi}{10}s$ το

σώμα είναι στην κατώτερη θέση (σε ύψος $h = 0,8m$) προφανώς με ταχύτητα μηδέν.

Εκεί εφαρμόζεται το ηλεκτρικό πεδίο και αρχίζει νέα ταλάντωση με ακραία τη θέση αυτή και κέντρο ταλάντωσης $\Delta\ell_1$ κάτω από το φυσικό μήκος όπου



$\Sigma Fy = 0 \Rightarrow F_{ελ} - mg - F = 0 \Rightarrow K\Delta\ell_1 = mg + F \Rightarrow \Delta\ell_1 = 0,5m$ και είναι σε

ύψος $h = 0,5m$. Επειδή μόλις εφαρμόζεται το ηλεκτρικό πεδίο το σώμα έχει ταχύτητα μηδέν, η θέση αυτή είναι η ακραία και η απόσταση αυτής από το κέντρο είναι το πλάτος. Έτσι η ταλάντωση αυτή έχει, πλάτος $A_2 = 0,8 - 0,5 = 0,3m$, σταθερά επαναφοράς $D_2 = K = 20N / m$ (απόδειξη

στο τέλος), κυκλική συχνότητα $\omega_2 = \sqrt{\frac{D_2}{m}} \Rightarrow \omega_2 = 10 rad / s$, περίοδο

$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} \Rightarrow T_2 = \frac{2\pi}{10}s$ και γίνεται μεταξύ των θέσεων (ύψη) $h = 0,80m$ και

$h = 0,20m$.

B) Εξισώσεις 1ης ταλάντωσης:

$$y = A_1 \eta\mu(\omega_1 t + \varphi_0) \dots y = 0,1 \eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ ή } y = 0,1 \sigma\upsilon\nu(10t) \text{ (S.I.)}.$$

Από το σχήμα όμως και τους σχεδιασμένους άξονες των υψών και των απομακρύνσεων έχουμε $h = 0,9 + y$ οπότε $h = 0,9 + 0,1 \sigma\upsilon\nu(10t)$ (S.I.).

$$v = 1 \sigma\upsilon\nu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow v = 1 \eta\mu(10t + \pi) \Rightarrow v = -1 \eta\mu(10t) \text{ (S.I.)} \dots \text{και οι δύο}$$

αυτές εξισώσεις ισχύουν για το χρονικό διάστημα $0s \leq t \leq \frac{\pi}{10}s$

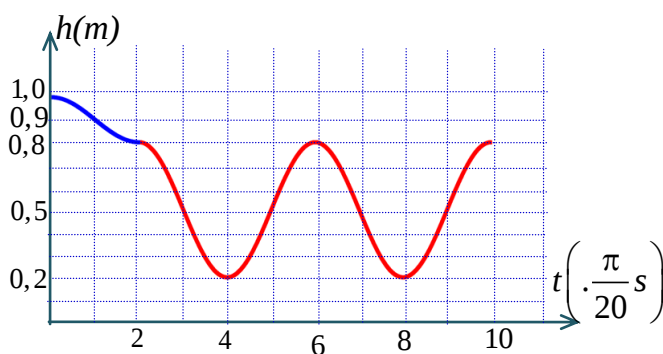
Εξισώσεις 2ης ταλάντωσης:

$$y = 0,3 \eta\mu\left(10(t - t_1) + \frac{\pi}{2}\right) \text{ ή } y = 0,3 \eta\mu\left(10\left(t - \frac{\pi}{10}\right) + \frac{\pi}{2}\right) \text{ ή}$$

$$y = 0,3 \sigma\upsilon\nu(10t - \pi) \text{ ή } y = -0,3 \sigma\upsilon\nu(10t) \text{ (S.I.) για } t \geq \frac{\pi}{10}s.$$

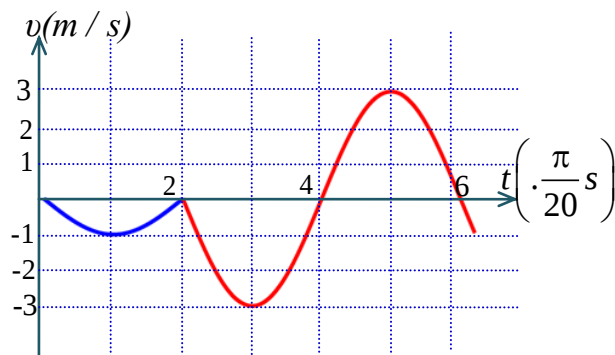
Από το σχήμα όμως και τους σχεδιασμένους άξονες των υψών και των απομακρύνσεων για την δεύτερη ταλάντωση έχουμε $h = 0,5 + y$ οπότε

$$h = 0,5 - 0,3 \sigma\upsilon\nu(10t) \text{ (S.I.) για } t \geq \frac{\pi}{10}s.$$



$$v = 3\sigma v \nu \left(10(t - t_1) + \frac{\pi}{2} \right) \quad \text{ή} \quad v = 3\sigma v \nu \left(10 \left(t - \frac{\pi}{10} \right) + \frac{\pi}{2} \right) \quad \text{ή}$$

$$v = 3\sigma v \nu \left(10t - \pi + \frac{\pi}{2} \right) \quad \text{ή} \quad v = 3\eta \mu(10t) \quad (\text{S.I}) \quad \text{για} \quad t \geq \frac{\pi}{10} \text{ s}.$$



Γ) 1η ταλάντωση.

$$U = \frac{1}{2} D y^2 \xrightarrow[y=h-0,9]{h=0,9+y} U = \frac{1}{2} D (h - 0,9)^2 \Rightarrow U = 10(h - 0,9)^2$$

$$K = E - U \Rightarrow K = \frac{1}{2} D A_1^2 - \frac{1}{2} D y^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2} 20 \cdot 0,1^2 - 10(h - 0,9)^2 \Rightarrow$$

$$K = 0,1 - 10(h - 0,9)^2. \text{ Οι εξισώσεις αυτές ισχύουν }$$

2η ταλάντωση.

$$U = \frac{1}{2} D y^2 \xrightarrow[y=h-0,5]{h=0,5+y} U = \frac{1}{2} D (h - 0,5)^2 \Rightarrow U = 10(h - 0,5)^2$$

$$K = E - U \Rightarrow$$

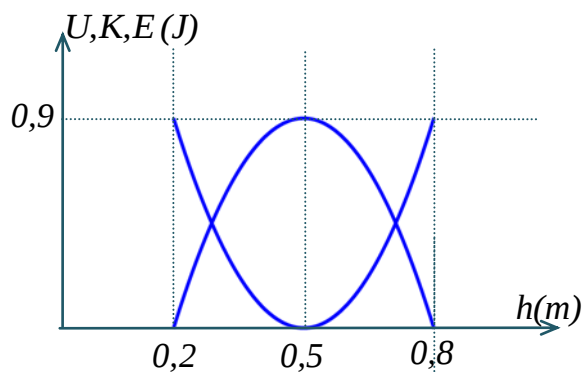
$$K = \frac{1}{2} D A_2^2 - \frac{1}{2} D y^2 \Rightarrow$$

$$K = \frac{1}{2} 20 \cdot 0,3^2 - 10(h - 0,5)^2$$

$\Rightarrow$

$$K = 0,9 - 10(h - 0,5)^2.$$

Οι εξισώσεις αυτές ισχύουν μεταξύ για $0,20\text{m} \leq h \leq 0,80\text{m}$.



Δ) 1η ταλάντωση:

$$U = \frac{1}{2} D y^2 \xrightarrow{y=0,1\sin(10t)} U = \frac{1}{2} 20 \cdot (0,1 \cdot \sin(10t))^2 \Rightarrow U = 0,1 \sin^2(10t) \Rightarrow$$

$$U = 0,1 \frac{1 + \sin(20t)}{2} \Rightarrow U = 0,05 + 0,05 \sin(20t) \text{ (S.I.)}$$

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \xrightarrow{v=-1\eta\mu(10t)} K = \frac{1}{2} \cdot 0,2 \cdot (-1 \cdot \eta\mu(10t))^2 \Rightarrow K = 0,1 \eta\mu^2(10t) \Rightarrow$$

$$K = 0,1 \frac{1 - \sin(20t)}{2} \Rightarrow K = 0,05 - 0,05 \sin(20t) \text{ (S.I.) } \dots \text{και οι δύο αυτές}$$

εξισώσεις ισχύουν για το χρονικό διάστημα $0s \leq t \leq \frac{\pi}{10} s$.

2η ταλάντωση:

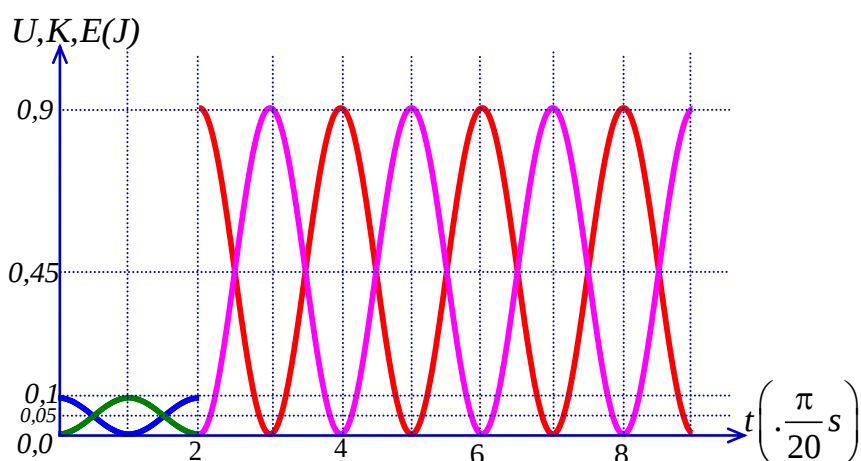
$$U = \frac{1}{2} D y^2 \xrightarrow{y=-0,3\sin(10t)} U = \frac{1}{2} 20 \cdot (-0,3 \cdot \sin(10t))^2 \Rightarrow U = 0,9 \sin^2(10t)$$

$$\Rightarrow U = 0,9 \frac{1 + \sin(20t)}{2} \Rightarrow U = 0,45 + 0,45 \sin(20t) \text{ (S.I.)}$$

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \xrightarrow{v=3\eta\mu(10t)} K = \frac{1}{2} \cdot 0,2 \cdot (3 \eta\mu(10t))^2 \Rightarrow K = 0,9 \eta\mu^2(10t) \Rightarrow$$

$$K = 0,9 \frac{1 - \sin(20t)}{2} \Rightarrow K = 0,45 - 0,45 \sin(20t) \text{ (S.I.) } \dots \text{και οι δύο αυτές}$$

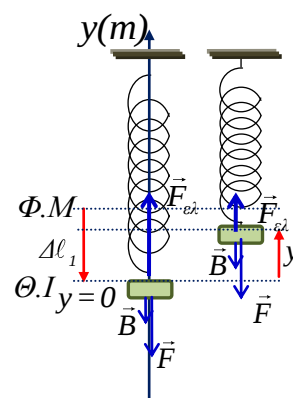
εξισώσεις ισχύουν για το χρονικό διάστημα $t \geq \frac{\pi}{10} s$.



