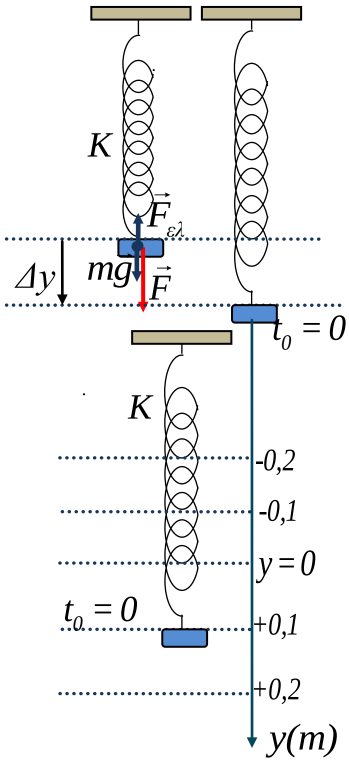
1.55 Στην περίπτωση αυτή επειδή η δύναμη $\vec{F}$ που δρα στον ταλαντωτή είναι η μόνη μη συντηρητική δύναμη, είναι μόνο αυτή που μέσω του έργου της προσφέρει ενέργεια στον ταλαντωτή. **Επειδή στην έναρξη δράσης της $\vec{F}$ ο ταλαντωτής δεν είχε ενέργεια, η ενέργεια του ταλαντωτή είναι η αυτή που του προσφέρεται μέσω του έργου της $\vec{F}$.**



$$E_{προσ} = E_{ταλ} \Rightarrow W_F = \frac{1}{2}DA^2 \xrightarrow{D=K}$$

$$FΔy = \frac{1}{2}KA^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2FΔy}{K}} \Rightarrow \boxed{A = 0{,}2m}.$$

Η ταλάντωση γίνεται με πλάτος $A = 0{,}2m$ που εξαρτάται από το έργο της δύναμης F και κυκλική συχνότητα που είναι ίδιο χαρακτηριστικό του ταλαντωτή … $D = K = mω^2 \Rightarrow ω = 10rad/s$.

Εξίσωση απομάκρυνσης

$$y = Aημ(ωt + φ_0) \Rightarrow y = 0{,}2ημ(10t + φ_0)$$

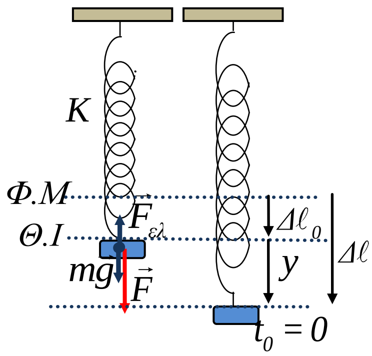
$$\xrightarrow[y=+0{,}1m \; και \; υ>0]{t=0} +0{,}1 = 0{,}2ημφ_0 \Rightarrow$$

$$ημφ_0 = 1/2 \Rightarrow φ_0 = \frac{π}{6}rad \text{ ή}$$

$φ_0 = \frac{5π}{6}rad$. Δεκτή η $φ_0 = \frac{π}{6}rad$ διότι αυτή την t=0 δίνει θετική ταχύτητα.

Άρα $y = 0{,}2ημ(10t + \frac{π}{6})$ και $υ = 2συν(10t + \frac{π}{6})$

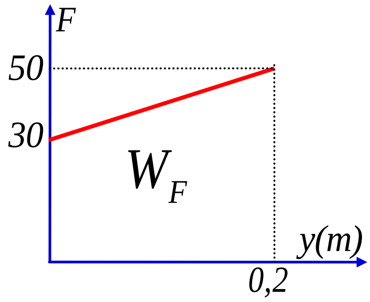
1.56 Το έργο της F υπολογίζεται από τη γραφική παράσταση της δύναμης με την μετατόπισή της y που εδώ γίνεται από τη θέση ισορροπίας του ταλαντωτή. Στη θέση αυτή το ελατήριο είναι παραμορφωμένο κατά $Δ\ell_0$, $ΣFy = 0 \Rightarrow$



$mg = KΔ\ell_0 \Rightarrow Δ\ell_0 = 0{,}1m$.

Η παραμόρφωση του ελατηρίου και η μετατόπιση y του σημείου εφαρμογής της δύναμης συνδέονται με τη σχέση $Δ\ell = Δ\ell_0 + y \Rightarrow Δ\ell = 0{,}1 + y$. Έτσι η σχέση της δύναμης με την μετατόπιση y δίνεται από τη σχέση $F = 20 + 100(0{,}1 + y) \Rightarrow F = 30 + 100y$ και η γραφική της παράσταση φαίνεται στο σχήμα. Το έργο της F για το διάστημα δράσης της είναι,

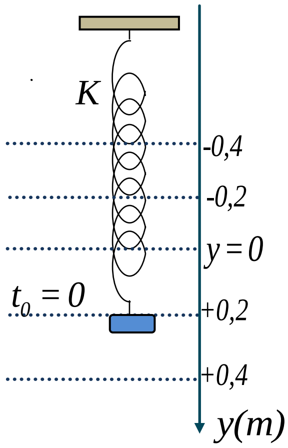
$$W_F = \frac{30+50}{2}0,2 \Rightarrow W_F = 8J \ .$$



Και εδώ για τον ίδιο λόγο που αναφέρθηκε στην περίπτωση (1) η ενέργεια ταλάντωσης ισούται με το έργο της δύναμης F.

$$W_F = \frac{1}{2}DA^2 \xrightarrow{D=K} A = \sqrt{\frac{2W_F}{K}} \Rightarrow$$

$\boxed{A = 0,2\sqrt{2}m}$.



Η ταλάντωση γίνεται με πλάτος $A = 0,4m$ που εξαρτάται από το έργο της δύναμης F ενώ η κυκλική συχνότητα είναι ίδιο χαρακτηριστικό του ταλαντωτή και έχει τιμή …

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \Rightarrow \omega = 10rad/s.$$

Εξίσωση απομάκρυνσης

$$y = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow y = 0,2\sqrt{2}\eta\mu(10t + \varphi_0)$$

$$\xrightarrow[y=+0,2m \ \kappa\alpha\iota \ \upsilon>0]{t=0} +0,2 = 0,2\sqrt{2}\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow$$

$$\eta\mu\varphi_0 = \sqrt{2}/2 \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{4}rad \ \text{ή}$$

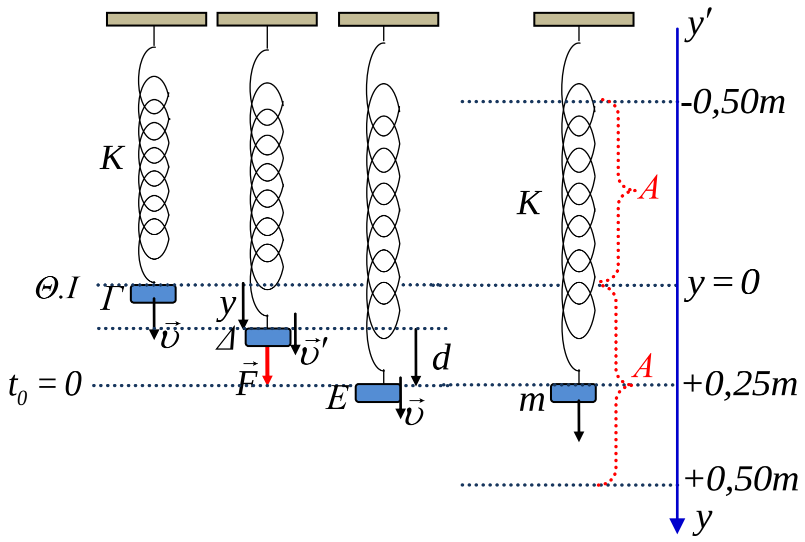
$\varphi_0 = \frac{3\pi}{4}rad$. Δεκτή η $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}rad$ διότι αυτή την t=0 δίνει θετική ταχύτητα.

Άρα $y = 0,2\sqrt{2}\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{4}\right)$ και $\upsilon = 2\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\left(10t + \frac{\pi}{4}\right)$ (S.I).

1.57 Αρχικά η ταχύτητα που δίνουμε στο σώμα, ενώ αυτό ηρεμεί στη θέση Γ, είναι η μέγιστη ταχύτητα και το σώμα εκτελεί ταλάντωση με $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \Rightarrow$

$\omega = \sqrt{\frac{100N/m}{0,25Kg}} \Rightarrow \omega = 20rad/s$ και πλάτος A_1.

