

1. Ακείωτες Μηχανικές Ταλαντώσεις - Απαντήσεις.

A. Ερωτήσεις κλειστού τύπου.

- 1.1) α-1, β-ε, γ-1, δ-ε
 1.2) α-1, β-1, γ-1, δ-1, ε-ε
 1.3) α-1, β-1, γ-ε, δ-1, ε-1
 1.4) α-1, β-1, γ-1, δ-ε
 1.5) α-1, β-1, γ-1, δ-ε
 1.6) α-1, β-1, γ-ε, δ-ε, ε-1
 1.7) α-1, β-1, γ-ε, δ-ε
 1.8) α-ε, β-1, γ-1, δ-ε, ε-1
 1.9) α-1, β-1, γ-1, δ-ε, ε-ε, στ-ε

ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ 1.9

α) $T = 0,2\pi \text{ s} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 10 \text{ rad/s}$, $\phi_0 = 0 \Rightarrow x = A \sin(\omega t)$ & $v = \omega A \cos(\omega t)$

$U = \frac{1}{2} D x^2 = \frac{1}{2} D A^2 \sin^2(\omega t) = E \sin^2(\omega t) \Rightarrow U = 10 \pi \text{ J} (10t) \text{ (SI)}$

$K = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t) = E \cos^2(\omega t) \Rightarrow K = 10 \pi \text{ J} (10t) \text{ (SI)}$

ήτοι α-λόςος

β) $K = 10 \pi \cos^2(10t) \Rightarrow \frac{dK}{dt} = 10 \cdot 2 \cos(10t) [-\sin(10t) \cdot 10] \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -100 \pi \sin(20t) \text{ J/s}$

... αλλά και διαφορετικά ...

$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\text{ελ}}}{dt} = \frac{\Sigma F \cdot dx}{dt} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \Sigma F v = -D x v = -D A \sin(\omega t) \omega A \cos(\omega t)$

$\Rightarrow \frac{dK}{dt} = -\frac{1}{2} D A^2 2 \sin(\omega t) \cos(\omega t) = -E \sin(2\omega t) \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -100 \pi \sin(20t) \text{ J/s}$

ομοίως $U = 10 \pi \sin^2(10t) \Rightarrow \frac{dU}{dt} = 10 \cdot 2 \sin(10t) \cos(10t) \cdot 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{dU}{dt} = +100 \pi \sin(20t) \text{ (SI)}$

Για $t = \frac{\pi}{20} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -100 \pi \sin(20 \cdot \frac{\pi}{20}) = -100 \pi \sin \pi = 0 \Rightarrow \frac{dK}{dt} = 0$

ήτοι β-λόςος

γ) $\left(\frac{dK}{dt} \right)_{\max} = 100 \pi \text{ J/s}$

γ-λόςος

δ) $\left(\frac{dU}{dt} \right)_{\max} = 100 \pi \text{ J/s}$

δ-λόςος

ε) $\frac{dU}{dt} = 100 \pi \sin(20t) \xrightarrow{t = \pi/40 \text{ s}} \frac{dU}{dt} = 100 \pi \sin(20 \cdot \frac{\pi}{40}) = 100 \pi \text{ J/s} = \left(\frac{dU}{dt} \right)_{\max}$

ε-λόςος

$$6\tau) \quad U = K \Rightarrow 10 \mu^2(10t) = 10 \omega^2(10t) \Rightarrow \epsilon q^2(10t) = 1 \Rightarrow \epsilon q(10t) = \pm 1$$

$$\Rightarrow 10t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow 20t = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{dK}{dt} = -100 \text{ mJ/s}(20t) = -100 \text{ mJ/s}(2\pi n \pm \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \mp 100 \text{ J/s} \quad \left. \begin{array}{l} \text{ο} \epsilon \alpha \\ \text{6T-6ω6Tδ} \end{array} \right\}$$

$$\frac{dU}{dt} = 100 \text{ mJ/s}(20t) = 100 \text{ mJ/s}(2\pi n \pm \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \frac{dU}{dt} = \pm 100 \text{ J/s}$$

1.10.

Παρατηρούμε ότι την

$$t=0 \text{ έχουμε } K=0 \Rightarrow v \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow x = +A \text{ ή } x = -A$$

Επειδή όμως την $t=0.1\text{s}$

έχουμε διαπεράσει φορές

Κ_{max} και $v < 0$ συμπεραίνουμε ότι.Την $t=0$ είναι στην θέση $x = +A$ και $\frac{T}{4} = 0.1$ ή $T = 0.4\text{s}$

$$\text{και } \omega = \frac{2\pi}{T} \text{ ή } \omega = \frac{2\pi}{0.4} \text{ ή } \omega = 5\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$a) \text{ Άρα } x = A \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \text{ ή } x = A \sin(5\pi t + \frac{\pi}{2}) \text{ ή } x = A \cos(5\pi t) \quad \alpha - \text{6ω6Tδ}$$

$$b) v = \omega A \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) \text{ ή } v = v_{\max} \sin(\omega t + \pi) \text{ ή } v = -v_{\max} \sin(\omega t) \text{ ή } v = -v_{\max} \sin(5\pi t) \quad \beta - \text{19'00s}$$

$$\gamma) a = -\omega^2 A \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \text{ ή } a = -a_{\max} \cos(\omega t) \text{ ή } a = -a_{\max} \cos(5\pi t) \quad \gamma - \text{19'00s}$$

$$\delta) F = -Dx = -DA \cos(5\pi t) = -F_{\max} \cos(5\pi t) \quad \delta - \text{6ω6Tδ}$$

Άρα $\alpha - \Sigma, \beta - \Pi, \gamma - \Pi, \delta - \Sigma$

$$\text{Σχόλιο: } K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m [-v_{\max} \sin(5\pi t)]^2 = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 \sin^2(5\pi t) = K_{\max} \sin^2(5\pi t)$$

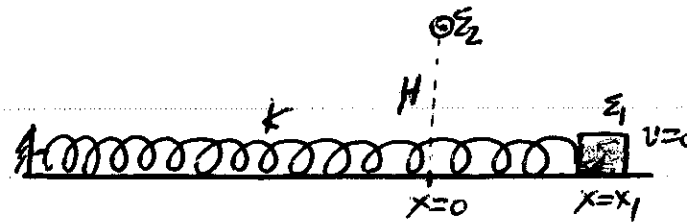
$$\Rightarrow K = K_{\max} \frac{1 - \cos(10\pi t)}{2} \Rightarrow K = \frac{K_{\max}}{2} - \frac{K_{\max}}{2} \cos(10\pi t)$$

$$\omega_{\text{κνημής}} = 10\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow T_{\text{κνημής}} = 0.2\text{s} \text{ ή } f_{\text{κνημής}} = 5\text{Hz}$$

$$\omega_{\text{ταλαντώγ}} = 5\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow T_{\text{ταλαντώγ}} = 0.4\text{s} \text{ ή } f_{\text{ταλαντώγ}} = 2.5\text{Hz}$$

1.11

Ποιο είναι η κρούση πρέρωερ
όσο είναι ο χρόνος t_1 διαγρά
είναι το ω σ_1 αμολην



αυρατα θετικη θεση $x=+x_1$ στη θεση ισορροπιας, τόπος
πρέρωερ γά είναι και ο χρόνος η πώσης t_2 σ_2 , $t_1=t_2$
Ναι αλλά ο χρόνος $t_1=\frac{T}{4}=\frac{1}{4}2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ είναι ανεξάρτητος
του πλάτους μετ' ίδιου, τόσο αν το πλάτος είναι x_1
ή ομοιοσηποτε άλλο ... άρα ίδιο, πρέρωερ γά είναι
και ο χρόνος η πώσης t_2 ο ομοιος ότως εξαρτάται από
το μήκος H ... $t=\frac{1}{g}t_2^2 \Rightarrow t_2=\sqrt{2H/g}$
Τροχαίω γά δια έχουνε ίδιο χρόνο πτώσης: πρέρωερ το
 σ_2 γά άφθει από το ίδιο ύψος H
Άρα σωστη η (δ)

B. Ερωτήσεις κατανόησης

1.12

α) ταλαντωτής $\sigma_1(m, k)$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}DA_1^2 \quad D_1=k$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA_1^2 \Rightarrow A_1 = v\sqrt{\frac{m}{k}}$$

ταλαντωτής $\sigma_2(m, 4k)$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}D_2A_2^2 \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}4kA_2^2$$

$$\Rightarrow mv^2 = 4kA_2^2 \Rightarrow A_2 = v\sqrt{\frac{m}{4k}} \Rightarrow A_2 = \frac{1}{2}v\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow A_2 = \frac{A_1}{2} \text{ ή } A_1 = 2A_2$$