(*) ΣΧΟΛΙΟ :

Όταν σε ένα σύστημα ελατηρίου - σώματος ασκείται και μια πρόσθετη εξωτερική σταθερή δύναμη $\vec{F}$, το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση σταθεράς $D=K$. Στο σχήμα το σώμα και με την δράση της $\vec{F}$, έχει θέση ισορροπίας στη θέση που το ελατήριο είναι παραμορφωμένο κατά $\Delta \ell_1$ και ισχύει: $\Sigma \vec{F}_y = 0 \Rightarrow F_{ελ} - mg - F = 0 \Rightarrow K \Delta \ell_1 = m g$ (1). Αν το σώμα διεγερθεί σε ταλάντωση η θέση αυτή θα είναι το κέντρο της ταλάντωσης.

Ας θεωρήσουμε τον ταλαντωτή σε τυχαία απομάκρυνση y . Στη θέση αυτή έχουμε
 $\Sigma \vec{F} = \vec{F}_{ελ} + m\vec{g} + \vec{F} \Rightarrow \Sigma F = K(\Delta\ell - y) - mg - F \Rightarrow$
 $\Sigma F = K\Delta\ell - Ky - mg - F \xrightarrow{(1)} \Sigma F = -Ky \dots$ άρα
 α.α.τ με σταθερά
 $D = K$.



1.71 α) Η θέση ισορροπίας του ταλαντωτή – με την δράση και της $\vec{F}$ – προσδιορίζεται από την σχέση $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F - F_{ελ} = 0 \Rightarrow$

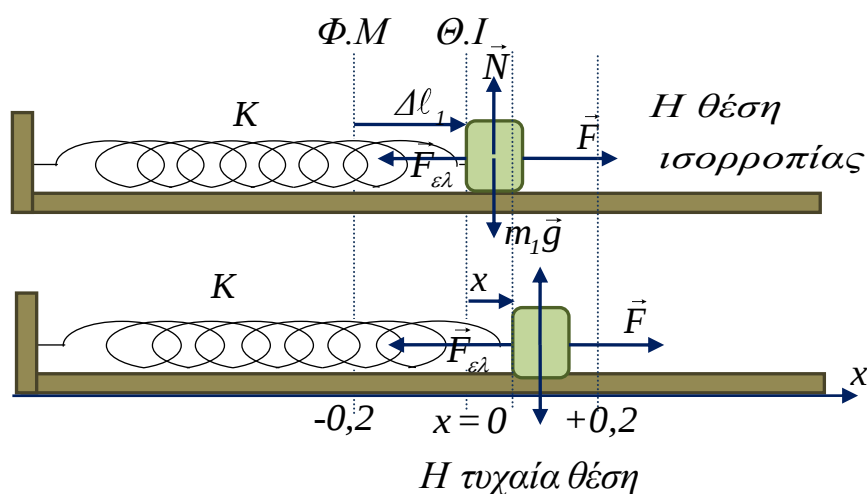
$$28,8 + 81\Delta\ell_1 - 225\Delta\ell_1 = 0 \Rightarrow \Delta\ell_1 = 0,2m.$$

Επιλέγουμε άξονα ταλάντωσης $x'x$ - όπως στο σχήμα- και θεωρούμε τον ταλαντωτή σε μια τυχαία απομάκρυνση x . Για τη συνισταμένη των ασκούμενων δυνάμεων στον ταλαντωτή στη θέση αυτή ισχύει,

$$\Sigma \vec{F}_x = \vec{F} + \vec{F}_{ελ} \Rightarrow \Sigma F = F - F_{ελ} \Rightarrow \Sigma F = 28,8 + 81(\Delta\ell_1 + x) - 225(\Delta\ell_1 + x) \Rightarrow$$

$$\Sigma F = -144x \text{ άρα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά}$$

επαναφοράς $D = 144 \frac{N}{m}$ (προσοχή είναι $D \neq K$) και κυκλική συχνότητα



$$\text{ταλάντωσης } D = m_1\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{144}{1}} = 12 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Μόλις αρχίζει να δρα η $\vec{F}$ και αρχίζει η ταλάντωση ($t_0 = 0$) ο ταλαντωτής ήταν ακίνητος στη θέση που το ελατήριο είχε το φυσικό του μήκος και απείχε από το κέντρο της ταλάντωσης που ακολουθεί απόσταση $0,2m$. Επειδή στη θέση αυτή η ταχύτητα είναι μηδέν αυτή είναι η ακραία θέση της ταλάντωσης, άρα το πλάτος είναι $A = 0,2m$.

Οι χρονικές εξισώσεις της απομάκρυνσης $x = f(t)$ και της ταχύτητας $v = f'(t)$ για την ταλάντωση αυτή εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι:

$$x = 0,2\eta\mu\left(12t + \frac{3\pi}{2}\right) \text{ και } v = 2,4\sigma\upsilon\nu\left(12t + \frac{3\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

β) Τη χρονική στιγμή $t = \frac{\pi}{18} \text{ s}$ από τις προηγούμενες εξισώσεις βρίσκουμε

... $x = +0,1\text{m}$ $v_1 = +1,2\sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Τώρα όμως καταργείται η δύναμη $\vec{F}$ και η όποια ταλάντωση θα έχει κέντρο τη θέση που το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος.

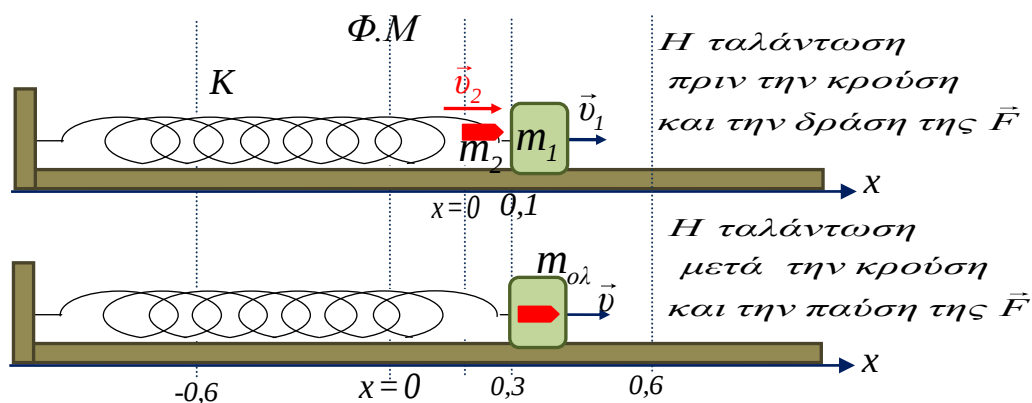
Μετά την κρούση ταλαντωτής είναι το συσσωμάτωμα με μάζα

$$m_{ολ} = 2,25\text{Kg}, \text{ σταθερά επαναφοράς } D' = K = 225 \frac{\text{N}}{\text{m}} \text{ και κυκλική}$$

$$\text{συχνότητα } D' = m_{ολ}\omega'^2 \Rightarrow \omega' = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Η ταλάντωση αρχίζει την $t_1 = \frac{\pi}{18} \text{ s}$ και εκείνη τη στιγμή ο νέος ταλαντωτής για τον νέο άξονα ταλάντωσης έχει απομάκρυνση $x = +0,3\text{m}$ (!!)

και ταχύτητα που προκύπτει από τη διατήρηση της ορμής $m_{ολ}v = m_1v_1 + m_2v_2 \Rightarrow 2,25v = 1,1,2\sqrt{3} + 1,25 \cdot 4,4\sqrt{3} \Rightarrow v = 3\sqrt{3} \text{ m/s}$



Το νέο πλάτος της ταλάντωσης A' υπολογίζεται ενεργειακά

$$\frac{1}{2}m_{ολ}v^2 + \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}KA'^2 \dots A' = 0,6\text{m}$$

Οι χρονικές εξισώσεις της απομάκρυνσης $x = f(t)$ και της ταχύτητας $v = f'(t)$ για την ταλάντωση αυτή θα είναι:

$x = 0,6\eta\mu\left(10(t - t_1) + \varphi_0\right)$ με $t_1 = \frac{\pi}{18}s \dots$ και για $t = t_1 = \frac{\pi}{18}s$ θα έχουμε

$x = +0,3m$ και $v > 0 \dots +0,3 = 0,6\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \frac{1}{2} \dots \varphi_0 = \frac{\pi}{6}rad$ ή

$\varphi_0 = \frac{5\pi}{6}rad$. Δεκτή είναι αυτή που την $t = t_1 = \frac{\pi}{18}s$ δίνει θετική

ταχύτητα και αυτή είναι η $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}rad$.

$x = 0,6\eta\mu\left(10\left(t - \frac{\pi}{18}\right) + \frac{\pi}{6}\right)$ και $v = 6\sigma\upsilon\nu\left(10\left(t - \frac{\pi}{18}\right) + \frac{\pi}{6}\right)$ (S.I) και για

$t \geq \frac{\pi}{18}s$. Οι εξισώσεις αυτές μπορούν να απλοποιηθούν στη μορφή...