$\upsilon = \upsilon_{max} = \omega A_1 \Rightarrow A_1 = \frac{\upsilon_{max}}{\omega} \Rightarrow A_1 = \frac{6m/s}{20rad/s} \Rightarrow A_1 = 0,3m$. Όταν ο ταλαντωτής έχει απομάκρυνση $y = 0,09m$ και ταχύτητα υ' (σημείο Δ) εφαρμόζεται δύναμη από το ηλεκτρικό πεδίο $F = 50N$ για μετατόπιση μόνο κατά $d = 0,16m$.



Η δύναμη αυτή προσφέρει ενέργεια στον ταλαντωτή όσο το έργο της $W_F = Fd \Rightarrow W_F = 50N.0{,}16m \Rightarrow W_F = 8J$. Η ενέργεια που έχει ο ταλαντωτής μετά την κατάργηση της δύναμη F είναι όση είχε αρχικά αυξημένη κατά το έργο $W_F = 8J$ (προσοχή δεν αλλάζει το κέντρο και η σταθερά της ταλάντωσης)… $E_{ταλ} = E_{αρχική} + W_F \Rightarrow$

$$\frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}Dy^2 + \frac{1}{2}m\upsilon'^2 + W_F \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}DA_1^2 + W_F \Rightarrow A = \sqrt{A_1^2 + \frac{2W_F}{K}}$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{0{,}09^2 + \frac{2.8}{100}} \Rightarrow \boxed{A = 0{,}50m}$$

Τη στιγμή έναρξης $t_0 = 0$ της τελικής ταλάντωσης (θέση Ε) ο ταλαντωτής έχει απομάκρυνση $y = 0{,}09m + 0{,}16m = 0{,}25m$ και θετική ταχύτητα ταλάντωσης για το σύστημα αναφοράς που φαίνεται στο σχήμα.

Εξίσωση απομάκρυνσης $y = Aημ(ωt + φ_0) \Rightarrow y = 0{,}5ημ(20t + φ_0)$

$$\xrightarrow[y=+0{,}25m\ και\ \upsilon>0]{t=0} +0{,}25 = 0{,}5ημφ_0 \Rightarrow ημφ_0 = 1/2 \Rightarrow φ_0 = \frac{π}{6}rad$$ ή

$φ_0 = \frac{5π}{6}rad$. Δεκτή η $φ_0 = \frac{π}{6}rad$ διότι αυτή την t=0 δίνει θετική ταχύτητα.

Άρα $y = 0{,}5ημ(20t + \frac{π}{6})$ και $\upsilon = 10συν(20t + \frac{π}{6})$ (S.I).

… και για όποιον θέλει να ταλαιπωρείται με το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας… ας το εφαρμόσουμε από το Δ έως το Ε όπου το σώμα έχει ταχύτητα υ, απομάκρυνση $y + d$ και ενέργεια της νέας ταλάντωσης που τότε αρχίζει $E = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}K(y + d)^2$ ….

$$\underset{\Delta\to E}{\Delta K} = W_F + W_B + W_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{1}{2}m\upsilon'^2 = W_F + W_B + W_{\varepsilon\lambda}$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{1}{2}m\upsilon'^2 = Fd + mgd + \frac{1}{2}K(\Delta\ell_0 + y)^2 - \frac{1}{2}K(\Delta\ell_0 + y + d)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{1}{2}m\upsilon'^2 = Fd + mgd - \frac{1}{2}Kd(2\Delta\ell_0 + 2y + d) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{1}{2}m\upsilon'^2 = Fd + mgd - \frac{1}{2}Kd(2\frac{mg}{K} + 2y + d) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{1}{2}m\upsilon'^2 = Fd + \cancel{mgd} - \cancel{mgd} - Kd.y - \frac{1}{2}Kd^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 - \left(\frac{1}{2}KA_1^2 - \frac{1}{2}Ky^2\right) = Fd - Kd.y - \frac{1}{2}Kd^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 = Fd + \frac{1}{2}KA_1^2 - \frac{1}{2}Ky^2 - Kd.y - \frac{1}{2}Kd^2 \Rightarrow$$

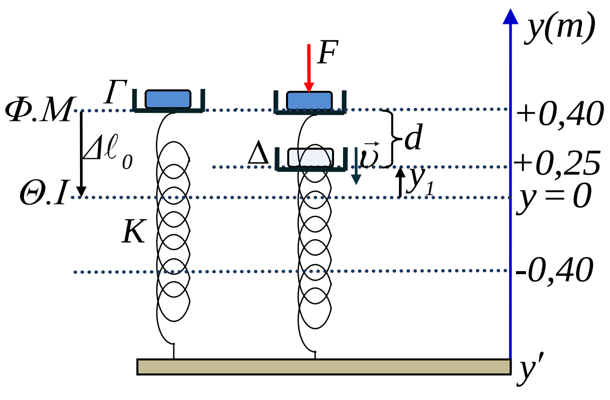
$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 = Fd + \frac{1}{2}KA_1^2 - \frac{1}{2}K(y^2 + 2d.y + d^2) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}K(y+d)^2 = Fd + \frac{1}{2}KA_1^2 \Rightarrow E_{\tau\alpha\lambda\acute{\alpha}\nu\tau\omega\sigma\eta\varsigma} = Fd + \frac{1}{2}KA_1^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}KA^2 = Fd + \frac{1}{2}KA_1^2 \Rightarrow A = \sqrt{A_1^2 + \frac{2Fd}{K}}$$

(… το γνωστό «ΘΜΚΕ» που έχουμε ζαλίσει τα κεφάλια των μαθητών και το εφαρμόζουν και αυτοί και εμείς … μόνο μηχανικά …).

1.58 Το σώμα Σ θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση γύρω από τη θέση ισορροπίας του, που είναι πιο κάτω από το φυσικό μήκος του ελατηρίου κατά $\Delta\ell_0 = \frac{mg}{K} \Rightarrow$ $\Delta\ell_0 = 0,4m$. Επειδή μόλις αφήνεται στο σημείο Γ δεν έχει ταχύτητα, αυτή θα είναι η ακραία θέση της αρχικής ταλάντωσης και η απόστασή της από τη θέση ισορροπίας θα είναι το πλάτος, άρα $A_1 = 0,4m$. Η ενέργεια της αρχικής ταλάντωσης είναι $E_1 = \frac{1}{2}DA_1^2 \xrightarrow[A_1=0,4m]{D=K=100N/m} E_1 = 8J$.



Η ενέργεια της νέας ταλάντωσης μετά την κατάργηση της δύναμης ισούται με την ενέργεια που είχε αρχικά ο ταλαντωτής $E_1 = 8J$ και όση του προσφέρθηκε μέσω του έργου της F. Για να βρούμε όμως το έργο της F πρέπει να βρούμε για πόση μετατόπιση d έδρασε… $W_F = Fd$ …

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας από το Γ έως το Δ όπου το σώμα έχει αποκτήσει ταχύτητα $\upsilon = \frac{5\sqrt{3}}{4} m/s$ και έχει απομάκρυνση y_1 από την θέση ισορροπίας η οποία δεν αλλάζει.

$$\underset{\Gamma\to\Delta}{\Delta K} = W_F + W_B + W_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 - 0 = W_F + W_B + W_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 = Fd + mgd - \frac{1}{2}Kd^2 \Rightarrow \frac{1}{2}4\left(\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)^2 = 30d + 40d - \frac{1}{2}100d^2 \Rightarrow$$

$\frac{75}{8} = 70d - 50d^2 \Rightarrow 400d^2 - 560d + 75 = 0$ …η λύση αυτής δίνει $d = 0{,}15m$ και $y_1 = 0{,}40 - 015 = 0{,}25m$.

$$\underset{\tau\alpha\lambda\acute{\alpha}\nu\tau\omega\sigma\eta\varsigma}{E} = \underset{\substack{\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{\eta}\varsigma\\ \tau\alpha\lambda\acute{\alpha}\nu\tau\omega\sigma\eta\varsigma}}{E_1} + W_F \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = E_1 + Fd \Rightarrow \frac{1}{2}100A^2 = 8 + 30.0{,}15$$

$$\Rightarrow \boxed{A = 0{,}50m}$$

και λίγο διαφορετικά….

$$\underset{\substack{\text{Ενέργεια την}\\ \text{t0=0 στην αρχή}\\ \text{της ταλάντωσης}}}{E} = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}Dy_1^2 = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow A = \sqrt{y_1^2 + \frac{m\upsilon^2}{D}}$$

$$\Rightarrow \ldots\ A = 0{,}50m.$$

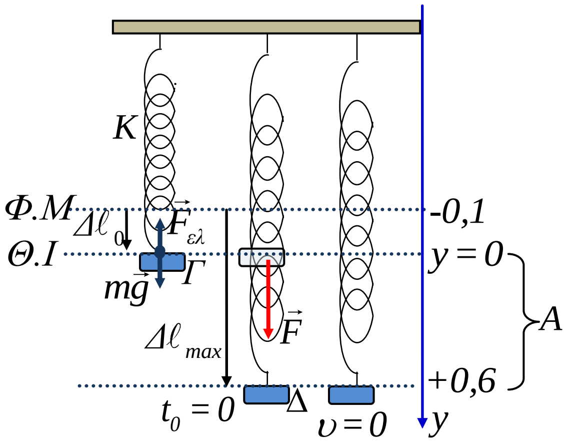
Τη στιγμή έναρξης $t_0 = 0$ της τελικής ταλάντωσης (θέση Δ) ο ταλαντωτής έχει απομάκρυνση $y_1 = +0{,}25m,$ και αρνητική ταχύτητα ταλάντωσης για το σύστημα αναφοράς που φαίνεται στο σχήμα … και $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \Rightarrow \omega = 5rad/s$.