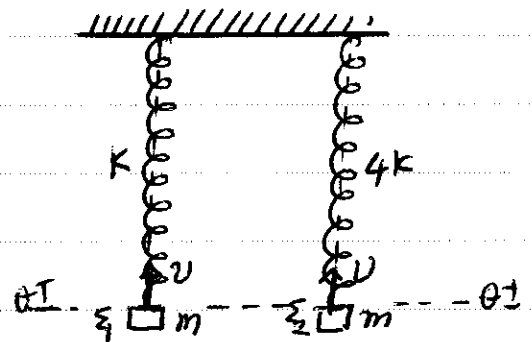
άρα α-λάθος

β) $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = T$, $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{4k}} = \frac{1}{2}2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{T}{2} = \frac{T}{2}$

Ο ταλαντωτής $\sigma_1(m, k)$ είναι στην αυρατα θεση τη χρονικη
στιγη $t_1 = \frac{T}{4} = \frac{T}{4}$ (1)

Ο ταλαντωτής $\sigma_2(m, 4k)$ είναι με ηλικοση θ τη χρονικη στιγη

$$t_2 = \frac{T_2}{2} = \frac{T/2}{2} \Rightarrow t_2 = \frac{T}{4} \text{ (2)} \quad \text{Από (1), (2)} \quad t_1 = t_2, \text{ άρα β-σωστό.}$$

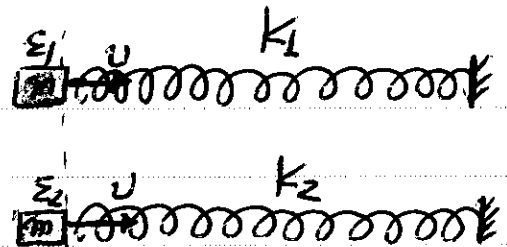


1.13

προφανώς $\frac{T_1}{2} = \frac{T_2}{4} \Rightarrow 2T_1 = T_2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2 \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\omega_2} \Rightarrow \frac{2}{\omega_1} = \frac{1}{\omega_2} \Rightarrow \omega_1 = 2\omega_2$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{k_1}{m}} = 2 \sqrt{\frac{k_2}{m}} \Rightarrow \frac{k_1}{m} = 4 \frac{k_2}{m} \Rightarrow k_1 = 4k_2$$

Άρα ωστί η σχέση (α)



1.14

Οι ταχύτητες v_1 και v είναι

οι μέγιστες ταχύτητες που

είναι αντίστοιχες ταλαντώσεις

(m, k) και $(4m, k)$ και

δίνονται από τις σχέσεις

$$v_1 = \omega_1 A \quad \text{ή} \quad v_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} A$$

$$v = \omega_2 A' \quad \text{ή} \quad v = \sqrt{\frac{k}{4m}} A' \Rightarrow v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} A' \quad \text{και επειδή} \quad A' = A \quad \text{έχουμε}$$

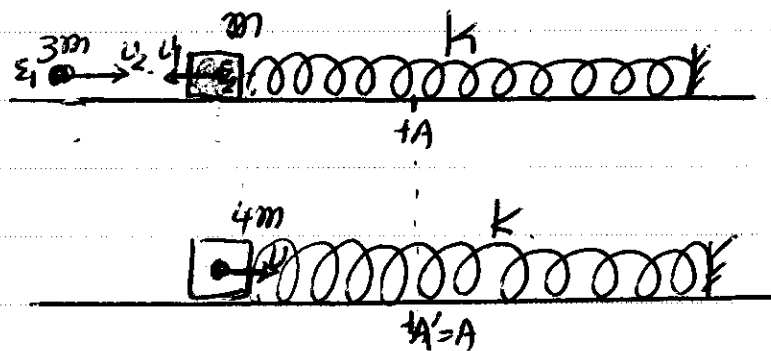
$$v = \frac{v_1}{2} \quad (1)$$

Από την διατήρηση της ορμής 6m διαρυστα τη χρονιά

$$\text{Έχουμε:} \quad \rho_{\text{αρχική συστήματος}} = \rho_{\text{τελική συστήματος}} \Rightarrow 3m v_2 - m v_1 = 4m \cdot v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3v_2 - v_1 = 4v \xrightarrow{(1)} 3v_2 - v_1 = 4 \frac{v_1}{2} \Rightarrow 3v_2 = 3v_1 \Rightarrow v_2 = v_1$$

Άρα ωστί η σχέση Α.1



1.15

Η ταλάντωση τούτου του δίσκου
 όσο και τον συστήματος γίνον-
 ται γύρω από την αντίστοιχη
 θέση ισορροπίας γύρω από την
 τις αντίστοιχες στατικές
 προπονοφόρες Δ₁ και Δ₂
 1^η ταλάντωση

$$A_1 = \Delta_1 = \frac{mg}{k}$$

$$2^{\text{η}} \text{ ταλάντωση: } A_2 = \Delta_2 = \frac{3mg}{k} = 3A_1$$

$$\text{Ενέργεια παραχρησμένη στην 1^η περίπτωση: } E_1 = \frac{1}{2} D_1 A_1^2 = \frac{1}{2} k A_1^2 \quad (1)$$

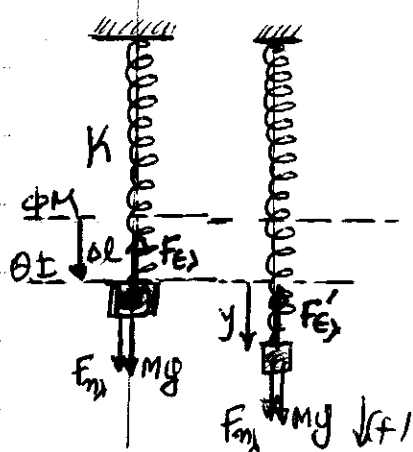
$$\text{Ενέργεια παραχρησμένη στην 2^η περίπτωση: } E_2 = \frac{1}{2} D_2 A_2^2 = \frac{1}{2} k A_2^2$$

$$\Rightarrow E_2 = \frac{1}{2} k (3A_1)^2 = 9 \frac{1}{2} k A_1^2 \xrightarrow{(1)} E_2 = 9E_1$$

Αποδεικνύεται η σχέση (8').

1.16

Ας αφοδεύσουμε ότι το σώμα και
 δύναμη των ηλεκτρικών πεδίων ευτελεί απλή
 αρμονική ταλάντωση.



$$\text{Θέση ισορροπίας: } \Sigma \vec{F}_y = 0 \Rightarrow F_m + M g = F_{el} \Rightarrow$$

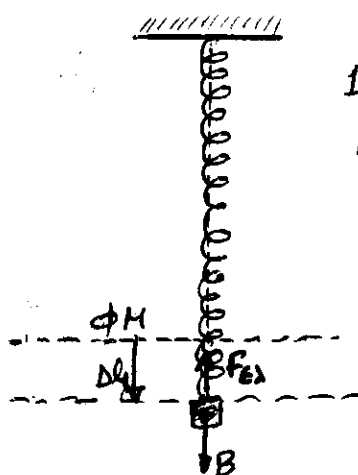
$$\Rightarrow E q + M g = k \Delta l \quad (1)$$

$$\text{Τυχала θέση: } \Sigma \vec{F}_y = \vec{F}_m + M \vec{g} + \vec{F}_{el} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Sigma F_y = E q + M g - k(\Delta l + y) \xrightarrow{(1)} \Sigma F_y = -k y.$$

Άρα ευτελεί α.α.τ γύρω από το σημείο
 $D' = k$

... Τώρα στον όβυνη... ..



1^η περίηλωση

Η θέση ισορροπίας
όταν δεν δρά η
ηλεκτρική δύναμη

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{\epsilon} = B$$

$$\Rightarrow k \Delta l_1 = B$$

$$\Delta l_1 = \frac{B}{k}$$

Στην πρώτη περίηλωση

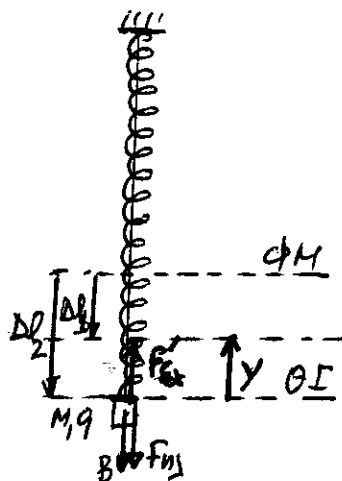
η περίοδος είναι

$$T = 2\pi \sqrt{m/D} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{m/k}$$

και το πλάτος είναι

$$A = \Delta l_1 = \frac{B}{k} \quad (\text{γιατί;})$$

(2')



2^η περίηλωση

Η θέση ισορροπίας

όταν δεν υπάρχει

ηλεκτρική δύναμη.