$x = 0,6\eta\mu\left(10t - \frac{7\pi}{18}\right)$ και $v = 6\sigma\upsilon\nu\left(10t - \frac{7\pi}{18}\right)$ (S.I) και για $t \geq \frac{\pi}{18}s$.

γ) Αν θεωρούσαμε τη στιγμή της κρούσης ως μηδέν οι ανωτέρω εξισώσεις θα έχουν την μορφή $x = 0,6\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{6}\right)$ και

$v = 6\sigma\upsilon\nu\left(10t + \frac{\pi}{6}\right)$ (S.I)

Μέγιστη κινητική ενέργεια έχουμε όταν έχουμε την μέγιστη ταχύτητα

οπότε $v = 6\sigma\upsilon\nu\left(10t + \frac{\pi}{6}\right) = \pm 6 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\left(10t + \frac{\pi}{6}\right) = \pm 1 \Rightarrow 10t + \frac{\pi}{6} = k\pi$ και

για πρώτη φορά $t = \frac{5\pi}{60}s \dots$ και θέλουμε από την αρχική αρχή των

χρόνων $t = \left(\frac{\pi}{18} + \frac{5\pi}{60}\right)s \Rightarrow t = \frac{25\pi}{180}s$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας είναι $\dots \frac{dK}{dt} = \Sigma Fv \Rightarrow$

$$\frac{dK}{dt} = -225.0,6\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{6}\right).6\sigma\upsilon\nu\left(10t + \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{dK}{dt} = -810\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{6}\right).\sigma\upsilon\nu\left(10t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\frac{dK}{dt} = -405.2\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{6}\right).\sigma\upsilon\nu\left(10t + \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -405.\eta\mu\left(20t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\left|\frac{dK}{dt}\right|_{max} = 405 \frac{J}{s} \quad \text{όταν} \quad \eta\mu\left(20t + \frac{\pi}{3}\right) = \pm 1 \Rightarrow 20t + \frac{\pi}{3} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

από την αρχική αρχή των χρόνων $t = \left(\frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{120} \right) s \Rightarrow t = \frac{23\pi}{360} s$

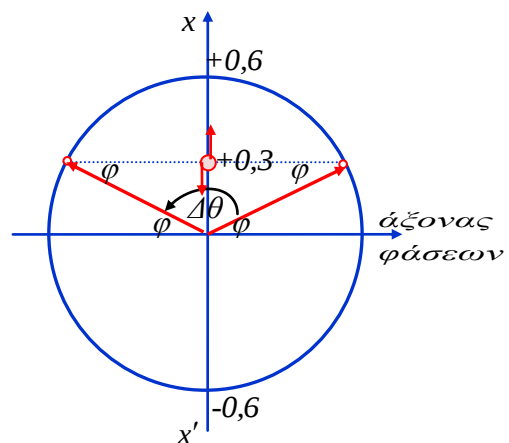
$x = 0,6\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{6}\right)$ βρίσκουμε τότε ο ταλαντωτής είναι στην $x = 0,3m$

$$\dots x = 0,6\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{6}\right) = +0,3 \Rightarrow \eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

(...αναμενόμενο... αφού τότε μηδενίσαμε τον χρόνο) και $10t + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

$$\Rightarrow 10t = \frac{4\pi}{6} \Rightarrow t_2 = \frac{2\pi}{30} s \dots \text{άρα } \Delta t = \frac{2\pi}{30} s.$$

στρεφόμενο διάνυσμα διαγράφει με ομαλή στροφική κίνηση και $\omega = 10 \text{ rad/s}$ την γωνία $\Delta\theta$ που από την γεωμετρία του σχήματος εύκολα φαίνεται ότι είναι $\Delta\theta = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$ άρα



$$\Delta\theta = \omega\Delta t \Rightarrow \frac{2\pi}{3} = 10\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{2\pi}{30}$$

Ας σημειώσουμε δύο άξονες:

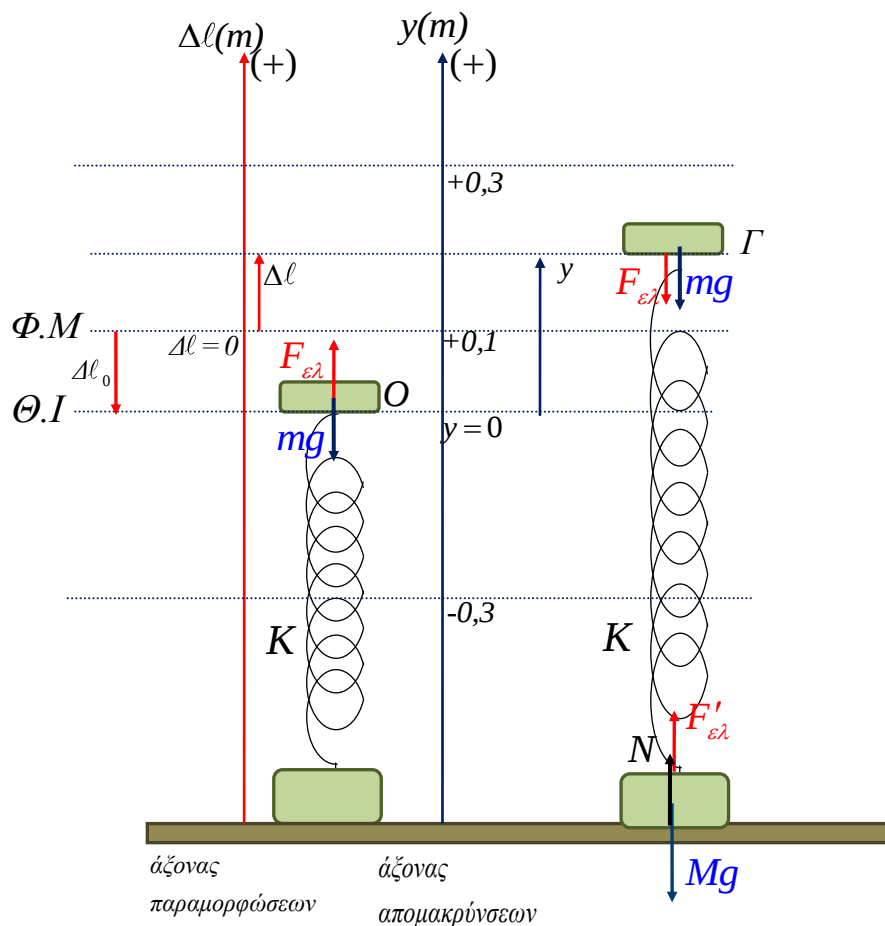
- τον άξονα των απομακρύνσεων του ταλαντωτή y' με αρχή $O(y=0)$ την θέση ισορροπίας του ταλαντωτή (αυτό δεν είναι επιλογή αλλά υποχρέωση...) και θετική φορά της επιλογής μας... έστω προς τα πάνω...
- τον άξονα των παραμορφώσεων του ελατηρίου με αρχή $\Delta \ell = 0$ την θέση του φυσικού μήκους και θετική φορά ίδια με αυτή που πήραμε για τον άξονα των απομακρύνσεων.

✚ Ας προσδιορίσουμε τη θέση ισορροπίας σε σχέση με τη θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου. Στη θέση αυτή το ελατήριο έχει στατική παραμόρφωση $\Delta \ell_0$ που προσδιορίζεται από την σχέση $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow \vec{F}_{ελ} + m\vec{g} = 0 \Rightarrow K|\Delta \ell_0| - mg = 0 \Rightarrow |\Delta \ell_0| = 0,1m$ (αλγεβρικά και με βάση το σύστημα του άξονα των παραμορφώσεων $\Delta \ell_0 = -0,1m$).

✚ Θεωρούμε τον ταλαντωτή Σ_1 σε μια τυχαία θέση Γ (προτιμάμε για φορμαλιστική ευκολία να είναι θετική) και βρίσκουμε τη σχέση **των αλγεβρικών τιμών** για την απομάκρυνση και την παραμόρφωση. Από το σχήμα φαίνεται ότι $|y| = |\Delta \ell_0| + |\Delta \ell| \Rightarrow |y| = 0,1 + |\Delta \ell| \xrightarrow[\Delta \ell > 0]{y > 0} y = 0,1 + \Delta \ell$ (1)

Γράφουμε την εξίσωση απομάκρυνσης του ταλαντωτή Σ_1

$$y = A\eta\mu\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right) \dots y = 0,3\eta\mu\left(10t + \frac{3\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)} \dots \text{ή } y = -0,3\sigma\upsilon\nu(10t)$$



Όταν ο ταλαντωτής Σ_1 είναι σε μια τυχαία θέση Γ γράφουμε $\Sigma F_y = -Dy$

$$\xrightarrow{D=K} \underbrace{F + mg}_{\text{αλγεβρικές τιμές}} = -Dy \xrightarrow{D=K} \underbrace{F_{ελ} - 20}_{\text{αλγεβρική τιμή}} = -200y \Rightarrow F_{ελ} = 20 - 200y \text{ με}$$

$(-0,3m \leq y \leq +0,3m)$. Αυτή είναι η αλγεβρική τιμή της δύναμης (για το δεδομένο σύστημα) που ασκεί το ελατήριο στο Σ_1 .