Εξίσωση απομάκρυνσης $y = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow y = 0{,}5\eta\mu(5t + \varphi_0)$

$$\xrightarrow[y=+0{,}25m\ \kappa\alpha\iota\ \upsilon>0]{t=0} +0{,}25 = 0{,}5\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = 1/2 \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{6}rad \quad \acute{\eta}$$

$\varphi_0 = \frac{5\pi}{6}rad$. Δεκτή η $\varphi_0 = \frac{5\pi}{6}rad$ διότι αυτή την t=0 δίνει αρνητική ταχύτητα. Άρα $y = 0{,}5\eta\mu(5t + \frac{5\pi}{6})$ και $\upsilon = 2{,}5\sigma\upsilon\nu(5t + \frac{5\pi}{6})$ (S.I).

1.59 Το σώμα Σ αρχικά ηρεμεί στη θέση ισορροπίας του που είναι πιο κάτω από το φυσικό μήκος κατά $\Delta\ell_0 = \dfrac{mg}{K} \Rightarrow \Delta\ell_0 = 0{,}1m$. Η μέγιστη δυνατή επιμήκυνση του ελατηρίου είναι εκεί που δεν μπορεί να το πάει άλλο κάτω, εκεί που η ταχύτητα μηδενίζεται, θέση Δ.



Σχόλιο: Το σώμα Σ με την δράση της $F = 30N$ αρχικά από το Γ έως ένα σημείο που $\Sigma F = 0 \Rightarrow$ $mg + F = K\Delta\ell_1 \Rightarrow \Delta\ell_1 = 0{,}4m$ κάνει επιταχυνόμενη κίνηση και από εκεί και μετά μέχρι το Δ επιβραδυνόμενη όπου και μηδενίζεται η ταχύτητα.
Επειδή στο σημείο Δ δεν έχει ταχύτητα και η δύναμη καταργείται η θέση αυτή είναι η ακραία θέση της ταλάντωσης με κέντρο το σημείο Γ. Άρα το πλάτος της ταλάντωσης είναι η απόσταση ΓΔ. **Επειδή στην έναρξη δράσης της $\vec{F}$ ο ταλαντωτής δεν είχε ενέργεια, η ενέργεια του ταλαντωτή είναι η αυτή που του προσφέρεται μέσω του έργου της $\vec{F}$..** και επειδή το διάστημα δράσης της $\vec{F}$ είναι το $(\Gamma\Delta) = A$ έχουμε:

$$E_{προσ} = E_{ταλ} \Rightarrow W_F = \frac{1}{2}DA^2 \xrightarrow{D=K} FA = \frac{1}{2}KA^2 \Rightarrow A = \frac{2F}{K} \Rightarrow \boxed{A = 0{,}6m}.$$

Τη στιγμή έναρξης $t_0 = 0$ της τελικής ταλάντωσης (θέση Δ) ο ταλαντωτής έχει απομάκρυνση $y_1 = +0{,}6m$ και μηδενική ταχύτητα ταλάντωσης για το σύστημα αναφοράς που φαίνεται στο σχήμα… και $\omega = \sqrt{\dfrac{K}{m}} \Rightarrow \omega = 10rad/s$.

Εξίσωση απομάκρυνσης $y = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow y = 0{,}6\eta\mu(10t + \varphi_0)$

$$\xrightarrow[y=+0{,}6m\ \kappa\alpha\iota\ \upsilon=0]{t=0} +0{,}6 = 0{,}6\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = 1 \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2}rad$$

Άρα $y = 0{,}6\eta\mu(10t + \dfrac{\pi}{2})$ και $\upsilon = 6\sigma\upsilon\nu(10t + \dfrac{\pi}{2})$ (S.I).

… και για όποιον θέλει να ταλαιπωρείται με το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργεια … ας υπολογίσουμε το $\Delta\ell_{max}$.Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας από το Γ έως το Δ όπου έχει το ελατήριο έχει την μέγιστη επιμήκυνση (το σώμα έχει ταχύτητα $\upsilon = 0$ και στα δύο αυτά σημεία) .

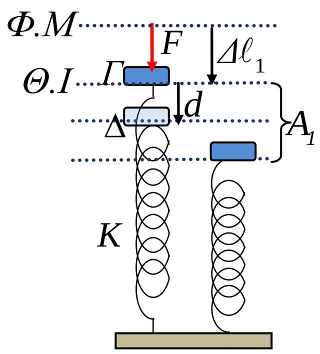
$$\underset{\Gamma\to\Delta}{\Delta K} = W_F + W_B + W_{ελ} \Rightarrow 0 - 0 = W_F + W_B + W_{ελ}$$

$$0 = F(\Delta\ell_{max} - \Delta\ell_0) + mg(\Delta\ell_{max} - \Delta\ell_0) + \frac{1}{2}K\Delta\ell_0^2 - \frac{1}{2}K\Delta\ell_{max}^2 \Rightarrow$$

$$0 = 30(\Delta\ell_{max} - 0{,}1) + 10(\Delta\ell_{max} - 0{,}1) + \frac{1}{2}100.0{,}1^2 - \frac{1}{2}100\Delta\ell_{max}^2 \Rightarrow$$

$50\Delta\ell_{max}^2 - 40\Delta\ell_{max} + 3{,}5 = 0$ η λύση αυτής δίνει $\Delta\ell_{max} = 0{,}7m$ και $\Delta\ell_{max} = 0{,}1m$ (απορρίπτεται) … και πλάτος $A = \Delta\ell_{max} - \Delta\ell_0 \Rightarrow A = 0{,}6m$.

1.60 α) Το πλάτος της αρχικής ταλάντωσης μετά την δράση του ηλεκτρικού είναι $E_{προσ} = E_{ταλ} \Rightarrow$

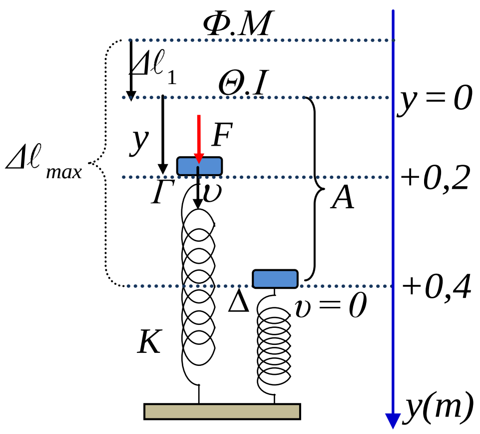


$$W_F = \frac{1}{2}DA^2 \xrightarrow{D=K} Fd = \frac{1}{2}KA_1^2 \Rightarrow A_1 = \sqrt{\frac{2Fd}{K}}$$

$$\Rightarrow A_1 = \sqrt{\frac{2.17{,}5}{100}\frac{9}{35}} \Rightarrow A_1 = 0{,}3m$$

Η ταλάντωση γίνεται γύρω από ένα κέντρο που είναι κάτω από το φυσικό μήκος του ελατηρίου κατά $mg = K\Delta\ell_1 \Rightarrow \Delta\ell_1 = 0{,}1m$

β) Τώρα όταν ο ταλαντωτής είναι σε απομάκρυνση $y = \Delta\ell - \Delta\ell_1 \Rightarrow y = 0{,}2m$ έχοντας ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ και ενέργεια $E = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}Dy^2 = \frac{1}{2}DA_1^2$ δέχεται την δύναμη του ηλεκτρικού πεδίου μέχρι την μέγιστη επιμήκυνση του ελατηρίου όπου η ταχύτητα είναι μηδέν (δες προηγούμενη περίπτωση). Αφού η ταχύτητα εκεί που καταργείται το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδέν, αυτή είναι η ακραία θετική θέση της ταλάντωσης που ακολουθεί και η απόστασή της από τη θέση ισορροπίας ισούται με το πλάτος A της ταλάντωσης.



$$\underset{\substack{ταλάντωσης\\αρχική}}{E} + \underset{\substack{προσφερόμενη\\ενέργεια\ από\ το\\πεδίο}}{E} = \underset{\substack{Ενέργεια\\τελικού\\ταλαντωτή}}{E} \Rightarrow \frac{1}{2}DA_1^2 + W_F = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}DA_1^2 + F(A - y) = \frac{1}{2}DA^2 \xrightarrow{D=K} \frac{1}{2}100.0{,}3^2 + 17{,}5(A - 0{,}2) = \frac{1}{2}100A^2$$

$$\Rightarrow 9 + 35A - 7 = 100A^2 \Rightarrow 100A^2 - 35A - 2 = 0 \Rightarrow A^2 - 0{,}35A - 0{,}02 = 0$$

Οι λύσεις αυτής είναι $A = 0{,}4m$ και $A = -0{,}05m$ (απορρίπτεται).