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{\epsilon}' = B + F_{m_2}$$

$$\Rightarrow \Delta l_2 = \frac{B + F_{m_2}}{k}$$

δηλαδή είναι πιο

υψηλά υαται

$$y = \Delta l_2 - \Delta l_1 \Rightarrow$$

$$y = \frac{F_{m_2}}{k} \quad (2)$$

Στη δεύτερη περίηλωση

η περίοδος είναι

$$T' = 2\pi \sqrt{m/D'} \Rightarrow T' = 2\pi \sqrt{m/k}$$

και το πλάτος

$$A' = A/2$$

α) παρατηρούμε ότι $T' = T$, άρα σωστή η σχέση 4.3

β) προφανώς η επιβολή ενέργειας (από την μπαταρία) στη

2^η περίηλωση προέρχεται από την διαφορά -δυναμίας

του ηλεκτρικού πεδίου

$$\left(\begin{array}{c} \text{Ενέργεια παλίνδρομης} \\ \text{2^{ης} περίηλωσης} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Ενέργεια της παλίνδρομης} \\ \text{1^{ης} περίηλωσης} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{προσθετέα} \\ \text{ενέργεια από} \\ \text{το ηλεκτρικό} \\ \text{πεδίο} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow E' = E + E_{\eta} \Rightarrow \frac{1}{2} D' A'^2 - \frac{1}{2} D A^2 = E_{\eta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{\eta} = \frac{1}{2} k (A/2)^2 - \frac{1}{2} k A^2 \Rightarrow E_{\eta} = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} D A^2 = E$$

$$\Rightarrow E_{\eta} = E, \text{ άρα σωστή η σχέση B.1.}$$

δωτέρω

γ) Η ταλάντωση αρχίζει όταν ο ταλαντωτής εφευρίσκει

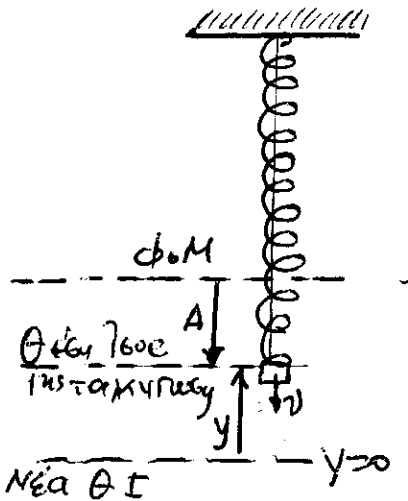
την πρώτη παλίνδρομη είναι στη θέση ισορροπίας

(διέρχεται)

και έχει: δυναμική ενέργεια $K = \frac{1}{2} m v_{max}^2 = \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} k A^2$ (3)

Δυναμική ενέργεια ταλάντωσης $U = \frac{1}{2} D y^2 = \frac{1}{2} k y^2$ (2)

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} k \left(\frac{F_m}{k} \right)^2 \quad (4)$$



προφανώς $K + U = E' \Rightarrow$
υπό τις αρχές
ή νέα ταλάντωση

$$\Rightarrow \frac{1}{2} k A^2 + \frac{1}{2} k y^2 = \frac{1}{2} D' A'^2 \xrightarrow{D'=k}$$

$$\Rightarrow A^2 + y^2 = A'^2 \Rightarrow A^2 + y^2 = (A_2)^2$$

$$\Rightarrow y = A \xrightarrow{(2)} \frac{F_m}{k} = \frac{B}{k}$$

$$\Rightarrow \boxed{F_m = B}$$

Άρα σωστή η πρόταση Γ.4

1.17

A) Δέση ισορροπίας
 $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow M_g = k \Delta l$ (1)
 Η εγέρση των ταλαντή
 προσφέρει ως προς
 την δύναμη F.

$$W_F = F \Delta l = 2 M_g \Delta l$$

$$E_{προς} = W_F = \dots = E_{ελασ} \Rightarrow$$

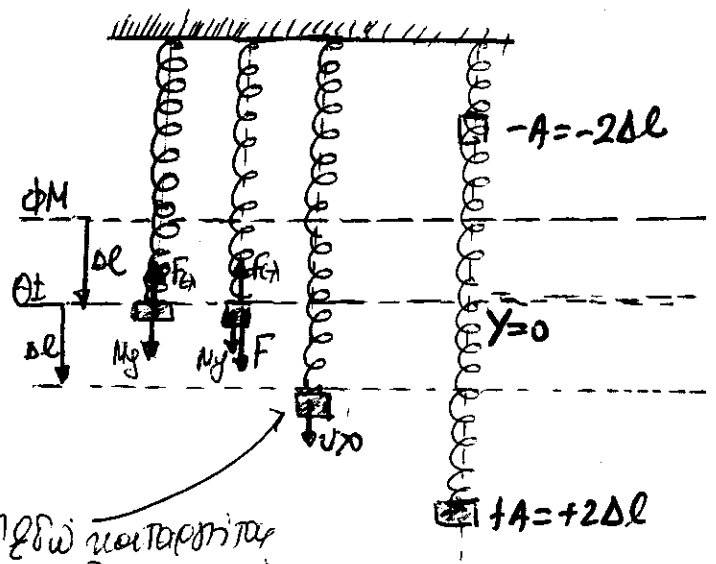
$$\Rightarrow 2 M_g \Delta l = \frac{1}{2} D A^2 \xrightarrow{D=k}$$

$$\Rightarrow 2 M_g \Delta l = \frac{1}{2} k A^2 \xrightarrow{(1)}$$

$$\Rightarrow 2 [k \Delta l] \Delta l = \frac{1}{2} k A^2$$

$$\Rightarrow 4 \Delta l^2 = A^2 \Rightarrow \boxed{A = 2 \Delta l}$$

Σωστή η Α.2

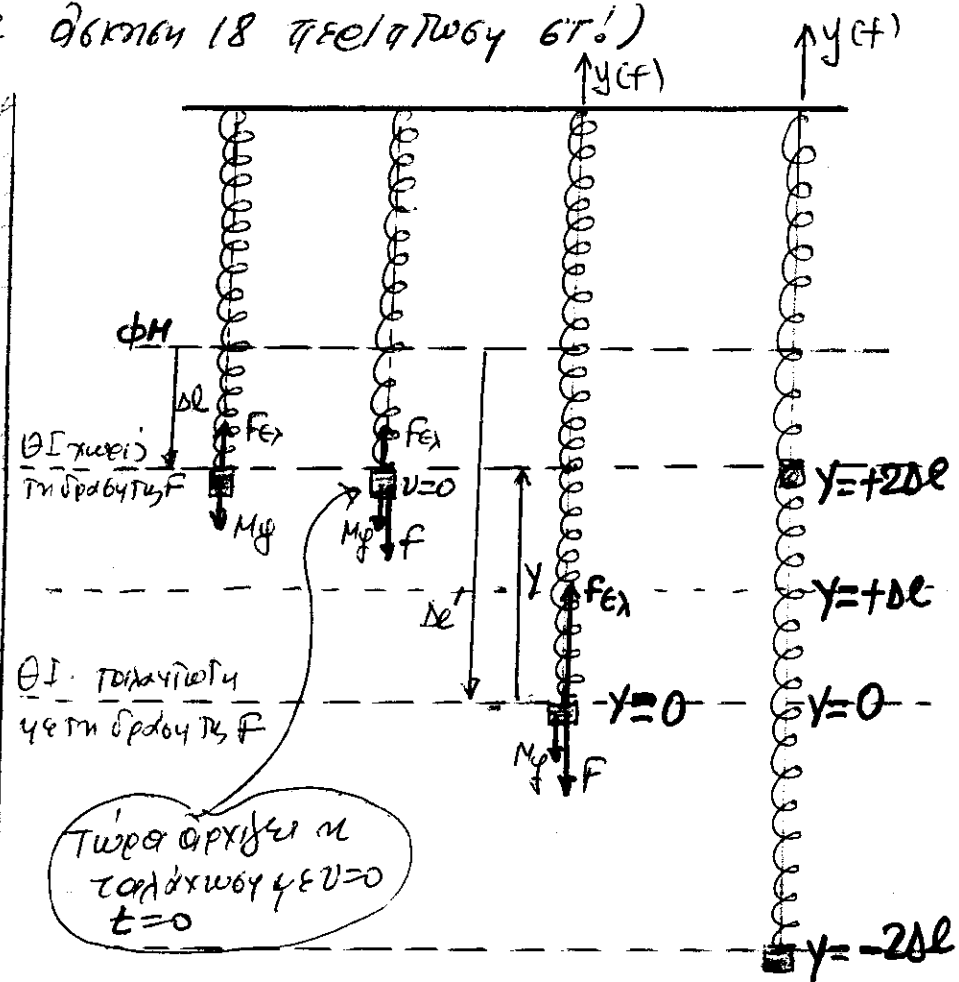


Γεωμετρική
 η F και αρχική
 η ταλάντωση
 προσκχ. βλ
 υπάρχει v ≠ 0

B) ηροδοχή, δύσκολη ερώτηση !!

Αν η δύναμη $\vec{F}$ δεν καταργούνταν ο ταλαντωτής θα
 έμενε α.α.τ, γιναι αέρο άλλη θέση με
 $D = K$ (βλέπε άσκηση 18 περίηρωα 6τ!)