... και διαφορετικά ... $\underbrace{F_{ελ} = -K\Delta\ell}_{\text{αλγεβρικά}}$ και επειδή από την (1) $y = 0,1 + \Delta\ell \Rightarrow$

$$\Delta\ell = y - 0,1 \text{ άρα } F_{ελ} = -K(y - 0,1) \Rightarrow F_{ελ} = -200(y - 0,1) \Rightarrow F_{ελ} = 20 - 200y$$

Η αλγεβρική τιμή της δύναμης που ασκεί το ελατήριο στο Σ_2 είναι

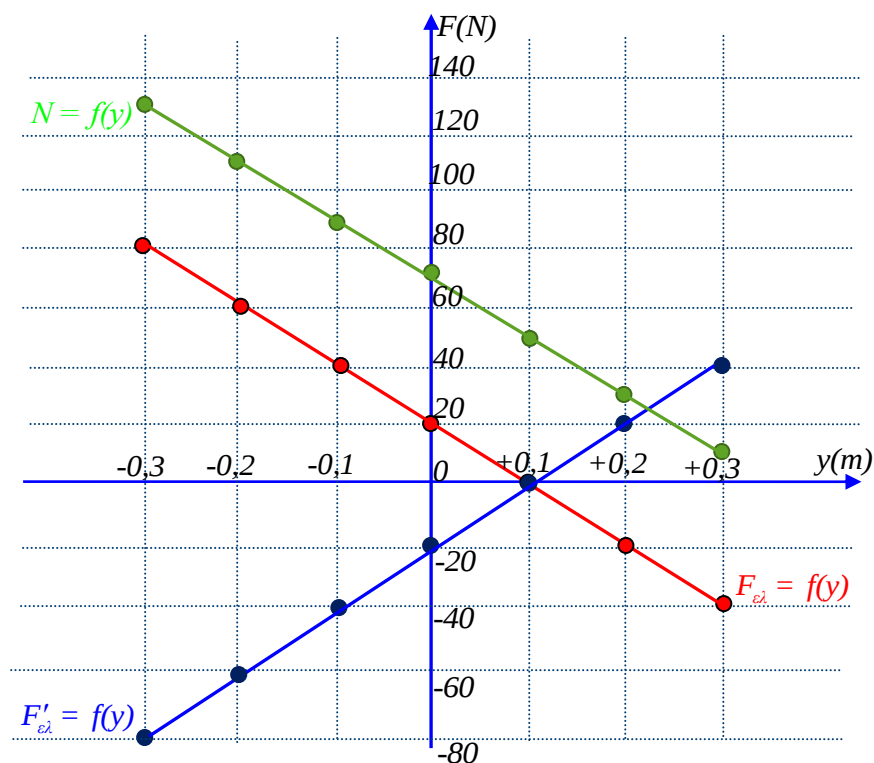
$$F'_{ελ} = -F_{ελ} \Rightarrow F'_{ελ} = -20 + 200y.$$

Η αλγεβρική τιμή της δύναμης που ασκεί δάπεδο στο Σ_2 προσδιορίζεται από

$$\text{την ισορροπία αυτού } \Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{N} + M\vec{g} + \vec{F}'_{ελ} = 0 \Rightarrow \underbrace{N + Mg + F'_{ελ}}_{\text{αλγεβρικές τιμές}} = 0 \Rightarrow$$

$$N - 50 - 20 + 200y = 0 \Rightarrow N = 70 - 200y$$

$y(m)$	-0,3	-0,2	-0,1	0	+0,1	+0,2	+0,3
$F_{ελ}(N)$	+80	+60	+40	+20	0	-20	-40
$F'_{ελ}(N)$	-80	-60	-40	-20	0	+20	+40
$N(N)$	+130	+110	+90	+70	+50	+30	+10



Οι αντίστοιχες χρονικές εξισώσεις εξάγονται απλά, θέτοντας $y = -0,3\sigma\upsilon\nu(10t)$

$$F_{ελ} = 20 - 200(-0,3\sigma\upsilon\nu(10t)) \Rightarrow F_{ελ} = 20 + 60\sigma\upsilon\nu(10t)$$

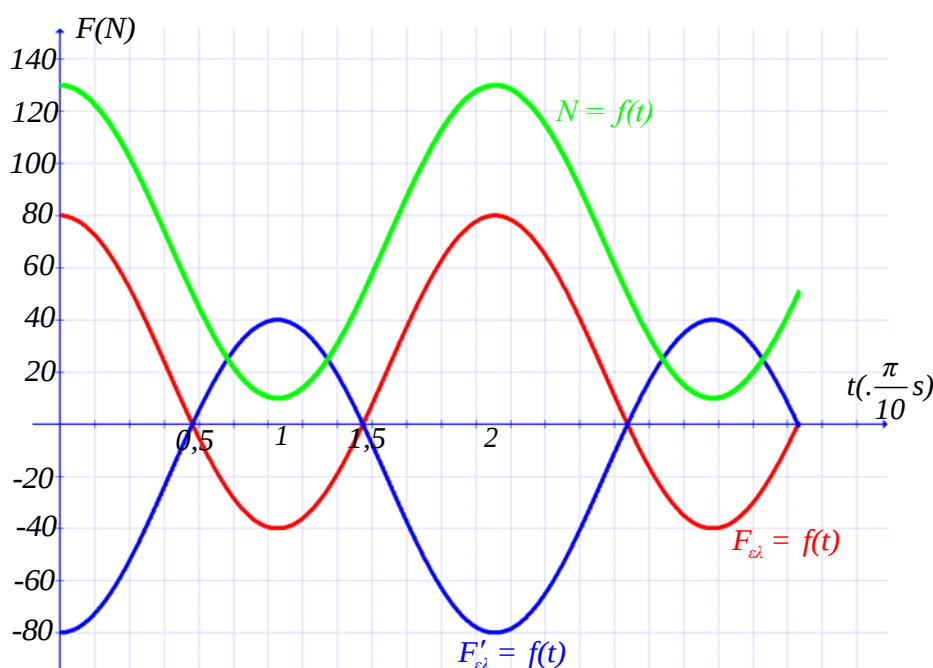
$$\text{Όμοια ... } F'_{ελ} = -20 - 60\sigma\upsilon\nu(10t) \text{ και } N = 70 + 60\sigma\upsilon\nu(10t)$$

και οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις φαίνονται στο παρακάτω διάγραμμα.

Τώρα για να χαθεί η επαφή του Σ_2 με το δάπεδο πρέπει να μηδενισθεί η δύναμη στήριξης N ... (ουσιαστικά η $F'_{ελ}$ να είναι προς τα πάνω ... θετική στο σύστημά μας και με μέτρο μεγαλύτερο του βάρους Mg του Σ_2 ... και προφανώς το ελατήριο να είναι τεντωμένο ... πάνω από το φυσικό του μήκος...).

Για να μη χαθεί η επαφή πρέπει να υπάρχει η N και αυτή έχει πάντοτε – εφόσον υπάρχει- φορά προς τα πάνω... που για το σύστημά μας έχει θετική αλγεβρική τιμή ... άρα $N \geq 0 \Rightarrow N = 70 - 200y \geq 0 \Rightarrow y \leq 0,35m \Rightarrow A_{max} = 0,35m$.

(Προσοχή! πήραμε $N \geq 0$ με την λογική της αλγεβρικής τιμής και όχι του μέτρου ... δείτε παρακάτω που θα αλλάξουμε φορά στο σύστημα!!!)



... ΚΑΙ ΑΝ Η ΦΟΡΑ ΤΩΝ ΑΞΟΝΩΝ ΗΤΑΝ ΘΕΤΙΚΗ ΠΡΟΣ ΤΑ ΚΑΤΩ;

Ας ήταν ... η ίδια διαδικασία...

Θεωρούμε τον ταλαντωτή Σ_1 σε μια τυχαία θέση Γ (αφήνουμε σκόπιμα την ίδια που τώρα όμως είναι αρνητική) και βρίσκουμε τη σχέση **των αλγεβρικών τιμών** για την απομάκρυνση και την παραμόρφωση. Από το σχήμα φαίνεται ότι $|y| = |\Delta l_0| + |\Delta l| \Rightarrow |y| = 0,1 + |\Delta l| \xrightarrow[y < 0]{\Delta l < 0} -y = 0,1 - \Delta l \Rightarrow y = \Delta l - 0,1$
Γράφουμε την εξίσωση απομάκρυνσης του ταλαντωτή Σ_1

$$y = A \eta \mu \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \dots y = 0,3 \eta \mu \left(10t + \frac{\pi}{2} \right) \text{ (S.I.)} \dots \quad \text{ή}$$

$$y = 0,3 \sigma \nu \nu (10t)$$

Όταν ο ταλαντωτής Σ_1 είναι σε μια τυχαία θέση Γ γράφουμε $\Sigma F_y = -Dy$

$$\xrightarrow{D=K} \underbrace{F + mg}_{\text{αλγεβρικές τιμές}} = -Dy \xrightarrow{D=K} \underbrace{F_{ελ}}_{\text{αλγεβρική τιμή}} + 20 = -200y \Rightarrow F_{ελ} = -20 - 200y$$

με $(-0,3m \leq y \leq +0,3m)$. Αυτή είναι η αλγεβρική τιμή της δύναμης (για το δεδομένο σύστημα) που ασκεί το ελατήριο στο Σ_1 .

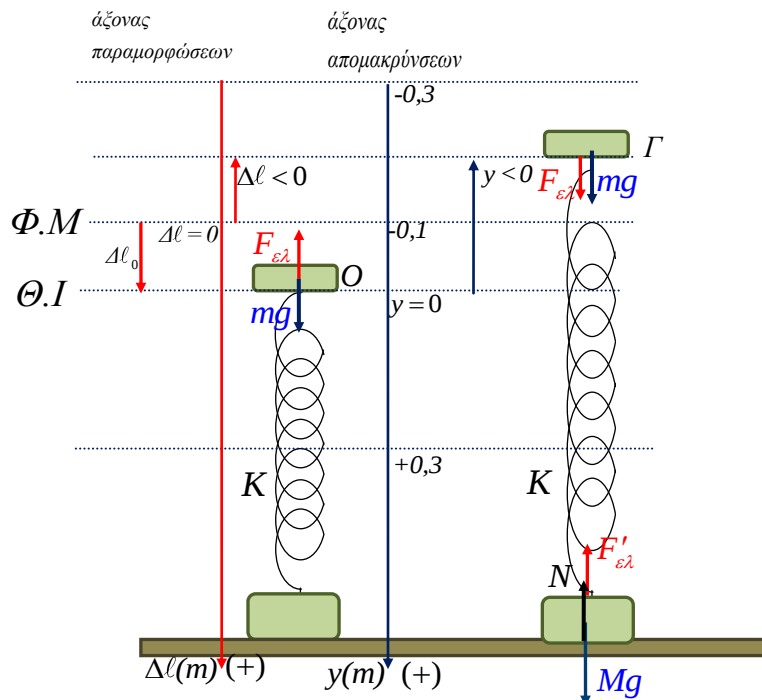
... και διαφορετικά ... $\underbrace{F_{ελ} = -K\Delta\ell}_{\text{αλγεβρικά}}$ και επειδή από την (2) $y = \Delta\ell - 0,1 \Rightarrow$

$$\Delta\ell = y + 0,1 \text{ άρα } F_{ελ} = -K(y + 0,1) \Rightarrow F_{ελ} = -200(y + 0,1) \Rightarrow F_{ελ} = -20 - 200y$$

Η αλγεβρική τιμή της δύναμης που ασκεί το ελατήριο στο Σ_2 είναι $F'_{ελ} = -F_{ελ} \Rightarrow F'_{ελ} = 20 + 200y$.