Τη στιγμή έναρξης $t_0 = 0$ της τελικής ταλάντωσης (θέση Γ) ο ταλαντωτής έχει απομάκρυνση $y_1 = +0{,}2m$ και θετική ταχύτητα ταλάντωσης για το σύστημα αναφοράς που φαίνεται στο σχήμα… και $\omega = \sqrt{\dfrac{K}{m}} \Rightarrow \omega = 10rad/s$.

Εξίσωση απομάκρυνσης $y = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow y = 0{,}4\eta\mu(10t + \varphi_0)$

$\xrightarrow[y=+0,2m \;\kappa\alpha\iota\; \upsilon>0]{t=0} +0{,}2 = 0{,}4\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = 1/2 \Rightarrow \varphi_0 = \dfrac{\pi}{6}rad$ ή

$\varphi_0 = \dfrac{5\pi}{6}rad$. Δεκτή η $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{6}rad$ διότι αυτή την t=0 δίνει θετική ταχύτητα.

Άρα $y = 0{,}4\eta\mu(10t + \dfrac{\pi}{6})$ και $\upsilon = 4\sigma\upsilon\nu(10t + \dfrac{\pi}{6})$ (S.I).

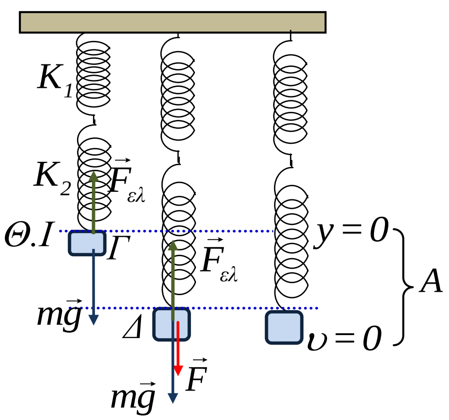
1.61 Το θέμα αυτό είναι εντελώς διαφορετικό από τα προηγούμενα … η δύναμη $\vec{F}$ είναι η απαιτούμενη μόνο για την ηρεμία του σώματος στην συγκεκριμένη θέση … και η τιμή της $F = 15N$ είναι μόνο για να κρατάει σε ακινησία το σώμα στη θέση αυτή. Τώρα με ποια τιμή δύναμης φέραμε το σώμα από το Γ στο Δ δεν γνωρίζουμε…

Δύο παρατηρήσεις για τα ελατήρια σειράς:

1.Ελατήρια σειράς με σταθερές K_1, K_2, …, K_2 ισοδυναμούν με ένα ελατήριο σταθεράς K τέτοιο ώστε $\dfrac{1}{K} = \dfrac{1}{K_1} + \dfrac{1}{K_2} + \ldots + \dfrac{1}{K_N}$ και αν τα ελατήρια είναι δύο η σταθερά του ισοδύναμου ελατηρίου είναι $K = \dfrac{K_1K_2}{K_1 + K_2}$.

2. Όταν στο άκρο ενός συστήματος ελατηρίων σειράς ασκήσουμε μια δύναμη $\vec{F}$ τότε όλα τα ελατήρια παραμορφώνονται με την ίδια δύναμη $\vec{F}$. $g = 10ms^{-2}$

(βλέπε το 1^o βιβλίο μου σελίδες 143-148).



α) Η σταθερά του ισοδύναμου ελατηρίου της άσκησης είναι $K = \dfrac{K_1K_2}{K_1 + K_2} \Rightarrow$

$$K = \frac{100.3000}{100 + 300}$$

$\Rightarrow K = 75N/m$.

Το σώμα όταν αφεθεί ελεύθερο θα κάνει ταλάντωση γύρω από τη θέση ισορροπίας του (σημείο Γ) που το σύστημα των ελατηρίων έχει συνολική επιμήκυνση

$$\Delta\ell_0 = \frac{Mg}{K} \Rightarrow \Delta\ell_0 = \frac{3Kg.10m/s^2}{75N/m}$$

$\Rightarrow \Delta\ell_0 = 0,4m$.Στη θέση Δ η συνολική επιμήκυνση του συστήματος των δύο ελατηρίων είναι $\Delta\ell$ η οποία υπολογίζεται από σχέση ισορροπίας για τη θέση αυτή.
$\Sigma F = 0 \Rightarrow mg + F - K.\Delta\ell = 0 \Rightarrow 30 + 15 - 75.\Delta\ell = 0 \Rightarrow \Delta\ell = 0,6m$.
Μόλις καταργούμε την δύναμη F (θέση Δ) το σώμα έχει ταχύτητα μηδέν και απέχει από την θέση ισορροπίας Γ, απόσταση $d = \Delta\ell - \Delta\ell_0 \Rightarrow d = 0,2m$ που προφανώς είναι το πλάτος της ταλάντωσης … $\boxed{A = 0,2m}$

β) $D = K = m\omega^2 \Rightarrow \omega = 5rad/s$ …
$y = 0,2\eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)$(S.I) και $\upsilon = 1\sigma\upsilon\nu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)$(S.I).

γ) Όταν $\upsilon = 0,8m/s \Rightarrow 0,8 = \sigma\upsilon\nu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow ... \eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) = \pm 0,6$ και $y = 0,2.(\pm 0,6) \Rightarrow y = \pm 0,12m$ … οπότε η συνολική παραμόρφωση του συστήματος των ελατηρίων είναι $\Delta\ell = \Delta\ell_0 \pm 0,12 \Rightarrow \Delta\ell = 0,40 \pm 0,12 \Rightarrow$
$\Delta\ell = 0,52m$ ή $\Delta\ell = 0,28m$.
1η περίπτωση: $\Delta\ell = 0,52m$, οπότε για το ισοδύναμο ελατήριο $F_{\varepsilon\lambda} = 75.0,52 = 39N$

1ο ελατήριο : $\Delta\ell_1 = \frac{F}{K_1} = \frac{39}{100} = 0,39m$,

2ο ελατήριο : $\Delta\ell_2 = \frac{F}{K_2} = \frac{39}{300} = 0,13m$,

2η περίπτωση: $\Delta\ell = 0,28m$, οπότε για το ισοδύναμο ελατήριο $F_{\varepsilon\lambda} = 75.0,28 = 21N$

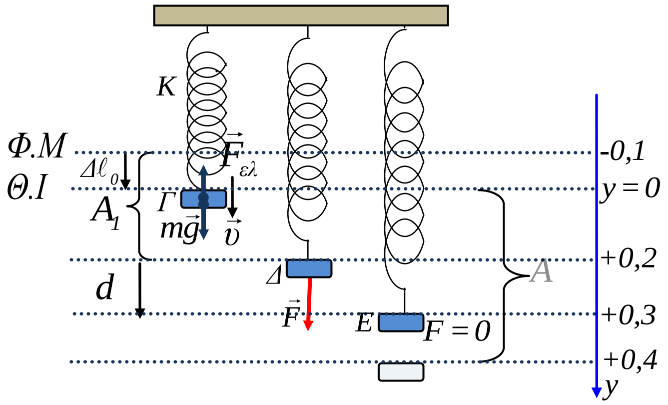
1ο ελατήριο : $\Delta\ell_1 = \frac{F}{K_1} = \frac{21}{100} = 0,21m$,

2ο ελατήριο : $\Delta\ell_2 = \frac{F}{K_2} = \frac{21}{300} = 0,07m$.

1.62 Το σώμα αρχικά ηρεμεί στη θέση όπου το ελατήριο είναι συσπειρωμένο κατά
$\Delta\ell_0 = \frac{mg}{K} \Rightarrow \Delta\ell_0 = 0,1m$.Μετά την απόκτηση της ταχύτητας $\upsilon = 2m/s$ (που είναι η μέγιστη) θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση γύρω από την προηγούμενη θέση ισορροπίας με $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = 10\frac{rad}{s}$ και πλάτος $\upsilon = \omega A_1 \Rightarrow$

$A_1 = 0{,}2m$. Ο χρόνος $\Delta t = \frac{\pi}{20}s$ αντιστοιχεί σε $\frac{\Delta t}{T} = \frac{\pi / 20}{2\pi / 10} = \frac{1}{4} \Rightarrow \Delta t = \frac{T}{4}$

, άρα το σώμα τη στιγμή δράσης της $\vec{F}$ το σώμα είναι στην ακραία κάτω θέση Δ (έστω θετική) με $y = +0{,}2m$, $\Delta\ell = 0{,}3m$ και $\upsilon = 0$.