- Αρχική θέση ηοαροαία
 χωρίς τη δράση τη F
 $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow K\Delta l = Mg$ (2)
- Θέση ηοαροαία με τη
 δράση τη $F = 2Mg$
 $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{ελ} = Mg + F$
 $\Rightarrow K\Delta l' = 3Mg$
 $\Rightarrow K\Delta l' = 3 \cdot K\Delta l$
 $\Rightarrow \Delta l' = 3\Delta l$
- Μόλις αρχίσει η
 ταλάντωση
 $\Rightarrow$ ταχύτητα $v = 0$
 $\Rightarrow$ αποοακωα
 $y = \Delta l' - \Delta l \Rightarrow y = 2\Delta l$



Επειδή $v=0$ η θέση αυτή είναι η άκρεια θέση
 της ταλάντωσης $\Rightarrow A = 2\Delta l$ και $T = 2\pi\sqrt{M/D} = 2\pi\sqrt{M/K}$ (2)

$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta l}{g}} \quad (3)$$

... Τώρα όπως η $\vec{F}$ καταργείται τότε αέρο επανόρριση
 Δl δηλαδή στη θέση $y = +\Delta l$... άρα ηηηίκα
 ο ταλάντωση αέρο $y = 2\Delta l$ γέρε $y = +\Delta l$ με $v < 0$...

$$\dots y = A \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow y = 2\Delta l \sin(\frac{2\pi}{T} \cdot t + \frac{\pi}{2}) \xrightarrow{y = +\Delta l, v < 0}$$

$$+\Delta l = 2\Delta l \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \xrightarrow{v < 0}$$

$$\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \frac{2\pi t}{T} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{T}{6} \Rightarrow t = \frac{1}{6} 2\pi \sqrt{\frac{M}{K}}$$

$$\Rightarrow \boxed{t = \frac{\pi}{3} \sqrt{\frac{M}{K}}}$$

Αρα ο υπολογισμός γινώκειν/ναι
είναι λανθασμένος
Δείτε η B.2

1.18

Θέση ισορροπίας - κεντρικό
ταλαντωτικό

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow B = F_g \Rightarrow Mg = k\Delta l_1$$

$$\Rightarrow \Delta l_1 = \frac{Mg}{k} \quad (1)$$

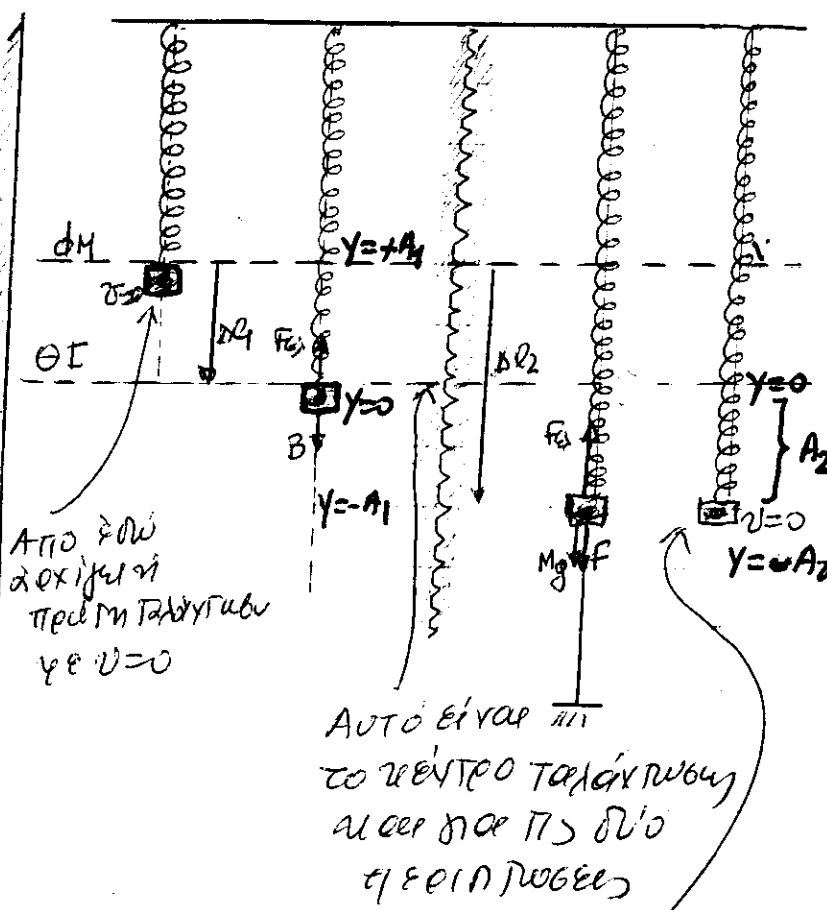
1η ταλάντωση.

Η ταλάντωση αυτή αρχίζει
από την θέση $y = +\Delta l_1$
(από το Φ.Μ.) με $v = 0$
όρα $A_1 = \Delta l_1 \quad (2)$

2η ταλάντωση.

Ο ταλαντωτής αυτός ισορροπεί
σε θέση που το ελατήριο έχει
παραμόρφωση $\Delta l_2 \dots$
 $\sum F_y = 0 \Rightarrow Mg + F = k\Delta l_2 \Rightarrow 2Mg = k\Delta l_2$
 $\Rightarrow \Delta l_2 = \frac{2Mg}{k} \xrightarrow{(1)} \Delta l_2 = 2\Delta l_1$

Μόλις κλείσει το κνηγά αρχίζει η ταλάντωση με $v = 0$
πύρω από το ΘI . Αρα το πλάτος της ταλάντωσης είναι
όση η απόσταση από το $\Theta I \dots A_2 = \Delta l_2 - \Delta l_1 \Rightarrow A_2 = \Delta l_1 \quad (3)$
(2), (3) $\Rightarrow \boxed{A_2 = A_1}$. Σωστή η (α)

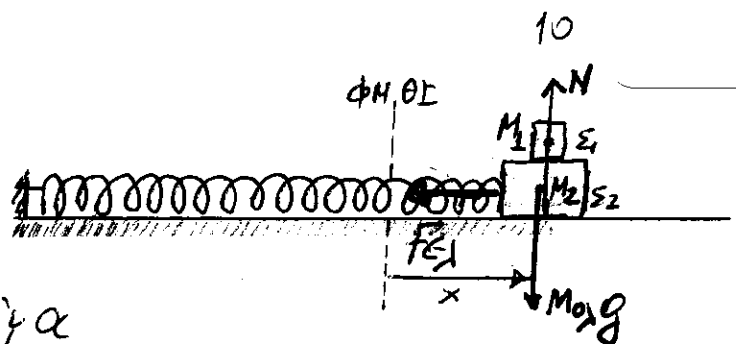


Από εδώ
αρχίζει η
πρώτη ταλάντωση
με $v = 0$

Αυτό είναι πλάτος
το κέντρο ταλάντωσης
αφού στα π.δ. δύο
η εφ'η ταλάντωση

Από εδώ αρχίζει
η δεύτερη ταλάντωση
με $v = 0$

1.19



Ο ταλαντωτής ω) ενιαίο σώμα

(Σ_1, Σ_2) γεμάτα $M_M = M_1 + M_2$ ήττει

α. α. γ γε σταθερά ελαστικότητας $D = K$ και κυκλική συχνότητα ω , $D = M_M \omega^2 \Rightarrow K = (M_1 + M_2) \omega^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{K}{M_1 + M_2}$ (1)

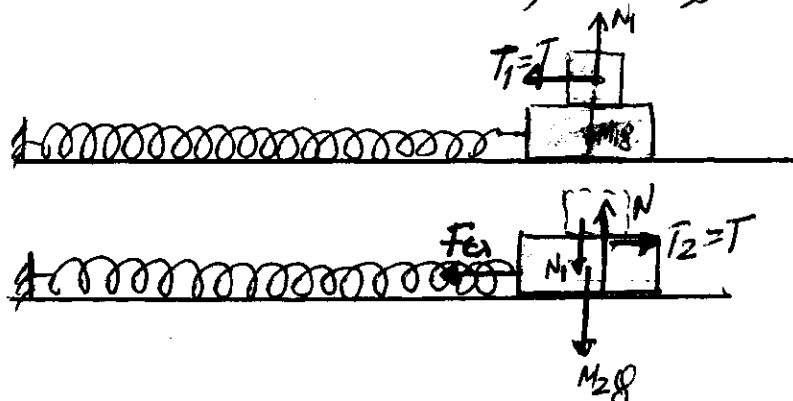
Όταν ακινητός Σ_1 ω) φέρο πν ανώτα, έχει την ίδια κυκλική συχνότητα, άρα σταθερά ελαστικότητας $D_1 = M_1 \omega^2 \Rightarrow D_1 = M_1 \frac{K}{M_1 + M_2} \Rightarrow D_1 = M_1 \frac{K}{4M_1} \Rightarrow D_1 = \frac{K}{4}$ (2)

Η δύναμη ελαστικότητας που θα είναι στην μαζωτική Σ_1 είναι $\Sigma F = -D_1 x \Rightarrow \Sigma F = -\frac{K}{4} x$

Άρα βωδμή η σχέση (8).

Σχόλια.