Η αλγεβρική τιμή της δύναμης που ασκεί δάπεδο στο Σ_2 προσδιορίζεται από την ισορροπία αυτού $\Sigma \vec{F}_y = 0 \Rightarrow \vec{N} + M\vec{g} + \vec{F}'_{ελ} = 0 \Rightarrow \underbrace{N + Mg + F'_{ελ}}_{\text{αλγεβρικές τιμές}} = 0 \Rightarrow$

$$N + 50 + 20 + 200y = 0 \Rightarrow N = -70 - 200y$$



$y(m)$	-0,3	-0,2	-0,1	0	+0,1	+0,2	+0,3
$F_{ελ}(N)$	+40	+20	0	-20	-40	-60	-80
$F'_{ελ}(N)$	-40	-20	0	+20	+40	+60	+80
$N(N)$	-10	-30	-50	-70	-90	-110	-130

Με μια πρώτη ματιά οι εξισώσεις φαίνονται «διαφορετικές» για τα δύο συστήματα ... αλλά αν προσέξουμε και συγκρίνουμε τους δύο πίνακες, στην ίδια θέση έχουμε το ίδιο μέτρο για κάθε δύναμη ανεξάρτητα από το σύστημα.

Ας προσέξουμε τώρα πώς μελετάμε την απώλεια επαφής για το κάτω σώμα Σ_2 .

Και πάλι για να χαθεί η επαφή του Σ_2 με το δάπεδο πρέπει να μηδενισθεί η δύναμη στήριξης N ... (ουσιαστικά η $F'_{ελ}$ να είναι προς τα πάνω ... ΑΡΝΗΤΙΚΗ στο σύστημά μας και με μέτρο μεγαλύτερο του βάρους Mg του Σ_2 ... και προφανώς το ελατήριο να είναι τεντωμένο ... πάνω από το φυσικό του μήκος...).

Για να μη χαθεί η επαφή πρέπει να υπάρχει η N και αυτή εφόσον υπάρχει έχει πάντοτε φορά προς τα πάνω... και για το σύστημά μας έχει ΑΡΝΗΤΙΚΗ αλγεβρική τιμή ... άρα πρέπει $N \leq 0 (!!) \Rightarrow N = -70 - 200y \leq 0 \Rightarrow$

$y \geq -0,35m$ Δηλαδή επαφή υπάρχει εφόσον ο ταλαντωτής Σ_1 είναι κάτω από την θέση $y = -0,35m$ συνεπώς το μέγιστο πλάτος για να μην χαθεί η επαφή είναι $A_{max} = 0,35m$.

1.73 α) Με απλή παρατήρηση της $x = 0,8\mu^2(10t)$ δεν μπορεί να δοθεί απάντηση. Για το λόγο αυτό κάνουμε αποτετραγωνοποίηση, χρησιμοποιώντας τη σχέση $\eta\mu^2(\varphi) = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu(2\varphi)}{2}$.

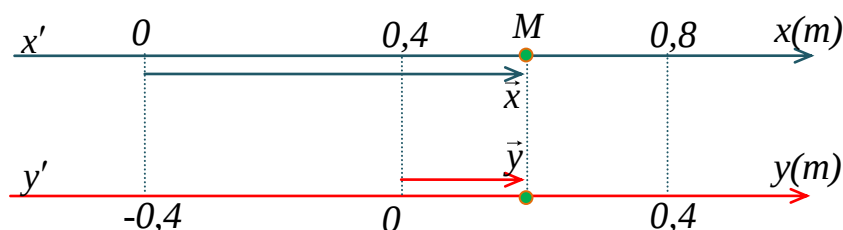
$$x = 0,8\eta\mu^2(10t) \Rightarrow x = 0,8 \frac{1 - \sigma\upsilon\nu(20t)}{2} \Rightarrow x = 0,4 - 0,4\sigma\upsilon\nu(20t) \quad (1) \quad \text{ή}$$

$$x = 0,4 - 0,4\eta\mu\left(20t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (2).$$

Η σχέση (1) δηλώνει ότι η θέση x του κινητού στον άξονα $x'x$ είναι αρμονική συνάρτηση του χρόνου - συνημιτονοειδής, με κυκλική συχνότητα $\omega = 20 \text{ rad/s}$, με κέντρο την $x = 0,4m$ και ακρότατα $\pm 0,4m$ εκατέρωθεν αυτής (πλάτος $A = 0,4m$) ... δηλαδή είναι απλή αρμονική ταλάντωση αλλά ο άξονας $x'x$ δεν είναι "άξονας απομακρύνσεων".

Ως άξονα απομακρύνσεων ορίζουμε αυτόν που έχει αρχή την θέση ισορροπίας η οποία αποτελεί και το κέντρο της ταλάντωσης.

Ας προσέξουμε το παρακάτω σχήμα, που είναι σημειωμένοι δύο άξονες με τους οποίους θέλουμε να περιγράψουμε την ανωτέρω κίνηση. Είναι ο $x'x$ όπως περιγράφεται ανωτέρω και ο $y'y$ παράλληλος με αυτόν με την ίδια κατεύθυνση αλλά με αρχή το μέσο της διαδρομής $[x = 0, x = 0,8m]$ δηλαδή το $x = 0,4m$. Ο άξονας $y'y$ είναι ο άξονας των απομακρύνσεων της ταλάντωσης.



Οι αλγεβρικές τιμές της συντεταγμένης $\vec{x}$ και της απομάκρυνσης $\vec{y}$ συνδέονται με τη σχέση $x = 0,4 + y$ (S.I)(3) (αυτό φαίνεται εύκολα αν θεωρήσουμε τον ταλαντωτή σε μια τυχαία θέση M) .

Έτσι η ανωτέρω κίνηση :

✚ στον άξονα $x'x$ έχει εξίσωση θέσης $x = 0,4 - 0,4\sin(20t)$ ή

$$x = 0,4 - 0,4\eta\mu\left(20t + \frac{\pi}{2}\right).$$

✚ στον άξονα $y'y$ έχει εξίσωση απομάκρυνσης $y = x - 0,4 \Rightarrow$

$$y = -0,4\sin(20t) \text{ ή } y = 0,4\sin(20t + \pi) \text{ ή } y = 0,4\eta\mu\left(20t + \frac{3\pi}{2}\right) \quad (4)$$

β) Η ταχύτητα $v = f(t)$ βρίσκεται με μια απλή παραγωγή της $x = f(t)$ ή της

$$y = f(t) \dots v = \frac{dx}{dt} \text{ ή } v = \frac{dy}{dt} \Rightarrow v = \frac{d(-0,4\sin(20t))}{dt} \Rightarrow v = 8\eta\mu(20t).$$

$$\dots \text{και διαφορετικά από την (4) } \dots v = 8\sin\left(20t + \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow v = 8\eta\mu(20t + 2\pi)$$

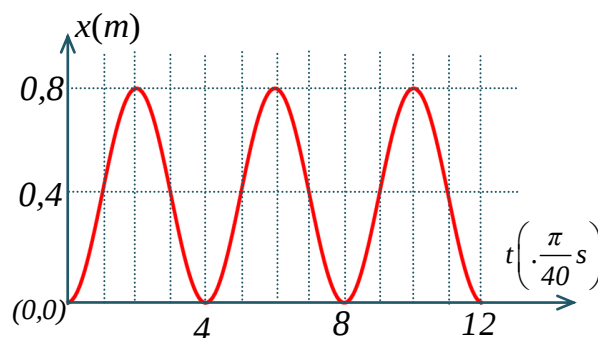
$$\Rightarrow \boxed{v = 8\eta\mu(20t)} \quad (5) \quad (\text{S.I})$$

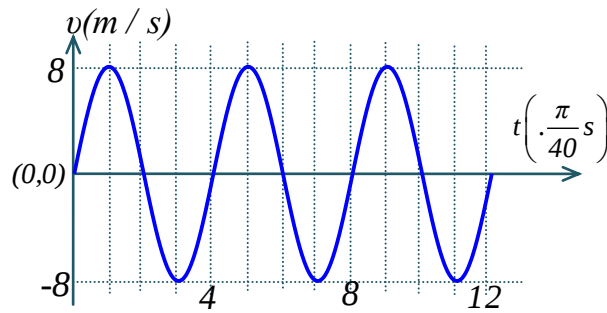
γ) Η γραφική παράσταση της $x = 0,4 - 0,4\sin(20t)$ είναι συνημιτονοειδής με ακρότατα $\pm 0,4m$ γύρω από την θέση $x = 0,4m$, περιέχεται μεταξύ των ευθειών που είναι κάθετες στον άξονα $x'x$ στις θέσεις $x_{\max} = 0,4 + 0,4 = 0,8m$ και $x_{\min} = 0,4 - 0,4 = 0m$ και ξεκινάει από το κατώτερο σημείο $x_{\min} = 0m$. Η $x = f(t)$ είναι συνημιτονοειδής και όχι ημιτονοειδής όπως αρχικά φαίνεται από την $x = 0,8\eta\mu^2(10t)$.