Αν η $\vec{F}$ την στιγμή έναρξης της δράσης της έχει τέτοια τιμή ώστε $\Sigma\vec{F}y = 0 \Rightarrow$

$mg + F - K.\Delta\ell = 0 \Rightarrow$

$10 + F - 100.0{,}3 = 0 \Rightarrow$

$F = 20N$ το σώμα θα μείνει ακίνητο στο σημείο Δ (!).

Αν $F > 20N$ το σώμα κατέρχεται, οπότε το έργο της είναι θετικό $W_F = +Fd$ και προσφέρει ισόποση ενέργεια στο σύστημα.

Αν $F < 20N$ το σώμα ανέρχεται, οπότε το έργο της είναι αρνητικό $W_F = -Fd$ και αφαιρεί ισόποση ενέργεια από το σύστημα.

α) Αν $F = 60N$, $W_F = +F.d \Rightarrow W_F = 60N.0{,}1m \Rightarrow W_F = 6J$

$$\underset{\substack{ταλάντωσης\\αρχική}}{E} + \underset{\substack{προσφερόμενη\\ενέργεια\ από\ το\\πεδίο}}{E} = \underset{\substack{Ενέργεια\\τελικού\\ταλαντωτή}}{E} \Rightarrow \frac{1}{2}DA_1^2 + W_F = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}100.0{,}2^2 + 6 = \frac{1}{2}100A^2 \Rightarrow \boxed{A = 0{,}4m}$$

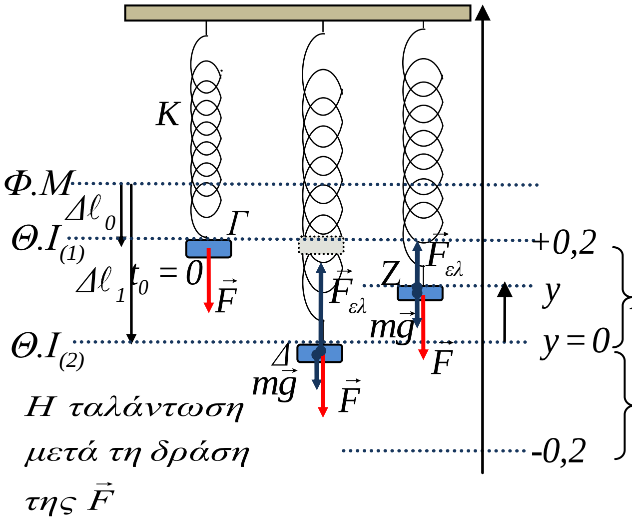
β) Αν $F = 10N$, $W_F = -F.d \Rightarrow W_F = -10N.0{,}1m \Rightarrow W_F = -1J$

$$\underset{\substack{ταλάντωσης\\αρχική}}{E} - \underset{\substack{ενέργεια\ που\\αφαιρείται}}{E} = \underset{\substack{Ενέργεια\\τελικού\\ταλαντωτή}}{E} \Rightarrow \frac{1}{2}DA_1^2 - |W_F| = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}100.0{,}2^2 - 1 = \frac{1}{2}100A^2 \Rightarrow \boxed{A = 0{,}1\sqrt{2}m}$$

1.63 **α)** Αρχικά ο ταλαντωτής ηρεμεί στη θέση Γ που είναι κάτω από τη θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου κατά $\Delta\ell_0$ και ισχύει $\Sigma Fy = 0 \Rightarrow$ $mg = F_{ελ} \Rightarrow mg = K\Delta\ell_0 \Rightarrow \Delta\ell_0 = 0{,}1m$. Μόλις αρχίζει η δράση της δύναμης το κέντρο της ταλάντωσης είναι κατά $\Delta\ell_1$ κάτω από το φυσικό μήκος του ελατηρίου (σημείο Δ), όπου $\Sigma\vec{F}y = 0 \Rightarrow mg + F - F_{ελ} = 0$

$\Rightarrow K\Delta\ell_1 = F + Mg$ (1) $\Rightarrow \Delta\ell_1 = \frac{F + Mg}{K} \Rightarrow \Delta\ell_1 = 0{,}3m$. Επιλέγουμε άξονα ταλάντωσης $y'y$ με φορά προς τα πάνω και με αρχή $y=0$ προφανώς το νέο κέντρο ταλάντωσης. Μόλις αρχίζει η δράση της $\vec{F}$ (θέση Γ, στιγμή $t_0=0$) ο ταλαντωτής έχει μηδενική ταχύτητα και απομάκρυνση $y=+0,2m$. Επειδή στη θέση αυτή δεν έχει ταχύτητα αυτή είναι η ακραία θέση της ταλάντωσης και η απόστασή της (ΓΔ) από τη νέα θέση ισορροπίας είναι το πλάτος της ταλάντωσης $A=0,2m$. Για να αποδείξουμε ότι ο ταλαντωτής εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση θεωρούμε αυτόν σε τυχαία θέση Ζ και τοποθετούμε τις ασκούμενε δυνάμεις για τις οποίες ισχύει: $\Sigma\vec{F}y=m\vec{g}+\vec{F}+\vec{F}_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow \Sigma Fy=-mg-F+K(\Delta\ell_1-y) \xrightarrow{(1)}$ $\Sigma Fy=-Ky$, άρα α. α. τ με σταθερά επαναφοράς $D=K$, κυκλική συχνότητα $\omega=\sqrt{\dfrac{K}{m}}=10\dfrac{rad}{s}$ και περίοδο $T=\dfrac{2\pi}{10}s$.



β) $y=A\eta\mu(\omega t+\varphi_0) \Rightarrow y=0,2\eta\mu(10t+\varphi_0) \xrightarrow[y=+0,2m]{t=0}$

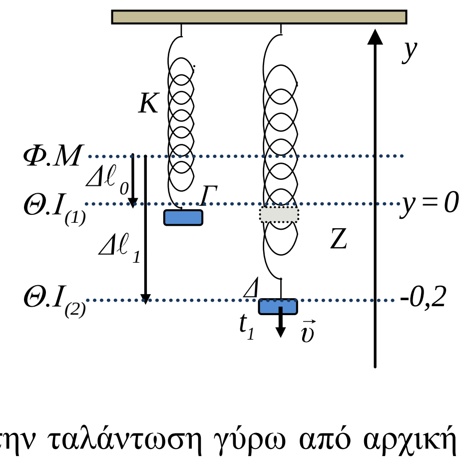
$y=0,2\eta\mu\left(10t+\dfrac{\pi}{2}\right)$ και $\upsilon=2\sigma\upsilon\nu\left(10t+\dfrac{\pi}{2}\right)$.

γ) Η ενέργεια που προσφέρθηκε στο «ανενεργό» αρχικά ταλαντωτή ισούται με την τελική του ενέργεια $E_{\pi\rho o\sigma}=E_{\tau\varepsilon\lambda\iota\kappa\acute{\eta}}-E_{\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{\eta}} \Rightarrow E_{\pi\rho o\sigma}=\dfrac{1}{2}DA^2 \Rightarrow$

$E_{\pi\rho o\sigma}=\dfrac{1}{2}200.0,2^2 \Rightarrow E_{\pi\rho o\sigma}=4J$

δ) Τη χρονική στιγμή $t=\dfrac{41T}{4}$ ο ταλαντωτής έχει απομάκρυνση $y=0,2\eta\mu\left(\dfrac{2\pi}{T}\dfrac{41T}{4}+\dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$

$y=0,2\eta\mu(21\pi) \Rightarrow y=0$ και ταχύτητα $\upsilon=2\sigma\upsilon\nu(21\pi) \Rightarrow \upsilon=-2m/s$, δηλαδή ο ταλαντωτής εκείνη τη στιγμή είναι στη θέση ισορροπίας του.



Εδώ καταργείται η δύναμη από το ηλεκτρικό πεδίο και ο ταλαντωτής συνεχίζει την ταλάντωση γύρω από αρχική θέση ισορροπίας του Γ. Επιλέγουμε νέο άξονα ταλάντωσης $y'y$ με φορά προς τα πάνω και με αρχή $y=0$ προφανώς το νέο κέντρο ταλάντωσης. Μόλις καταργείται η $\vec{F}$ (θέση Δ, στιγμή t_1) ο ταλαντωτής έχει ταχύτητα $\upsilon = -2m/s$ και απομάκρυνση $y=-0,2m$.