1. Η δύναμη ελαστικότητας στο βωδμητά (Σ_1, Σ_2) που ταλαντώνεται ω) ενιαίο ταλαντωτή είναι η δύναμη των ελατηρίων $\Sigma \vec{F} x = \vec{F}_{\Sigma_1}$
2. Η δύναμη ελαστικότητας στο Σ_1 (ω) φέρο πν ανώτα) είναι η ελαστική τριβή $T_1 = T$, $\Sigma \vec{F}_x = \vec{T}_1$
3. Η δύναμη ελαστικότητας στο Σ_2 (ω) φέρο πν ανώτα) είναι η συνισταμένη των $\vec{F}_{\Sigma_2}$ και τριβής $\vec{T}_2 = T$, $\Sigma \vec{F}_x = \vec{F}_{\Sigma_2} + \vec{T}_2$



1.20

A) Μέγ. ταχύτητας

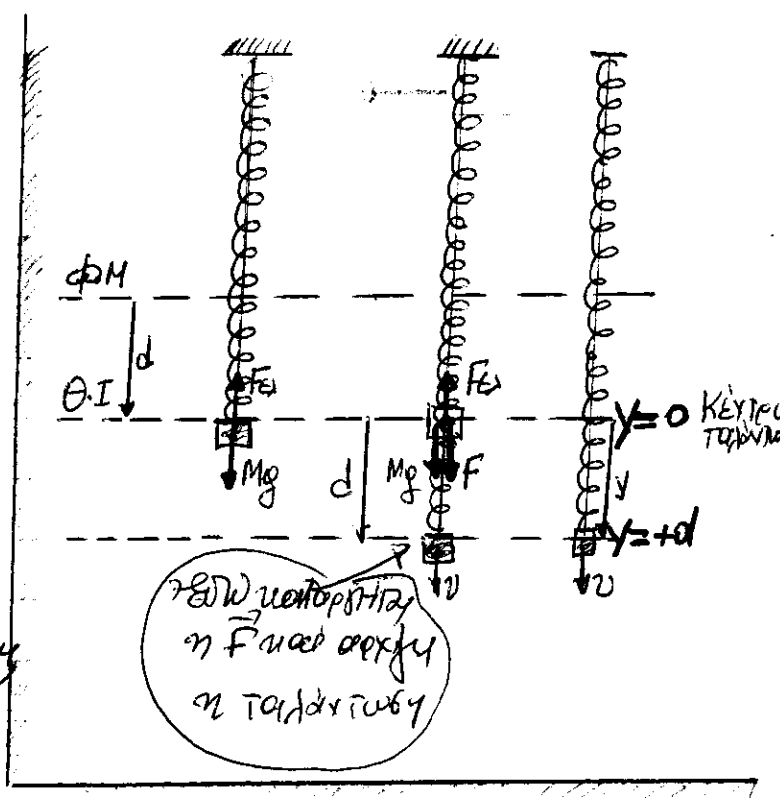
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow M_g = F_E \Rightarrow M_g = k \Delta l \Rightarrow M_g = k d \quad (1)$$

Ενέργεια που προσφέρεται στο ελαστικό: $E_{\text{πρω}} = W_F = Fd = M_g d$

Προφανώς $E_{\text{πρω}} = E_{\text{ελα}} \Rightarrow$

$$M_g d = \frac{1}{2} k \Delta l^2 \Rightarrow M_g d = \frac{1}{2} k A^2$$

$$\Rightarrow k d \cdot d = \frac{1}{2} k A^2 \Rightarrow \boxed{A = d \sqrt{2}}$$



→ Άλλος τρόπος που δεν ενδείκνυται είναι να υπολογίσουμε μαζί

αρχίζει η ταλάντωση

• Την αδοχόμενη y , ... εδώ $y = d$ (2)

• Την ταχύτητα v ή την κινητική ενέργεια ... $\Delta K = W_F + W_B + W_E$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} M v^2 - 0 = Fd + M_g d + \frac{1}{2} k \Delta l_{\text{αρχ}}^2 - \frac{1}{2} k \Delta l_{\text{τελ}}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} M v^2 = 2 M_g d + \frac{1}{2} k d^2 - \frac{1}{2} k (2d)^2 \Rightarrow \frac{1}{2} M v^2 = 2 M_g d - \frac{3}{2} k d^2 \quad (3)$$

$$E_{\text{μολο}} \text{ αρχικά} = E_{\text{ολική ταλάντωσης}} \Rightarrow W_{\text{αρχ}} + K_{\text{αρχ}} = E_{\text{ελα}} \Rightarrow \frac{1}{2} k d^2 + \frac{1}{2} M v^2 = \frac{1}{2} k A^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} k d^2 + 2 M_g d - \frac{3}{2} k d^2 = \frac{1}{2} k A^2 \xrightarrow[M_g = kd]{(1)} \frac{1}{2} k d^2 + 2 k d^2 - \frac{3}{2} k d^2 = \frac{1}{2} k A^2$$

$$\Rightarrow k d^2 = \frac{1}{2} k A^2 \Rightarrow \boxed{A = d \sqrt{2}} \quad \text{Σωστή η α.2}$$

B) Δύοκορο ερώτηση ... C!

Αν δεν υπαρχαίενταν η F το σωστό θα ήταν να είναι α.α.τ με σταθερά $D = K$ (... απόδειξη...) αλλά με άλλη θέση ισορροπίας, άλλο πλάτος ταλάντωσης, αλλά την ίδια περίοδο $T = 2\pi \sqrt{M/k}$

- Αρχική θέση ισορροπίας
πριν την δράση της F .
 $\sum F_y = 0 \Rightarrow Mg = k\Delta l \quad (4)$

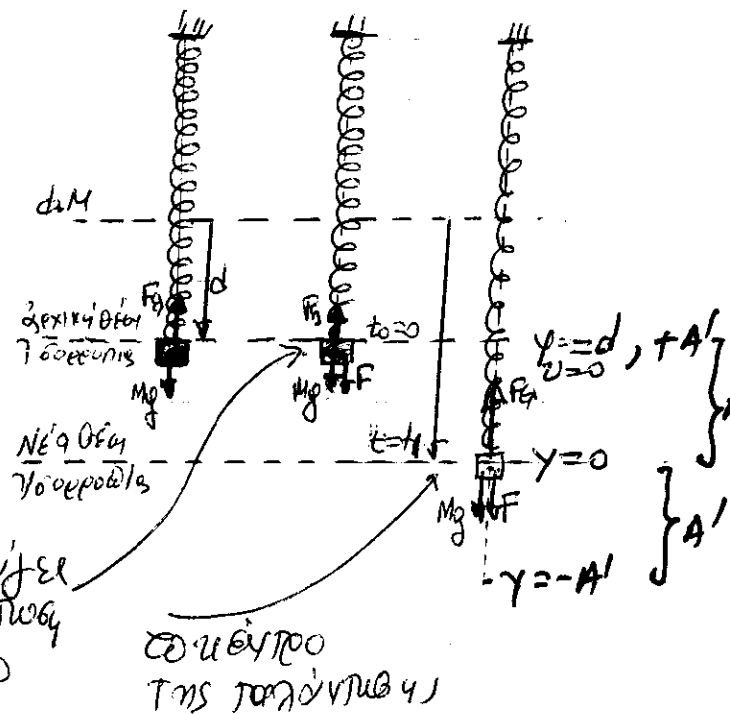
- Νέα θέση ισορροπίας
μετά την δράση της F
 $\sum F_y = 0 \Rightarrow Mg + F = k\Delta l$
 $\Rightarrow Mg + Mg = k\Delta l \xrightarrow{(4)}$
 $2kd = k\Delta l \Rightarrow \Delta l = 2d \quad (5)$

- Μόλις αρχίσει η ταλάντωση
GH

* απομάκρυνση
 $y = \Delta l - d \xrightarrow{(5)} y = +d$

- * ταχύτητα $v = 0$... όρα πόση αετή είναι η αεραριά
θέσης της ταλάντωσης πριν διαχωριστούν αν δράσει
σωσχύως η F . Άρα πλάτος αετή της ταλάντωσης
 $A' = d$. και ο χρόνος $\Delta t = t_1 - t_0$ είναι ο χρόνος
από την αεραριά θέσης στο μέγιστο της ταλάντωσης
όρα $\Delta t = t_1 - t_0 = \frac{T}{4} \Rightarrow \boxed{\Delta t = \frac{T}{4}}$