Η γραφική παράσταση τη ταχύτητας $v = 8\eta\mu(20t)$ είναι μια απλή ημιτονοειδής συνάρτηση...

Και οι δύο έχουν κυκλική συχνότητα $\omega = 20\text{rad} / s$ (και όχι $\omega = 10\text{rad} / s$

που "φαίνεται" στην $x = 0,8\eta\mu^2(10t)$) και περίοδο $T = \frac{2\pi}{20}s$ ή $T = 4 \cdot \frac{\pi}{40}s$





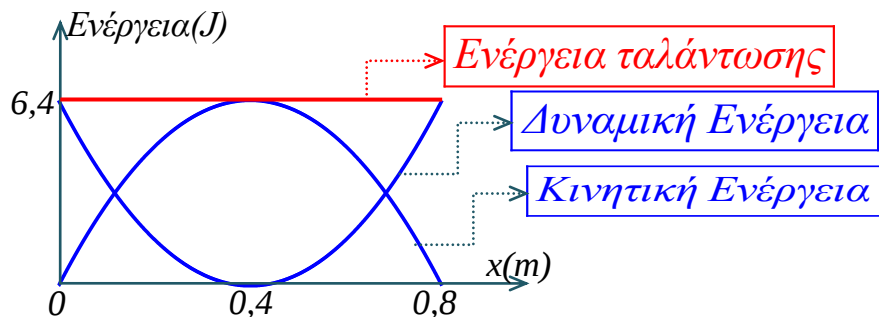
δ) Παρατηρώντας την (4) βρίσκουμε την επιτάχυνση (ή παραγωγίζουμε την (5)) ... $\alpha = -20^2 0,4 \eta \mu \left(20t + \frac{3\pi}{2} \right) \Rightarrow \alpha = -400y \text{ (S.I.)}$.

$$\Sigma F = ma \xrightarrow{\text{S.I.}} \Sigma F = 0,2 \cdot (-400y) \Rightarrow \Sigma F = -80y \text{ (S.I.)} \xrightarrow{y=x-0,4 \text{ (3)}} \Sigma F = -80(x-0,4) \Rightarrow \boxed{\Sigma F = -80x + 32} \text{ (S.I.)}$$

$$\epsilon) U = \frac{1}{2} D y^2 \Rightarrow U = \frac{1}{2} 80 y^2 \Rightarrow U = 40 y^2 \xrightarrow{(3)} U = 40(x-0,4)^2 \text{ (S.I.)}$$

$$E = \frac{1}{2} D A^2 \Rightarrow E = \frac{1}{2} 80 \cdot 0,4^2 \Rightarrow E = 6,4 \text{ J}$$

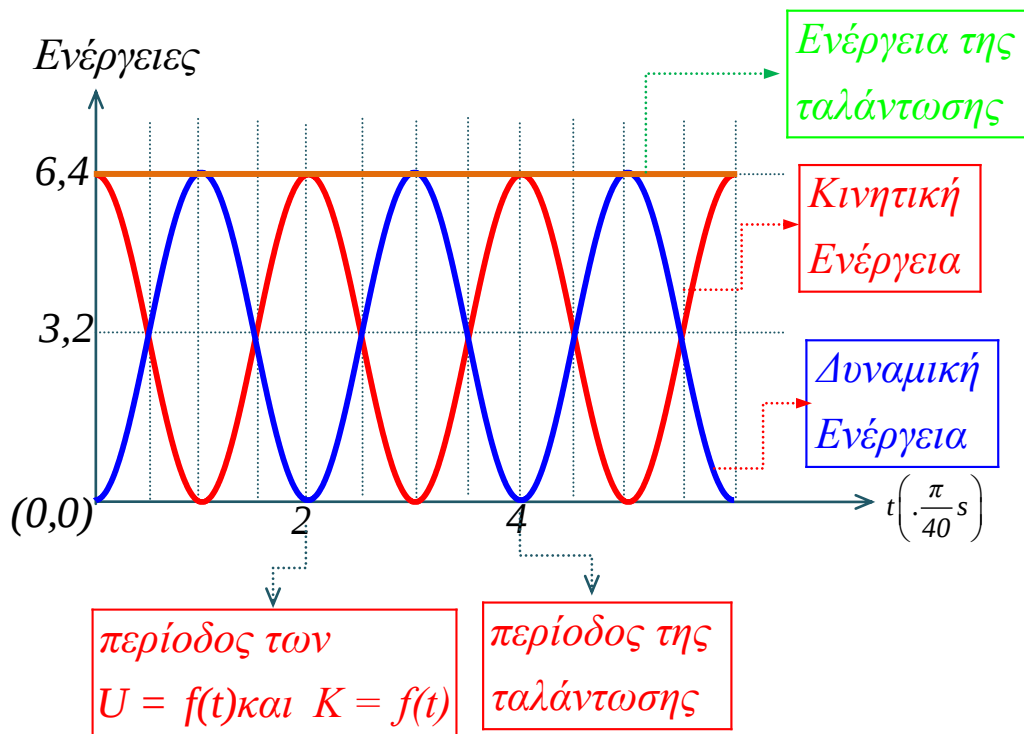
$$K = E - U \Rightarrow K = 6,4 - 40(x-0,4)^2 \text{ (S.I.)}$$



στ) $U = \frac{1}{2} D y^2 \Rightarrow U = \frac{1}{2} 80 y^2 \Rightarrow \xrightarrow{y=-0,4 \sigma \nu \nu (20t)} U = 6,4 \sigma \nu \nu^2 (20t)$ και με αποτετραγωνισμό παίρνουμε ...

$$U = 6,4 \frac{1 + \sigma \nu \nu (40t)}{2} \Rightarrow U = 3,2 + 3,2 \sigma \nu \nu (40t) .$$

$$K = E - U \Rightarrow K = 6,4 - (3,2 + 3,2 \sigma \nu \nu (40t)) \Rightarrow K = 3,2 - 3,2 \sigma \nu \nu (40t)$$



1.74 α) Τριβή ολίσθησης $T = \mu N = \mu mg \Rightarrow T = 0,5 \cdot 1 \text{ Kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2 \Rightarrow T = 5 \text{ N}$

$$E_{\text{προσ}} = \frac{1}{2} K \Delta \ell_0^2 + |W_T| \Rightarrow E_{\text{προσ}} = \frac{1}{2} 100 \frac{\text{N}}{\text{m}} (0,5 \text{ m})^2 + |-5 \text{ N} \cdot 0,5 \text{ m}| \Rightarrow E_{\text{προσ}} = 15 \text{ J} .$$

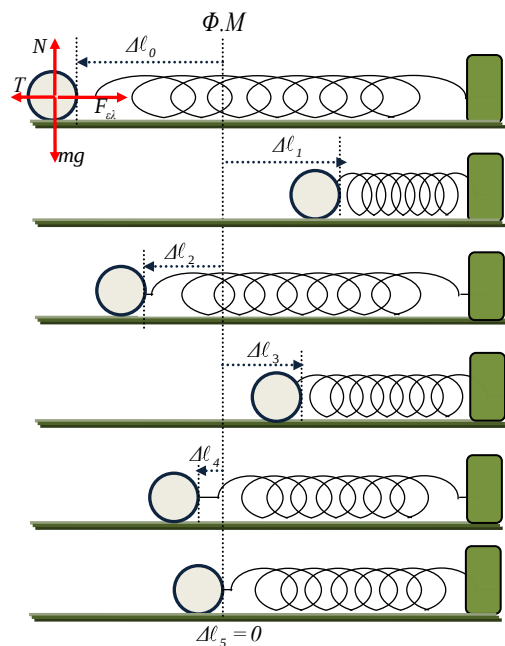
β.1) Όταν αφήνουμε ελεύθερο το σώμα Σ αυτό μετατοπίζεται έως ότου η ταχύτητά του μηδενίζεται στιγμιαία. Μετά, εφόσον η δύναμη του ελατηρίου είναι μεγαλύτερη από την στατική τριβή, η κίνηση συνεχίζεται μέχρι τον νέο στιγμιαίο μηδενισμό της ταχύτητας. Για την πρώτη μετατόπιση του σώματος Σ από την θέση που το ελατήριο έχει παραμόρφωση $\Delta \ell_0$ έως την θέση που το ελατήριο έχει παραμόρφωση $\Delta \ell_1$ γράφουμε Θ.Μ.Κ.Ε $\Delta K = W_{F_{\text{ελ}}} + W_T \Rightarrow$

$$0 - 0 = \frac{1}{2} K \Delta \ell_0^2 - \frac{1}{2} K \Delta \ell_1^2 - T(\Delta \ell_0 + \Delta \ell_1) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} K(\Delta \ell_0 - \Delta \ell_1)(\Delta \ell_0 + \Delta \ell_1) = T(\Delta \ell_0 + \Delta \ell_1) \Rightarrow$$

$$\Delta \ell_0 - \Delta \ell_1 = \frac{2T}{K} \Rightarrow \Delta \ell_0 - \Delta \ell_1 = 0,1 \text{ m} . \text{ Όποια τέτοια μετατόπιση και να πάρουμε}$$

έχουμε σταθερή μείωση της παραμόρφωσης του ελατηρίου κατά $0,1 \text{ m}$.



$$\begin{array}{l}
 1^{\text{η}} \text{ μετατόπιση: } \Delta \ell_0 - \Delta \ell_1 = \frac{2T}{K} \\
 2^{\text{η}} \text{ μετατόπιση: } \Delta \ell_1 - \Delta \ell_2 = \frac{2T}{K} \\
 3^{\text{η}} \text{ μετατόπιση: } \Delta \ell_2 - \Delta \ell_3 = \frac{2T}{K} \\
 \dots\dots\dots \\
 \nu^{\text{η}} \text{ μετατόπιση: } \Delta \ell_{\nu-1} - \Delta \ell_{\nu} = \frac{2T}{K}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} 1^{\text{η}} \\ 2^{\text{η}} \\ 3^{\text{η}} \\ \dots \\ \nu^{\text{η}} \end{array}} \right\} \text{Με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε:}$$

$\Delta \ell_0 - \Delta \ell_{\nu} = \nu \frac{2T}{K} \Rightarrow \Delta \ell_{\nu} = \Delta \ell_0 - \nu \frac{2T}{K} \Rightarrow \Delta \ell_{\nu} = 0,5 - \nu \cdot 0,1 \text{ (S.I.) με } \nu \in \mathbb{Z}^+.$ Η σχέση αυτή δίνει την παραμόρφωση του ελατηρίου στο τέλος της ν -ιοστής μετατόπισης.