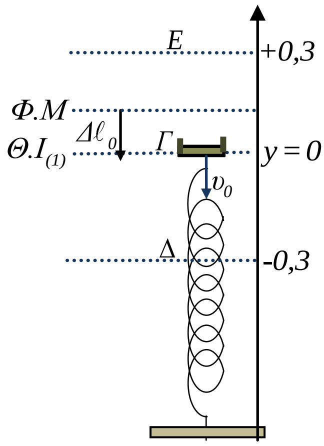
$$\underset{\substack{αρχική\\ την\ t_1}}{E} = \underset{ταλάντωσης}{E} \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}Dy^2 = \frac{1}{2}DA_1^2 \xrightarrow{D=K} A_1 = \sqrt{y^2 + \frac{m\upsilon^2}{K}} \Rightarrow$$

$$A_1 = \sqrt{(-0,2)^2 + \frac{2.2^2}{200}} \Rightarrow A_1 = 0,2\sqrt{2}m$$

$$y = A_1\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow y = 0,2\sqrt{2}\eta\mu(10t + \varphi_0) \xrightarrow[y=-0,2m...\upsilon<0]{t=0}$$

$$y = 0,2\sqrt{2}\eta\mu\left(10t + \frac{5\pi}{4}\right) \text{ και } \upsilon = 2\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\left(10t + \frac{5\pi}{4}\right)$$

1.64 **α)** Αρχικά ο δίσκος εκτελεί ταλάντωση γύρω στη θέση Γ που είναι κάτω από τη θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου κατά $\Delta\ell_0$. Η ταλάντωση αυτή έχει κυκλική συχνότητα $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 10rad/s$, σταθερά επαναφοράς (και του ελατηρίου) $D = K = m\omega^2 \Rightarrow K = 100N/m$



$\Sigma Fy = 0 \Rightarrow mg = F_{ελ} \Rightarrow mg = K\Delta\ell_0 \Rightarrow \Delta\ell_0 = 0,1m$.

Το πλάτος της ταλάντωσης είναι $\upsilon_0 = \omega A_1 \Rightarrow 3 = 10A_1 \Rightarrow A_1 = 0,3m$.

Μόλις αρχίζει η δράση της δύναμης το κέντρο της νέας ταλάντωσης είναι κατά $\Delta\ell_1$ κάτω από το φυσικό μήκος του ελατηρίου, όπου $\Sigma\vec{F}y = 0 \Rightarrow$

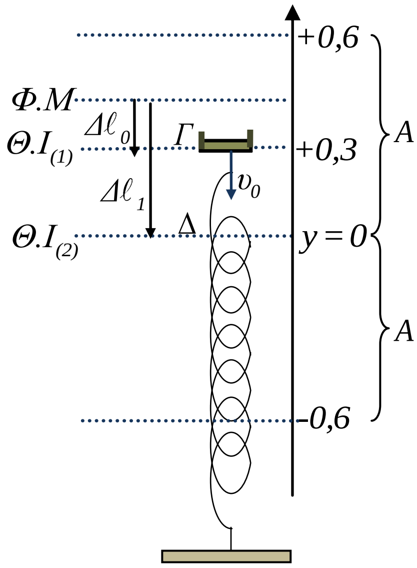
$$mg + F - F_{ελ} = 0 \Rightarrow K\Delta\ell_1 = F + Mg \qquad \Rightarrow \Delta\ell_1 = \frac{F + Mg}{K} \Rightarrow \Delta\ell_1 = 0,4m.$$

Παρατηρούμε ότι $\Delta\ell_1 = A_1 + \Delta\ell_0$, δηλαδή η θέση της νέας ισορροπίας ταυτίζεται με το κάτω άκρο Δ της ταλάντωσης που γίνονταν μέχρι τότε. Η νέα ταλάντωση αποδεικνύεται όπως και στην περίπτωση (1) ότι θα έχει

$$D = K = 100N/m \text{ και } \omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = 10\frac{rad}{s}.$$

Αν η δύναμη $F = 30N$ ασκηθεί στο κατώτερο σημείο Δ της ταλάντωσης επειδή εκεί έχουμε $\Sigma\vec{F}y = 0$ και $\vec{\upsilon} = 0$ ο δίσκος θα παραμείνει ακίνητος στη θέση αυτή!!!.

Αν η δύναμη $F = 30N$ ασκηθεί στο ανώτερο σημείο Ε της ταλάντωσης επειδή $\vec{\upsilon} = 0$ ο δίσκος θα εκτελέσει ταλάντωση με κέντρο το Δ και πλάτος $A = (ΕΔ) = 0{,}6m$



β) $y = Aημ(ωt + φ_0) \Rightarrow y = 0{,}6ημ(10t + \frac{π}{2})$

και $\upsilon = 6συν\left(10t + \frac{π}{2}\right)$ (S.I).

γ) Η ενέργεια που προσφέρθηκε στο ταλαντωτή ισούται

$E_{προσ} = E_{τελική} - E_{αρχική} \Rightarrow$

$E_{προσ} = \frac{1}{2}DA^2 - \frac{1}{2}m\upsilon^2 \Rightarrow$

$E_{προσ} = \frac{1}{2}100.0{,}6^2 - \frac{1}{2}1.3^2 \Rightarrow E_{προσ} = 13{,}5J$

δ) Όταν καταργείται η δύναμη F ο ταλαντωτής συνεχίζει την ταλάντωση γύρω από αρχική θέση ισορροπίας του Γ.

Αν η δύναμη $F = 30N$ καταργηθεί στο ανώτερο σημείο της ταλάντωσης, επειδή $\vec{\upsilon} = 0$ η θέση είναι η ακραία και το πλάτος θα είναι όσο η απόστασή της από το σημείο Γ…, $A = 0{,}3m$

Αν η δύναμη $F = 30N$ καταργηθεί στο κατώτερο σημείο της ταλάντωσης, επειδή $\vec{\upsilon} = 0$ η θέση είναι η ακραία και το πλάτος θα είναι όσο η απόστασή της από το σημείο Γ…, $A = 0{,}9m$

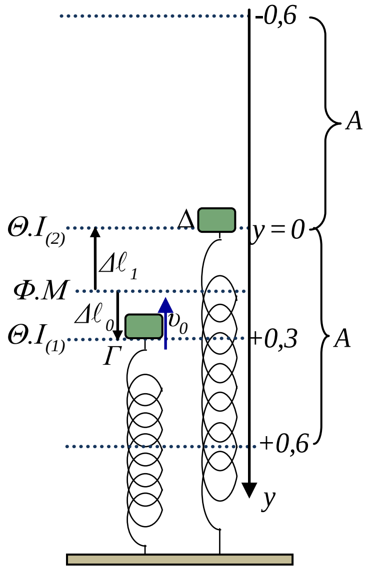
ε) Αν αντί για δύναμη αφήναμε σώμα βάρους $B' = 30N$ (μάζα $m' = 3Kg$) θα είχαμε τις ίδιες ταλαντώσεις αλλά με άλλη κυκλική συχνότητα και περίοδο $ω' = \sqrt{\frac{K}{m+m'}} = 5\frac{rad}{s}$!!

1.65 Η αρχική ταλάντωση έχει μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης $\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = E_1 \Rightarrow$

$\upsilon_0 = \sqrt{\frac{2E_1}{m}} \Rightarrow \upsilon_0 = \sqrt{\frac{2.13{,}5}{1}} \Rightarrow \upsilon_0 = 3\sqrt{3}m/s$ και κέντρο ταλάντωσης κάτω από το φυσικό μήκος του ελατηρίου κατά $Δ\ell_0 = \frac{mg}{K} \Rightarrow Δ\ell_0 = 0{,}1m$ Μετά τη δράση της δύναμης το κέντρο της ταλάντωσης είναι κατά $Δ\ell_1$ πιο ψηλά πάνω από το φυσικό μήκος του ελατηρίου, όπου $Σ\vec{F}y = 0 \Rightarrow mg - F + F_{ελ} = 0 \Rightarrow$

$K\Delta\ell_1 = F - Mg \Rightarrow \Delta\ell_1 = \dfrac{F - Mg}{K} \Rightarrow$

$\Delta\ell_1 = 0{,}2m$.



Επιλέγουμε άξονα ταλάντωσης $y'y$ με φορά προς τα κάτω και με αρχή $y=0$ προφανώς το νέο κέντρο Δ της ταλάντωσης. Μόλις αρχίζει η δράση της $\vec{F}$ (θέση Γ , στιγμή $t_0 = 0$) ο ταλαντωτής έχει ταχύτητα $\upsilon_0 = -3\sqrt{3}m/s$ και απομάκρυνση $y = +0{,}3m$. Η νέα ταλάντωση αποδεικνύεται (όπως και στην περίπτωση 1) ότι είναι απλή αρμονική με σταθερά επαναφοράς $D = K = 100N/m$ και κυκλική συχνότητα $\omega = \sqrt{\dfrac{K}{m}} = 10\dfrac{rad}{s}$.