Σωστή η 3.3



1.21

1^η περίηλωση

Θέω[] σε κατάσταση συνδίκου

$$Mg = F_{\epsilon 1} \Rightarrow Mg = k \Delta l_1$$

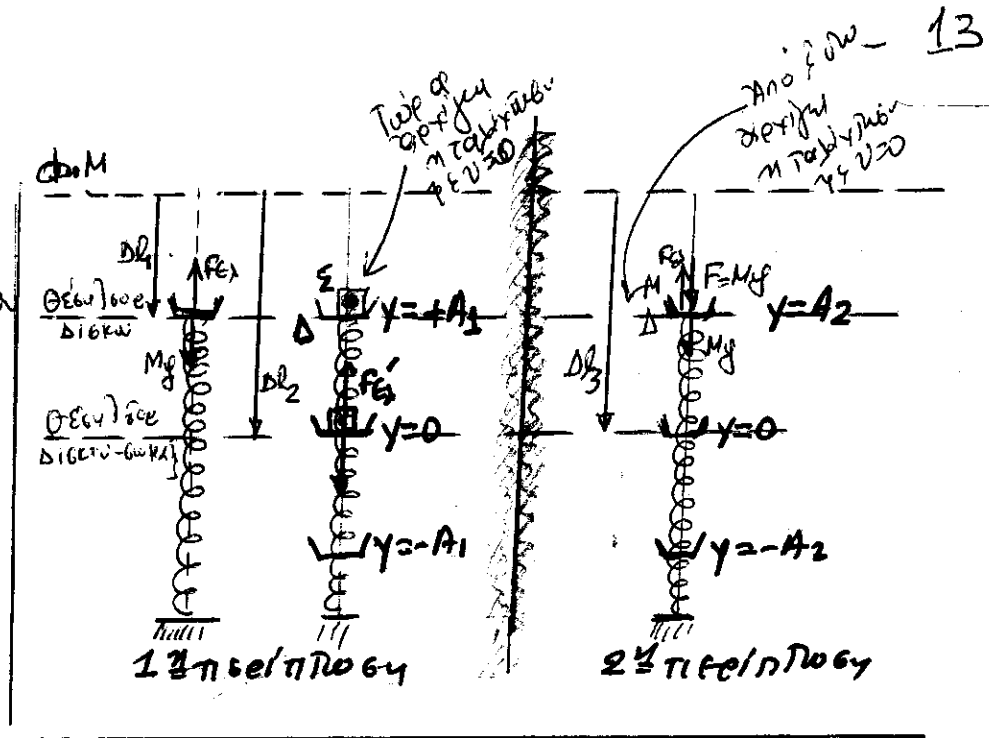
$$\Rightarrow \Delta l_1 = \frac{Mg}{k}$$

Θέω[] σε κατάσταση συν

δίκου - εω[] α[]

$$2Mg = F_{\epsilon 1}' \Rightarrow 2Mg = k \Delta l_2$$

$$\Rightarrow \Delta l_2 = \frac{2Mg}{k}$$



Μόλι[] θ[] ρίξει η ταλάντωση [] εω[] α[] (ε) - δίκου (δ)

$$y = \Delta l_2 - \Delta l_1 \Rightarrow y = \frac{Mg}{k}, v = 0 \dots \theta[] \rho[] \tau[] \lambda[] \alpha[] \tau[] A_1 = \frac{Mg}{k} \quad (1)$$

$$\text{Σταθερά ελαστικότητας } D_1 = k = 2M\omega_1^2 \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{k/2M}$$

$$\eta \text{ περίοδος } T_1 = 2\pi \sqrt{2M/k} \quad (2)$$

2^η περίηλωση

Θέω[] [] σε [] την ταλάντωση, αετ[]

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow Mg + F = k \Delta l_3$$

$$\Rightarrow 2Mg = k \Delta l_3 \Rightarrow \Delta l_3 = \frac{2Mg}{k}$$

Μόλι[] θ[] ρίξει η ταλάντωση αετ[] [] (εω[] α[] δίκου)

$$y = \Delta l_3 - \Delta l_1 \Rightarrow y = \frac{Mg}{k} \dots \mu[] \alpha[] v = 0, \theta[] \rho[] A_2 = y$$

$$\Rightarrow A_2 = \frac{Mg}{k} \quad (3)$$

$$D_2 = k = M\omega_2^2 \Rightarrow \omega_2 = \sqrt{k/M}, T_2 = 2\pi \sqrt{M/k} \quad (4)$$

$$A.) \quad (1); (3) \Rightarrow \boxed{A_1 = A_2} \quad \text{Σωστή η Α.1}$$

$$B.) \quad (2), (4) \Rightarrow T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}} \cdot \sqrt{2} \xrightarrow{(4)} T_1 = T_2 \sqrt{2} \Rightarrow \boxed{T_2 = \frac{T_1}{\sqrt{2}}}$$

Άρα σωστή η Β.4

1.22

Αρχική θέση ισορροπίας
των σωμάτων: $\sum F_y = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow Mg = k\Delta l \Rightarrow \Delta l = \frac{Mg}{k} \quad (1)$
Ελατήριο σε συνεκτική κατάσταση

Με το γρήγορο το σώμα ισορροπίας
προς τα κάτω τεταμένο
και τότε $\Delta l \dots$

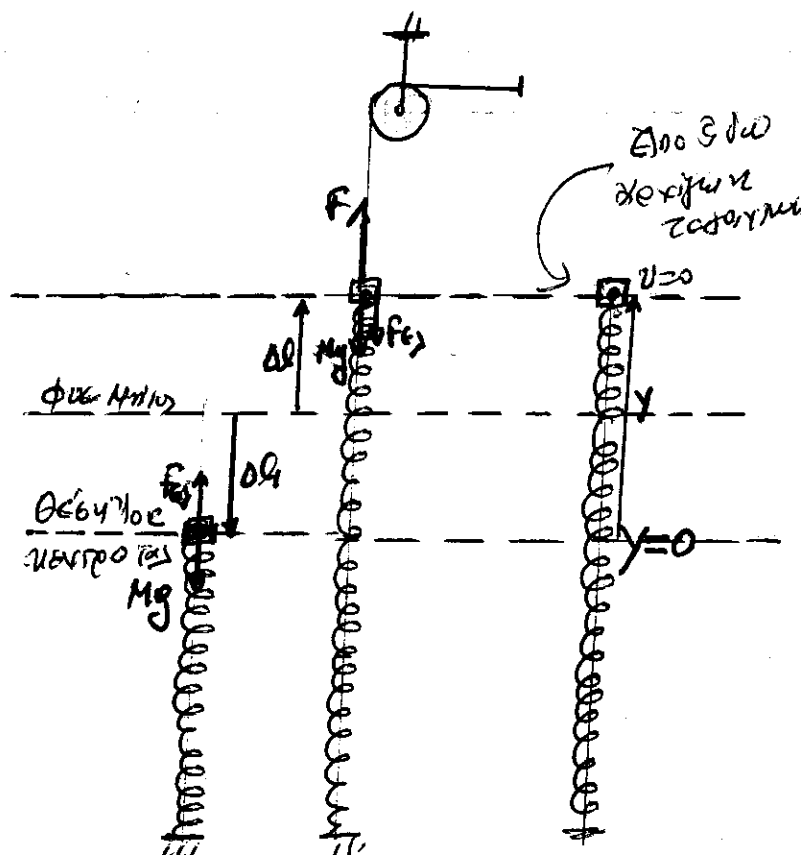
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F = F_{el} + Mg$$

$$\Rightarrow 1,5Mg = k\Delta l + Mg$$

$$\Rightarrow 0,5Mg = k\Delta l$$

$$\Rightarrow \Delta l = \frac{0,5Mg}{k} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \Delta l = 0,5\Delta l_1 \Rightarrow \Delta l_1 = 2\Delta l$$



Μόλις κόβεται το γρήγορο, αρχίζει η ταλάντωση $y \in$
 $y = \Delta l_1 + \Delta l \Rightarrow y = 3\Delta l$ και $v = 0$

Αρα το πλάτος της ταλάντωσης είναι $A = 3\Delta l$

Σωστή η απάντηση δ.

1.23

$$x = 0,8 \cos(\omega t) \text{ SI}$$

$$\cos(2\omega t) = 2\cos^2(\omega t) - 1 \Rightarrow \cos^2(\omega t) = \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2} \Rightarrow \cos^2(\omega t) = \frac{1 + \cos(10\pi t)}{2}$$

$$\Rightarrow x = 0,8 \cdot \frac{1 + \cos(10\pi t)}{2} \Rightarrow x = 0,4 + 0,4 \cos(10\pi t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 0,4 + 0,4 \sin(10\pi t + \frac{\pi}{2}) \text{ Αρα ευτελεί α.ο.τ 6ε}$$

αφού x $y \in$ πλάτος $A = 0,4 \text{ m}$, περίοδο $T = \frac{2\pi}{10\pi} = 0,2 \text{ s}$

και την $t = 0$ είναι στη θέση $x = +0,8 \text{ m}$. Η ταλάντωση

γίνεται γύρω από την θέση $x = 0$ $x = +0,8 \text{ m}$

$$x' \quad x = 0$$

$$x = 0,4$$

$$x = 0,8$$

$$\Sigma \omega \tau \omega \tau \quad [s]$$

ΘΣ

1.24

4)

• Ταχύτητα στο (Σ) λίγο πριν την

κρούση: $v = \sqrt{2gh}$

• Ταχύτητα συνωστισμένης...
... και πάλι $v = \sqrt{2gh}$ (ο δίσκος
... δεν έχει κρούση...).