$1^{\text{η}}$ μετατόπιση: Από $\Delta \ell_0 = 0,5m$ έως $\Delta \ell_1 = 0,4m$

$2^{\text{η}}$ μετατόπιση: Από $\Delta \ell_1 = 0,4m$ έως $\Delta \ell_2 = 0,3m$

$3^{\text{η}}$ μετατόπιση: Από $\Delta \ell_2 = 0,3m$ έως $\Delta \ell_3 = 0,2m$

$4^{\text{η}}$ μετατόπιση: Από $\Delta \ell_3 = 0,2m$ έως $\Delta \ell_4 = 0,1m$ και

$5^{\text{η}}$ μετατόπιση: Από $\Delta \ell_4 = 0,1m$ έως $\Delta \ell_5 = 0m$.

Παρατηρούμε ότι μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών της ταχύτητας η παραμόρφωση του ελατηρίου μειώνεται κατά την ίδια ποσότητα $0,1m$.

Άλλωστε: $\Delta \ell_{\nu} - \Delta \ell_{\nu-1} = (0,5 - \nu \cdot 0,1) - (0,5 - (\nu-1) \cdot 0,1) \Rightarrow \Delta \ell_{\nu} - \Delta \ell_{\nu-1} = 0,1m = \text{σταθ.}$

β.2)

$1^{\text{η}}$ μετατόπιση: μήκος $S_1 = \Delta \ell_0 + \Delta \ell_1 = 0,9m$

$2^{\text{η}}$ μετατόπιση: μήκος $S_2 = \Delta \ell_1 + \Delta \ell_2 = 0,7m$

$3^{\text{η}}$ μετατόπιση: μήκος $S_3 = \Delta \ell_2 + \Delta \ell_3 = 0,5m$

$4^{\text{η}}$ μετατόπιση: μήκος $S_4 = \Delta \ell_3 + \Delta \ell_4 = 0,3m$

$5^{\text{η}}$ μετατόπιση: μήκος $S_5 = \Delta \ell_4 + \Delta \ell_5 = 0,1m$

Παρατηρούμε ότι η μείωση του μήκους της τροχιάς για δύο διαδοχικές μετατοπίσεις είναι $\Delta S = 0,2m$

Γενικά το μήκος ν -ιοστής τροχιάς είναι:

$$S_{\nu} = \Delta \ell_{\nu} + \Delta \ell_{\nu-1} = (0,5 - \nu \cdot 0,1) + (0,5 - (\nu-1) \cdot 0,1) \Rightarrow S_{\nu} = 1 - (2\nu-1) \cdot 0,1 \quad (\text{S.I.}) \quad \text{Η}$$

μείωση του μήκους της τροχιάς για δύο διαδοχικές μετατοπίσεις θα είναι

$$\Delta S = S_{\nu-1} - S_{\nu} = [1 - [2(\nu-1) - 1] \cdot 0,1] - [1 - (2\nu-1) \cdot 0,1] \Rightarrow \Delta S = S_{\nu-1} - S_{\nu} = 0,2m = \text{σταθ.}$$

γ) Για μια νιοστή μετατόπιση ο μέσος ρυθμός μείωσης της ενέργειας ελαστικότητας ανά μονάδα μετατόπισης είναι:

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta E_{\varepsilon\lambda,\nu}}{S_{\nu}} &= \frac{\frac{1}{2} K \Delta \ell_{\nu-1}^2 - \frac{1}{2} K \Delta \ell_{\nu}^2}{\Delta \ell_{\nu-1} + \Delta \ell_{\nu}} \Rightarrow \frac{\Delta E_{\varepsilon\lambda,\nu}}{S_{\nu}} = \frac{1}{2} K (\Delta \ell_{\nu-1} - \Delta \ell_{\nu}) \Rightarrow \frac{\Delta E_{\varepsilon\lambda,\nu}}{S_{\nu}} = \frac{1}{2} 100(0,1) \Rightarrow \\
 \frac{\Delta E_{\varepsilon\lambda,\nu}}{S_{\nu}} &= 5 \frac{J}{m} = \text{σταθερό. Άρα η } \gamma\text{-3 πρόταση είναι σωστή.}
 \end{aligned}$$

γ-1) Η μείωση της ενέργειας ελαστικότητας για κάθε μετατόπιση είναι $\Delta E_{ελ,v} = 5S_v$ δηλαδή ανάλογη του μήκους της μετατόπισης μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών της ταχύτητας, έτσι:

1^η μετατόπιση: $\Delta E_{ελ,1} = 5S_1 = 5 \cdot 0,9 = 4,5J$

2^η μετατόπιση: $\Delta E_{ελ,2} = 5S_2 = 5 \cdot 0,7 = 3,5J$

3^η μετατόπιση: $\Delta E_{ελ,3} = 5S_3 = 5 \cdot 0,5 = 2,5J$

4^η μετατόπιση: $\Delta E_{ελ,4} = 5S_4 = 5 \cdot 0,3 = 1,5J$

5^η μετατόπιση: $\Delta E_{ελ,5} = 5S_5 = 5 \cdot 0,1 = 0,5J$

Παρατηρούμε ότι δεν έχουμε σταθερή μείωση της ενέργειας ελαστικότητας για κάθε μετατόπιση μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών της ταχύτητας.

Άρα η **γ-1 πρόταση είναι λανθασμένη**.

γ-2) Το ποσοστό μείωσης για κάθε μετατόπιση είναι

$$\pi\% = \frac{\frac{1}{2}K\Delta\ell_{v-1}^2 - \frac{1}{2}K\Delta\ell_v^2}{\frac{1}{2}K\Delta\ell_{v-1}^2} 100\%. \text{ Και εδώ αν βρούμε τα διαδοχικά ποσοστά}$$

μείωσης αυτά δεν έχουν την ίδια τιμή... και η **γ-2 πρόταση είναι λανθασμένη**.

δ) Το σώμα θα σταματήσει σε εκείνο τον στιγμιαίο μηδενισμό της ταχύτητας, που η δύναμη του ελατηρίου είναι μικρότερη από την μέγιστη στατική τριβή.

$F_{ελ,v} \leq T_{στ,max} \Rightarrow K\Delta\ell_v \leq T_{στ,max} \Rightarrow 100 \cdot (0,5 - v \cdot 0,1) \leq 5 \Rightarrow v \geq 4,5$ και επειδή $v \in \mathbb{Z}^+$ η πρώτη τιμή του v που $F_{ελ,v} \leq T_{στ,max}$ είναι για $v=5$, όπου $\Delta\ell_5 = 0,5 - 5 \cdot 0,1 = 0$ δηλαδή σταματάει στη θέση που το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος, διαγράφοντας πέντε διαδρομές μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών της ταχύτητας.

$$S_{ολ} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 \Rightarrow S_{ολ} = (0,9 + 0,7 + 0,5 + 0,3 + 0,1)m \Rightarrow \boxed{S_{ολ} = 2,5m}$$

Παρατηρείστε, ότι πρόκειται για αριθμητική πρόοδο με λόγο $-0,2m$.

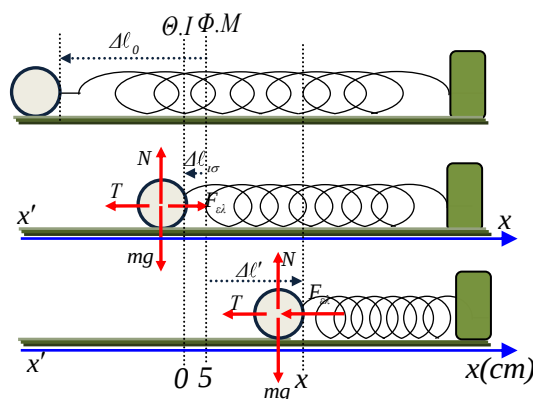
ε) Αν το σώμα εκτελούσε απλή αρμονική ταλάντωση αυτή θα είχε κέντρο ταλάντωσης τη θέση όπου $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow$

$$T = K\Delta\ell_{ισ} \Rightarrow \Delta\ell_{ισ} = \frac{T}{K} \Rightarrow \Delta\ell_{ισ} = 0,05m$$

$\Delta\ell = 5cm$. Για κίνηση προς τα δεξιά η τριβή έχει κατεύθυνση προς τα αριστερά και το κέντρο της ταλάντωσης θα είναι $\Delta\ell = 5cm$ αριστερά του φυσικού μήκους. Αντίθετα για κίνηση του σώματος προς τα αριστερά το κέντρο της ταλάντωσης θα είναι $\Delta\ell = 5cm$ δεξιά του φυσικού μήκους. Ας θεωρήσουμε μια κίνηση προς τα δεξιά και το σώμα σε τυχαία συσπείρωση του ελατηρίου.

$\Sigma \vec{F}_x = \vec{T} + \vec{F}_{ελ} \Rightarrow \Sigma F_x = -T - F_{ελ} \Rightarrow \Sigma F_x = -T - K\Delta\ell'$ και επειδή $T = K\Delta\ell_{ισ}$, $\Delta\ell' = x - \Delta\ell_{ισ}$

παίρνουμε $\Sigma F_x = -K\Delta\ell_{ισ} - K(x - \Delta\ell_{ισ}) \Rightarrow \Sigma F_x = -Kx$ άρα η κίνηση αυτή μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών της ταχύτητας είναι μισή περίοδος απλής αρμονικής ταλάντωσης με σταθερά επαναφοράς $D = K \Rightarrow D = 100N/m$ και



κυκλική συχνότητα $D = m\omega^2 \Rightarrow \omega = 10 \text{ rad/s}$. Κάθε τέτοια μισή ταλάντωση διαρκεί για μισή περίοδο που είναι $t' = \frac{T}{2} = \frac{2\pi}{2\omega} \Rightarrow t' = 0,314 \text{ s}$.