α) Η περίοδος είναι $T = \dfrac{2\pi}{10}s$ και πλάτος $\underset{\substack{\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{\eta} \\ \tau\eta\nu\, t=0}}{E} = \underset{\tau\alpha\lambda\acute{\alpha}\nu\tau\omega\sigma\eta\varsigma}{E}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}Dy^2 = \frac{1}{2}DA^2 \xrightarrow{D=K} A = \sqrt{y^2 + \frac{m\upsilon^2}{K}} \Rightarrow \boxed{A = 0{,}6m}$$

β) $y = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow y = 0{,}6\eta\mu(10t + \varphi_0) \xrightarrow[y=+0{,}3m...\upsilon<0]{t=0}$

$y = 0{,}6\eta\mu\left(10t + \dfrac{5\pi}{6}\right)$ και $\upsilon = 6\sigma\upsilon\nu\left(10t + \dfrac{5\pi}{6}\right)$.

γ) Η αρχική ενέργεια του ταλαντωτή, πριν την δράση της $\vec{F}$ είναι $E_1 = 13{,}5J$ ενώ μετά γίνεται $E = \dfrac{1}{2}DA^2 \Rightarrow E = \dfrac{1}{2}100.0{,}6^2 \Rightarrow E = 18J$.

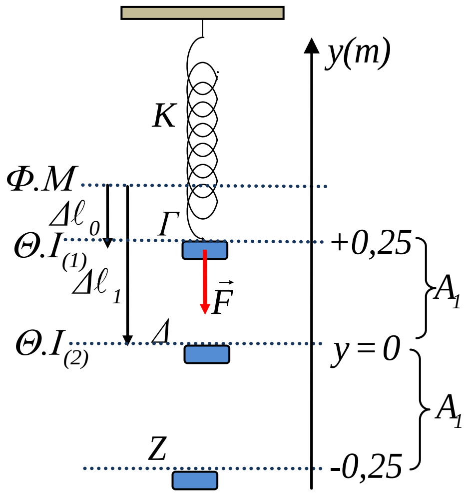
Άρα η ενέργεια που προσφέρθηκε στον ταλαντωτή είναι $E_{\pi\rho o\sigma} = E - E_1 \Rightarrow$ $E_{\pi\rho o\sigma} = 4{,}5J$.

δ) Τώρα η ταλάντωση θα γίνει γύρω από την αρχική θέση ισορροπίας Γ και το πλάτος θα είναι : $A_1 = 0{,}3m$ αν τη στιγμή κατάργησης της δύναμης ο ταλαντωτής είναι στην κατώτερη θέση $y = +0{,}6m$ ή $A_2 = 0{,}9m$ αν τη στιγμή κατάργησης της δύναμης ο ταλαντωτής είναι στην ανώτερη θέση $y = -0{,}6m$.

1.66 Η θέση ισορροπίας του ταλαντωτή πριν την δράση της $\vec{F}$ είναι στη θέση Γ που είναι κάτω από τη θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου κατά $\Delta\ell_0$ και ισχύει $\Sigma Fy = 0 \Rightarrow Mg = F_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow Mg = K\Delta\ell_0 \Rightarrow$ $\Delta\ell_0 = 0{,}1m$. Μόλις αρχίζει η δράση της δύναμης το κέντρο της ταλάντωσης είναι κατά $\Delta\ell_1$ κάτω από το φυσικό μήκος του ελατηρίου, όπου $\Sigma\vec{F}y = 0 \Rightarrow$

$Mg + F - F_{\varepsilon\lambda} = 0 \Rightarrow K\Delta\ell_1 = F + Mg$ (1)

$$\Rightarrow \Delta\ell_1 = \frac{F + Mg}{K} \Rightarrow \Delta\ell_1 = 0{,}35m$$



Η ταλάντωση με την δράση της $\vec{F}$

Αν η $\vec{F}$ δρούσε συνεχώς αποδεικνύεται ότι ο ταλαντωτής θα εκτελούσε α. α. τ με πλάτος $A_1 = 0{,}25m$ και εξίσωση απομάκρυνσης για το σύστημα του σχήματος είναι $y = 0{,}25\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$. Αν θέσουμε $t = 0{,}1\pi s$ βρίσκουμε $y = -0{,}25m$ που σημαίνει ότι ο ταλαντωτής είναι στην κατώτερη θέση Ζ με ταχύτητα μηδέν.

Εδώ καταργείται η δύναμη από το ηλεκτρικό πεδίο και ο ταλαντωτής συνεχίζει την ταλάντωση γύρω από αρχική θέση ισορροπίας του Γ. Επιλέγουμε νέο άξονα ταλάντωσης $y'y$ με φορά προς τα πάνω και με αρχή $y = 0$ προφανώς το νέο κέντρο ταλάντωσης Γ. Επειδή η ταχύτητα στην έναρξη της νέας ταλάντωσης είναι μηδέν, η απόσταση $(Z\Gamma)$ από τη θέση ισορροπίας είναι το πλάτος της ταλάντωσης , $A = 0{,}50m$.

Οι εξισώσεις απομάκρυνση και ταχύτητας είναι $y = 0{,}5\eta\mu\left(10t + \frac{3\pi}{2}\right)$ και $\upsilon = 5\sigma\upsilon\nu\left(10t + \frac{3\pi}{2}\right)$ (S.I).

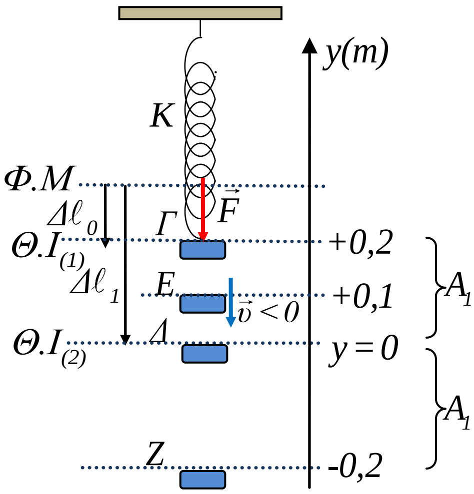
Η ενέργεια που προσέφερε το ηλεκτρικό πεδίο είναι το έργο τη F

$W_F = F.\Delta y = F.2A_1 \Rightarrow W_F = 25N.2.0{,}25m \Rightarrow W_F = 12{,}5J$ ή

$$E_{\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{\eta}} + W_F = E_{\tau\varepsilon\lambda\iota\kappa\acute{\eta}} \Rightarrow 0 + W_F = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow W_F = \frac{1}{2}100.0{,}5^2 \Rightarrow$$
$W_F = 12{,}5J$

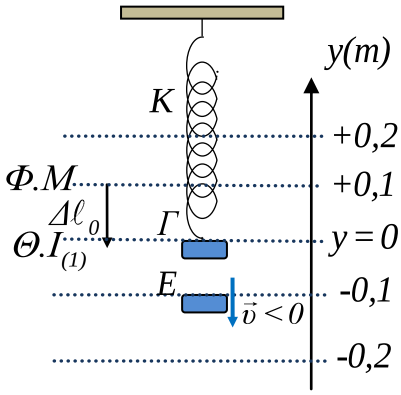
1.67 Η θέση ισορροπίας του ταλαντωτή πριν την δράση της $\vec{F}$ είναι στη θέση Γ που είναι κάτω από τη θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου κατά $\Delta\ell_0$ και ισχύει $\Sigma Fy = 0 \Rightarrow mg = F_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow mg = K\Delta\ell_0 \Rightarrow \Delta\ell_0 = 0{,}1m$.

Μόλις αρχίζει η δράση της δύναμης το κέντρο της ταλάντωσης είναι κατά $\Delta\ell_1$ κάτω από το φυσικό μήκος του ελατηρίου, όπου $\Sigma\vec{F}y = 0 \Rightarrow$ $mg + F - F_{\varepsilon\lambda} = 0 \Rightarrow K\Delta\ell_1 = F + Mg\,(1)$ $\Rightarrow \Delta\ell_1 = \dfrac{F + mg}{K} \Rightarrow \Delta\ell_1 = 0{,}30m$ Αν η $\vec{F}$ δρούσε συνεχώς αποδεικνύεται ότι ο ταλαντωτής θα εκτελούσε α. α. τ με πλάτος $A_1 = 0{,}2m$ και οι εξισώσεις απομάκρυνσης και ταχύτητας για το σύστημα του σχήματος είναι $y = 0{,}2\eta\mu\left(10t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ και $\upsilon = 2\sigma\upsilon\nu\left(10t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ Αν στις εξισώσεις αυτές θέσουμε $t = \dfrac{19\pi}{30}s$ βρίσκουμε $y = +0{,}1m$ και $\upsilon = -\sqrt{3}m/s$ (Θέση Ε στο σχήμα) .