• Στην ισορροπία $\Sigma F_y = 0$

$$\Rightarrow m g = F_{el} = k \Delta \ell$$

$$\Rightarrow m g = k \Delta \ell \Rightarrow \Delta \ell = \frac{m g}{k} \quad (1)$$

• Θυμάμενη το ΦΗ μέχρι $v=0$, στη φθίνουσα παρονομαστική

$$\Delta K = W_B + W_{el} \Rightarrow 0 - \frac{1}{2} m v^2 = m g \Delta \ell_{max} - \frac{1}{2} k \Delta \ell_{max}^2$$

$$\left. \begin{array}{l} v^2 = 2gh \\ \Delta \ell_{max} = H \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} m \cdot 2gh = m g H - \frac{1}{2} k H^2 \Rightarrow H = \frac{4 m g}{k} \xrightarrow{(1)} H = 4 \Delta \ell \Rightarrow \Delta \ell = \frac{1}{4} H$$

Από το σχήμα φαίνεται ότι $A = \Delta \ell_{max} - \Delta \ell$

$$\Rightarrow A = H - H/4 \Rightarrow \boxed{A = \frac{3H}{4}} \quad \text{Σωστή η Α.3} \quad \boxed{A = 0,75 H}$$

$$B) \left. \begin{array}{l} D = k = m \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{k/m} \\ m g = k \Delta \ell \Rightarrow k/m = g/\Delta \ell \end{array} \right\} \Rightarrow \omega = \sqrt{g/\Delta \ell} = \sqrt{g/H/4} \Rightarrow \omega = \sqrt{4g/H}$$

$$\Rightarrow \omega = 2\sqrt{g/H} \quad \text{Σωστή η Β.2}$$

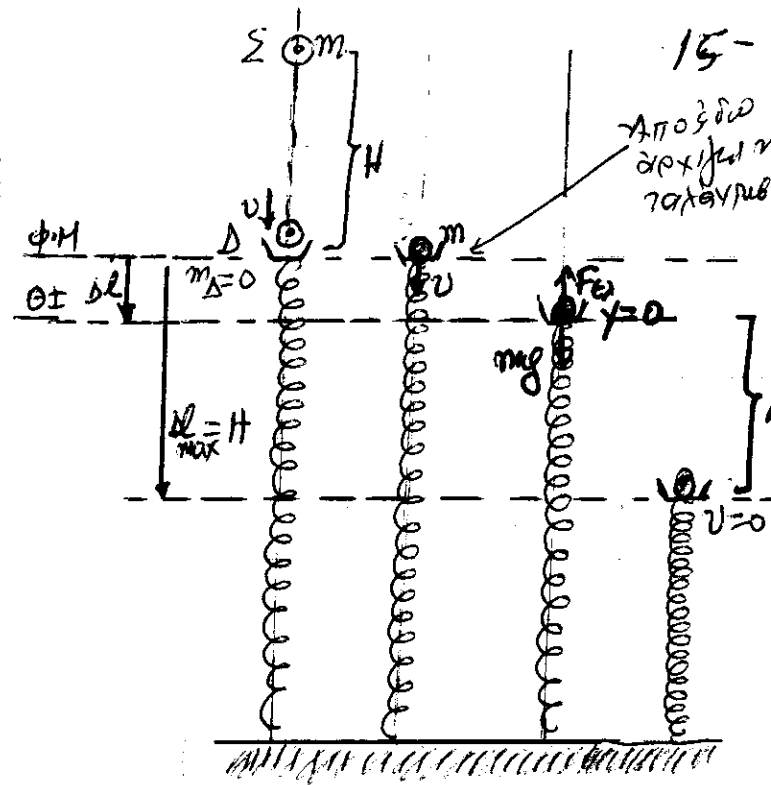
Η πρώτη φάση (με σύγκρουση και ανταλλαγή)

$$K_{αρχ} + U_{αρχ} = E_{ταλ} \Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k y^2 = \frac{1}{2} k A^2 \Rightarrow m g H + \frac{1}{2} k \Delta \ell^2 = \frac{1}{2} k A^2$$

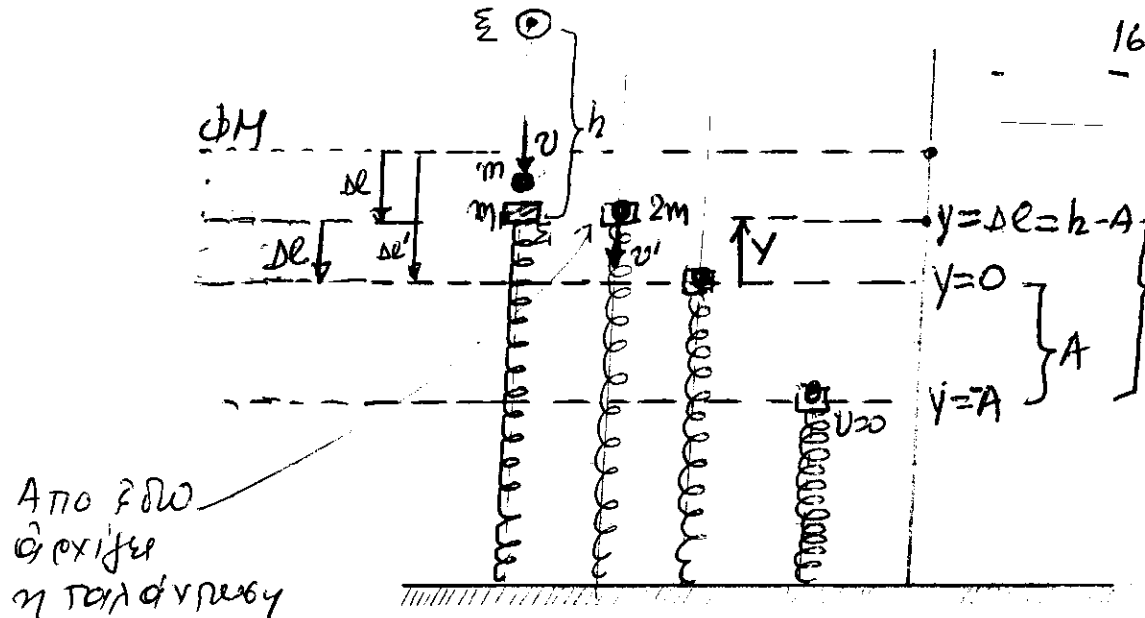
$$\Rightarrow \left[\frac{1}{2} k \Delta \ell H + \frac{1}{2} k \Delta \ell^2 = \frac{1}{2} k A^2 \right] \Rightarrow k (H - A) H + \frac{1}{2} k (H - A)^2 = \frac{1}{2} k A^2$$

$$\Delta \ell = H - A$$

$$\dots \Rightarrow \boxed{A = \frac{3}{4} H}$$



1.25



Από έδω
ώριξε
η ταλάντωση

- Θεωρ. ισορροπίας τα Σ_1 : $mg = k\Delta l$
- Θεωρ. ισορροπίας τα Σ_1, Σ_2 : $2mg = k\Delta l'$ (∴ αβν ποτμ) (αλφν βω)
- $v = \sqrt{2gh}$, $mv = 2mv' \Rightarrow v' = \frac{v}{2} = \frac{\sqrt{2gh}}{2}$ ∴ ταχύτητα

υόλιω ώριξε η ταλάντωση. Έχουμε

$$y = \Delta l' - \Delta l = 2\Delta l - \Delta l = \Delta l = h - A \quad \text{και} \quad v' = \frac{\sqrt{2gh}}{2}$$

προφανώς $\underbrace{U + K}_{\text{αλφν βω}} = E \Rightarrow \frac{1}{2}ky^2 + \frac{1}{2}2mv'^2 = \frac{1}{2}kA^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}k(h-A)^2 + m\left(\frac{\sqrt{2gh}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{1}{2}k(h-A)^2 + \frac{1}{2}mgh &= \frac{1}{2}kA^2 \\ mgh &= k\Delta l = k(h-A) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2}k(h-A)^2 + \frac{1}{2}k(h-A)h = \frac{1}{2}kA^2$$

$$\Rightarrow (h-A)^2 + (h-A)h = A^2$$

$$\Rightarrow h^2 + A^2 - 2hA + h^2 - Ah = A^2 \Rightarrow 2h^2 = 3hA \Rightarrow \boxed{A = \frac{2h}{3}}$$

Άρα βω ότι η βχέση (δ)