Όλα τα ανωτέρω ισχύουν για κάθε κίνηση μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών της ταχύτητας.

στ) Το πλάτος της «μισής» αυτής ταλάντωσης για την νιοστή διαδρομή θα είναι $A_v = \frac{\Delta \ell_{v-1} + \Delta \ell_v}{2} \Rightarrow A_v = \frac{S_v}{2} \Rightarrow A_v = \frac{1 - (2v-1) \cdot 0,1}{2} \Rightarrow A_v = \frac{1,1-2v}{2}$ (S.I) με $v \in \mathbb{Z}^+$ ή $A_v = \frac{110-20v}{2} \text{ cm}$

1^η ταλάντωση: $v=1$, $A_1 = \frac{110-20 \cdot 1}{2} \text{ cm} \Rightarrow A_1 = 45 \text{ cm}$

2^η ταλάντωση: $v=2$, $A_2 = \frac{110-20 \cdot 2}{2} \text{ cm} \Rightarrow A_2 = 35 \text{ cm}$

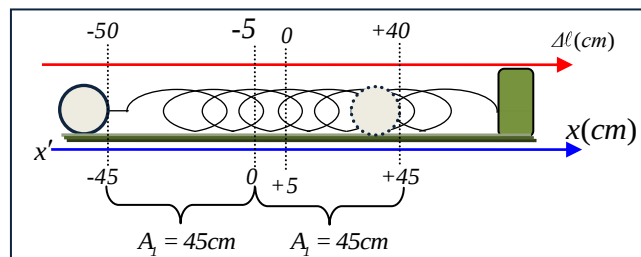
3^η ταλάντωση: $v=3$, $A_3 = \frac{110-20 \cdot 3}{2} \text{ cm} \Rightarrow A_3 = 25 \text{ cm}$

4^η ταλάντωση: $v=4$, $A_4 = \frac{110-20 \cdot 4}{2} \text{ cm} \Rightarrow A_4 = 15 \text{ cm}$

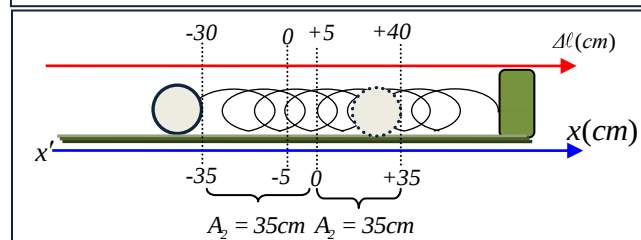
5^η ταλάντωση: $v=5$, $A_5 = \frac{110-20 \cdot 5}{2} \text{ cm} \Rightarrow A_5 = 5 \text{ cm}$

Παρατηρείστε για κάθε διαδρομή το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται κατά το ίδιο ποσό $\Delta A = 10 \text{ cm}$.

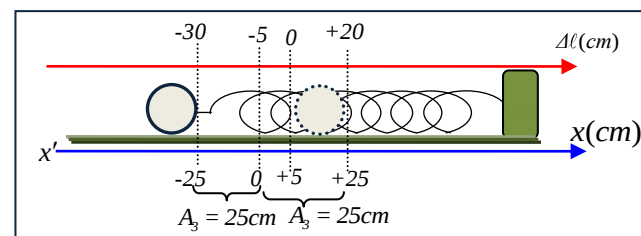
Η πρώτη μισή ταλάντωση:



Η δεύτερη μισή ταλάντωση:



Η τρίτη μισή ταλάντωση:
κ.λ.π



ζ) Ενέργεια ταλάντωσης:

1^η ταλάντωση: $E_1 = \frac{1}{2} D A_1^2 \Rightarrow E_1 = \frac{1}{2} 100 (0,45)^2 \Rightarrow E_1 = 10,125 \text{ J}$

$$2^{\text{η}} \text{ ταλάντωση: } E_2 = \frac{1}{2} DA_2^2 \Rightarrow E_2 = \frac{1}{2} 100(0,35)^2 \Rightarrow E_2 = 6,125J$$

$$3^{\text{η}} \text{ ταλάντωση: } E_3 = \frac{1}{2} DA_3^2 \Rightarrow E_3 = \frac{1}{2} 100(0,25)^2 \Rightarrow E_3 = 3,125J$$

$$4^{\text{η}} \text{ ταλάντωση: } E_4 = \frac{1}{2} DA_4^2 \Rightarrow E_4 = \frac{1}{2} 100(0,15)^2 \Rightarrow E_4 = 1,125J$$

$$5^{\text{η}} \text{ ταλάντωση: } E_5 = \frac{1}{2} DA_5^2 \Rightarrow E_5 = \frac{1}{2} 100(0,05)^2 \Rightarrow E_5 = 0,125J$$

Παρατηρούμε ότι δεν έχουμε μείωση της ενέργειας κατά ίσα ποσά ανά ημιπερίοδο.

η) Ο συνολικός χρόνος κίνησης ισούται με τον χρόνο πέντε όμοιων ημιπεριόδων $t_{oi} = 5t_i \Rightarrow t_{oi} = 5,0,314s \Rightarrow t_{oi} = 1,57s$.

θ) Το σώμα μέχρι τον πρώτο μηδενισμό της ταχύτητας θα εκτελέσει τμήμα απλής αρμονικής ταλάντωσης κινούμενο προς τα δεξιά με κέντρο $0,05m$ αριστερά του φυσικού μήκους του ελατηρίου, διότι εκεί είναι $\Sigma Fx = 0 \Rightarrow T = K\Delta\ell'$...

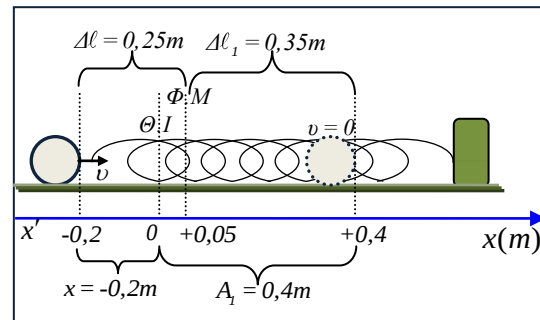
Μόλις αρχίζει η ταλάντωση, ο ταλαντωτής έχει απομάκρυνση $x = -(0,25m - 0,05m) = -0,2m$ και

ταχύτητα ταλάντωσης $v = +2\sqrt{3}m/s$.

Το πλάτος της ταλάντωσης A_1 προσδιορίζεται ενεργειακά,

$$\frac{1}{2} Dx^2 + \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} DA_1^2 \xrightarrow{D=K}$$

$$A_1 = \sqrt{x^2 + \frac{mv^2}{K}} \Rightarrow A_1 = 0,40m.$$



Η εξίσωση ταλάντωσης από την $t_0 = 0$ μέχρι τον πρώτο μηδενισμό της ταχύτητας είναι $x = A_1 \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow x = 0,4\eta\mu(10t + \varphi_0)$ και επειδή την $t_0 = 0$,

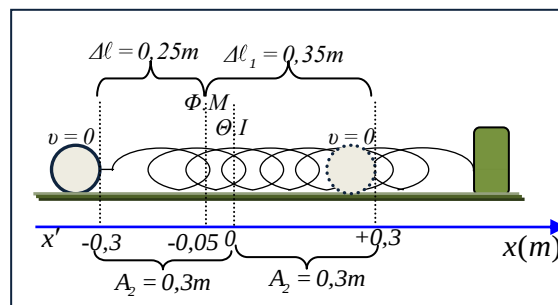
έχουμε $x = -0,2m$ και $v > 0$ βρίσκουμε $\varphi_0 = \frac{11\pi}{6} rad$, άρα $x = 0,4\eta\mu(10t + \frac{11\pi}{6})$

(S.I). Ο χρόνος κίνησης από την στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τον πρώτο μηδενισμό της ταχύτητας βρίσκεται αν στην ανωτέρω εξίσωση θέσουμε $x = +0,4m$, οπότε $\eta\mu(10t_1 + \frac{11\pi}{6}) = +1 \Rightarrow 10t_1 + \frac{11\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ και για πρώτη φορά $k=1$...

$$10t_1 = \frac{5\pi}{2} - \frac{11\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow t_1 = \frac{2\pi}{30}.$$

Μετά τον πρώτο μηδενισμό της ταχύτητας θα εκτελέσει νέο τμήμα απλής αρμονικής ταλάντωσης κινούμενο προς τα αριστερά με κέντρο $0,05m$ δεξιά τώρα του φυσικού μήκους του ελατηρίου, διότι εκεί είναι $\Sigma Fx = 0 \Rightarrow T = K\Delta\ell'$.

Μόλις αρχίζει η ταλάντωση, ο ταλαντωτής έχει παραμόρφωση $\Delta\ell_1 = 0,35m$, απομάκρυνση από την νέο κέντρο ταλάντωσης $x = +(0,35m - 0,05m) = +0,30m$ και ταχύτητα ταλάντωσης $v = 0$.



Προφανώς τώρα η θέση αυτή είναι η ακραία θέση και συνεπώς το πλάτος της ταλάντωσης είναι $A_2 = 0,30m$. Ο χρόνος τώρα μέχρι τον μηδενισμό της ταχύτητας είναι μισή περίοδος

$$t_2 = \frac{T}{2} = \frac{2\pi}{2\omega} \Rightarrow t_2 = \frac{\pi}{10}s \Rightarrow t_2 = \frac{3\pi}{30}s.$$

Χρόνος κίνησης: $t = t_1 + t_2 \Rightarrow t = \frac{5\pi}{30}s$.

Συνολικό διάστημα κίνησης : $S = 0,20 + 0,40 + 0,30 \cdot 2 \Rightarrow S_{ολ} = 1,20m$.