Η ταλάντωση με την δράση της $\vec{F}$

Εδώ καταργείται η δύναμη και ο ταλαντωτής συνεχίζει την ταλάντωση γύρω από αρχική θέση ισορροπίας του Γ. Επιλέγουμε νέο άξονα ταλάντωσης $y'y$ με φορά προς τα πάνω και με αρχή $y = 0$ προφανώς το νέο κέντρο ταλάντωσης. Μόλις αρχίζει η νέα ταλάντωση (θέση Ε) για το νέο σύστημα αξόνων έχουμε $y = -0{,}1m$ **(προσοχή στο σημείο αυτό)** και $\upsilon = -\sqrt{3}m/s$, οπότε το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι



Η νέα ταλάντωση μετά την κατάργηση της $\vec{F}$

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}Dy^2 = \frac{1}{2}DA^2 \xrightarrow{D=K} A = \sqrt{y^2 + \frac{m\upsilon^2}{K}} \Rightarrow A = 0{,}2m$$

β) $y = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow y = 0{,}2\eta\mu(10t + \varphi_0) \xrightarrow[y=+0{,}2m...\upsilon<0]{t=0}$

$$y = 0{,}2\eta\mu\left(10t + \frac{5\pi}{6}\right) \text{ και } \upsilon = 2\sigma\upsilon\nu\left(10t + \frac{5\pi}{6}\right) \text{(S.I).}$$

Σχόλιο: Μόλις καταργήθηκε η δύναμη υποθέσαμε και πάλι $t = 0$.

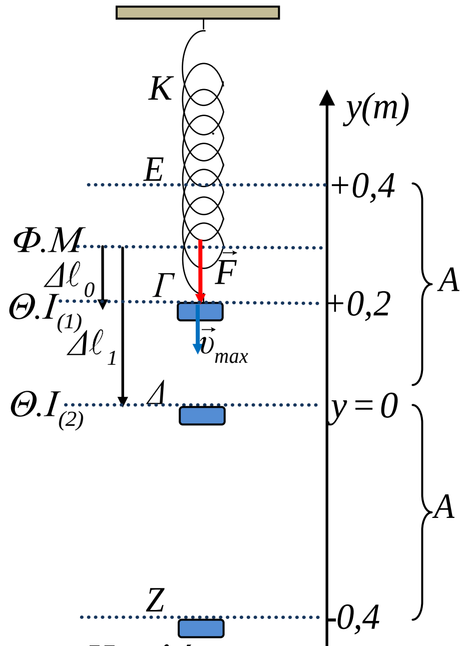
Η ενέργεια που προσφέρθηκε ισούται με το έργο της F

$W_F = F.\Delta y = F.(\Gamma E) \Rightarrow W_F = 20N.0{,}1m \Rightarrow W_F = 2J$

Εδώ χρειάζεται προσοχή γιατί η F ξεκινάει από το Γ γράφει τρείς κλειστές διαδρομές ΓΔΖΔΓ και την «απλή» ΓΕ….

$$E_{αρχική} + W_F = E_{τελική} \Rightarrow 0 + W_F = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow W_F = \frac{1}{2}100.0,2^2 \Rightarrow W_F = 2J$$

1.68 Αρχικά ο ταλαντωτής εκτελεί ταλάντωση γύρω από τη θέση ισορροπίας του Γ που είναι κάτω από τη θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου κατά $\Delta\ell_0$ και ισχύει $\Sigma Fy = 0 \Rightarrow mg = F_{ελ} \Rightarrow$ $mg = K\Delta\ell_0 \Rightarrow \Delta\ell_0 = 0,1m$. Μόλις αρχίζει η δράση της δύναμης το κέντρο της ταλάντωσης είναι κατά $\Delta\ell_1$ κάτω από το φυσικό μήκος του ελατηρίου, όπου $\Sigma\vec{F}y = 0 \Rightarrow$ $mg + F - F_{ελ} = 0 \Rightarrow$ $K\Delta\ell_1 = F + Mg\,(1) \Rightarrow$ $\Delta\ell_1 = \dfrac{F + Mg}{K} \Rightarrow \Delta\ell_1 = 0,3m$.



Η ταλάντωση με την δράση της $\vec{F}$

Αν δρούσε συνεχώς η δύναμη $\vec{F}$ αποδεικνύεται ότι ο ταλαντωτής θα εκτελούσε απλή αρμονική ταλάντωση με κέντρο το Δ και πλάτος A … που υπολογίζεται ως εξής $E_{αρχική} = E_{ταλάντωσης} \Rightarrow$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_{max}^2 + \frac{1}{2}Dy^2 = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow \frac{1}{2}DA_1^2 + \frac{1}{2}Dy^2 = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow A = \sqrt{y^2 + A_1^2}.$$

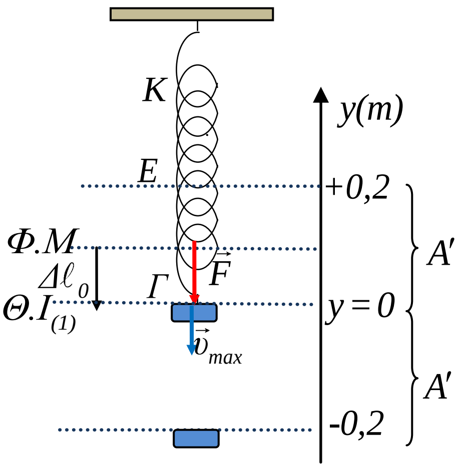
Μόλις αρχίζει η δράση της $\vec{F}$ $y = +0,2m$ (βλέπε σχήμα – άξονα ταλάντωσης όταν δρα και η $\vec{F}$), άρα $A = \sqrt{0,2^2 + (0,2\sqrt{3})^2} \Rightarrow A = 0,4m$. Οι εξισώσεις αυτής της ταλάντωσης (όταν δρα και η $\vec{F}$) είναι $y = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow$

$$y = 0,4\eta\mu(10t + \varphi_0) \xrightarrow[y=+0,2m...\upsilon<0]{t=0} y = 0,4\eta\mu\left(10t + \frac{5\pi}{6}\right)$$ και

$$\upsilon = 4\sigma\upsilon\nu\left(10t + \frac{5\pi}{6}\right).$$

Θέτοντας τη χρονική στιγμή κατάργησης της $\vec{F}$ $t = \frac{\pi}{6} s$ βρίσκουμε $y = +0,4m$ που σημαίνει ότι ο ταλαντωτής είναι στην ανώτερη θέση της ταλάντωσης Ε με ταχύτητα $\upsilon = 0$.

Εδώ καταργείται η δύναμη από το ηλεκτρικό πεδίο και ο ταλαντωτής συνεχίζει την ταλάντωση γύρω από αρχική θέση ισορροπίας του Γ. Επιλέγουμε νέο άξονα ταλάντωσης $y'y$ με φορά προς τα πάνω και με αρχή $y = 0$ προφανώς το νέο κέντρο ταλάντωσης (θέση Γ). Επειδή η ταχύτητα στην έναρξη της ταλάντωσης αυτής είναι μηδέν, η απόσταση *(ΕΓ)* από τη θέση ισορροπίας είναι το πλάτος της ταλάντωσης , $A' = 0,20m$.



Η ταλάντωση μετά την κατάργηση της $\vec{F}$

Οι εξισώσεις απομάκρυνση και ταχύτητας είναι

$y = 0,2\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$ και

$\upsilon = 2\sigma\upsilon\nu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$ (S.I).

Το έργο της δύναμης F είναι:

$W_F = F.\Delta y = -F.(\Gamma E) \Rightarrow W_F = -20N.0,2m \Rightarrow W_F = -4J$

Εδώ χρειάζεται προσοχή γιατί η F ξεκινάει από το Γ γράφει την κλειστή διαδρομή ΓΔΖΔΓ και την «απλή» ΓΕ …. με την δύναμη αντίρροπη της μετατόπισης.

$$E_{\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{\eta}} + W_F = E_{\tau\varepsilon\lambda\iota\kappa\acute{\eta}} \Rightarrow \frac{1}{2}DA_1^2 + W_F = \frac{1}{2}DA'^2 \Rightarrow$$

$\frac{1}{2}100.\left(0,2\sqrt{3}\right)^2 + W_F = \frac{1}{2}100.0,2^2 \Rightarrow W_F = -4J$ … Προφανώς και αφαιρείται ενέργεια από το σύστημα.