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ
ΤΟΥ ΔΙΑΚΩΝΑ

$$m_{sp} = k \Delta l$$

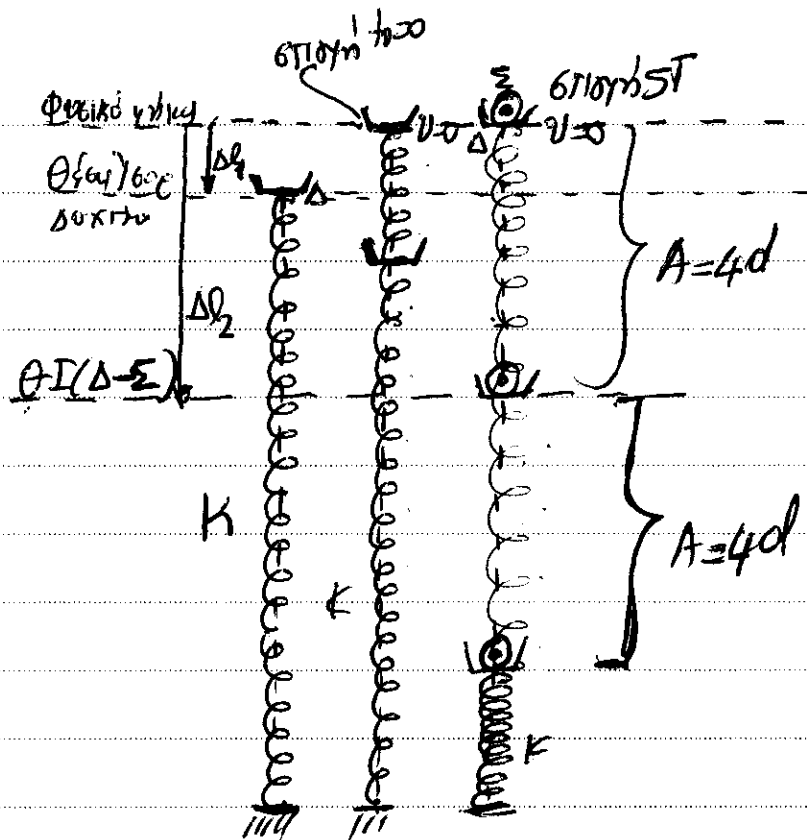
$$m_{sp} = k \Delta l$$

$$\Rightarrow \Delta l = \frac{m_{sp}}{k}$$

$$d = \Delta \ell_1 = \frac{m \cdot \rho}{K}$$

$\pi \lambda \alpha' \approx A_1 = d$

$$\pi e / \omega, T = 2\pi \sqrt{m/k}$$



Or by considering in ΔE : $4mg = k\Delta l_2 \Rightarrow \Delta l_2 = \frac{4mg}{k} = 4d$

Που σημαίνει $\neq \emptyset$ η τομή των Δ είναι γνήσια υποσύνολο του Δ και το Δ είναι στην δέση του Φ

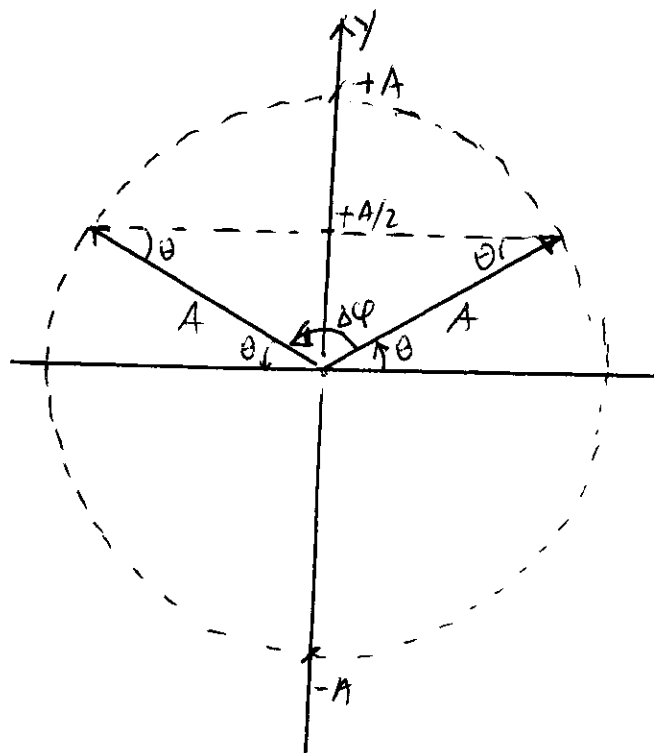
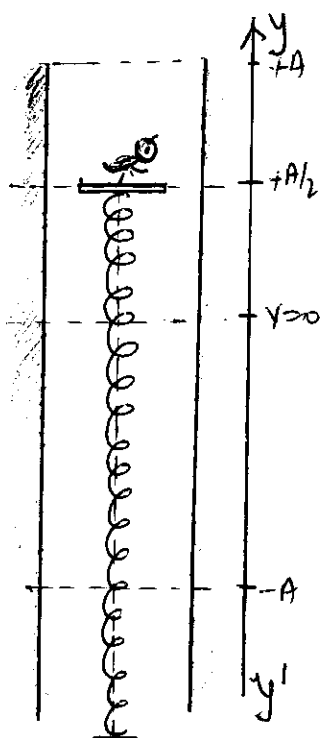
Από αυτή την στιγμή ξεκίνησε η διαμάχη του Δ-Σ με
 όσον αφορά την οικονομία της χώρας, την κατάσταση
 η οποία θα είχε πια την

$A = \Delta l_2 = 4d$ uoi periodo, $T' = 2\pi\sqrt{\frac{4\pi}{g}} = 2 \cdot 2\pi\sqrt{\frac{\pi}{g}} = 2T$

Η ταχύτητα ηχοεπίφυγας από την ατμόσφαιρα είναι
 69 χιλ.ο $\Delta t = \frac{r}{2} = \frac{?}{2} = T$ και η ταχύτητα ατμοσφαιρικής

$$S = 2A = 2 \cdot 40^\circ = 80^\circ \quad (\Delta t = T, \beta = 80^\circ)$$

↳ Growth is 5



Ο κύβλος έχει την δυνατότητα ξείδου όταν είκαο
πάχω αώο ανώοφάκανη $y = +A/2$

Σηη θείση αωτή είκαο ηη προνιου, στιδυεί) ...

$$y = A \sin(\omega t) = +A/2 \Rightarrow \sin(\omega t) = +\frac{1}{2} \Rightarrow \omega t = \begin{cases} 2\pi n + \frac{\pi}{6} \\ 2\pi n + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2\pi}{T} t = 2\pi n + \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = kT + \frac{T}{12} \xrightarrow{k=0} t_1 = \frac{T}{12} \\ \frac{2\pi}{T} t = 2\pi n + \frac{5\pi}{6} \Rightarrow t = kT + \frac{5T}{12} \xrightarrow{k=0} t_2 = \frac{5T}{12} \end{cases}$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{4T}{12} = \frac{T}{3} \Rightarrow \boxed{\Delta t = \frac{T}{3}}$$

... και $t \in$ στρεφύςνω διόγυβγα...

$$\sin \theta = \frac{A/2}{A} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \dots \Delta \phi = \frac{2\pi}{3} = \omega \Delta t = \frac{2\pi}{T} \Delta t$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{T}{3}$$

Αρα βωβη η έξείση (β)

1.28

α) Η ταλάντωση γίνεται γύρω από τη θέση ισορροπίας.

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow 10 - 50x = 0 \Rightarrow x = +0,2 \text{ m} \dots \text{και επειδή έχει πλάτος } A = 0,3 \text{ m}$$

θα γίνει με μετατόπιση των δέσμων $x_1 = 0,2 - 0,3 = -0,1 \text{ m}$ και $x_2 = 0,2 + 0,3 =$

$$x_2 = +0,5 \text{ m}$$

Άρα η πρόταση (α) είναι λάθος

β) Στα σχήματα φαίνονται

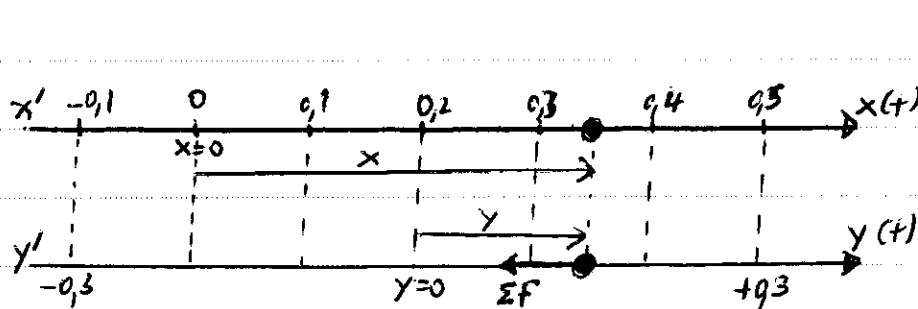
ο άξονας $x'x$ και ο

άξονας ταλάντωσης $y'y$

με την ταλάντωση βεγάζει

τυχαία θέση. Στην

τυχαία αυτή θέση



η συντεταγμένη x και η απομάκρυνση y συνδέονται με

$$\text{την σχέση } x = 0,2 + y$$

Για να έχουμε α.α.τ πρέπει να ισχύει $\Sigma F = -Dy$ και

όχι $\Sigma F = -Dx$ αφού y είναι η απομάκρυνση.

$$\text{Προίχγατι } \Sigma F = -10 - 50x \Rightarrow \Sigma F = 10 - 50(0,2 + y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Sigma F = -50y$$

Άρα έχουμε απλή αρμονική ταλάντωση

με σταθερά ελαστικότητας $D = 50 \text{ N/m}$

Σωστή η πρόταση (β)