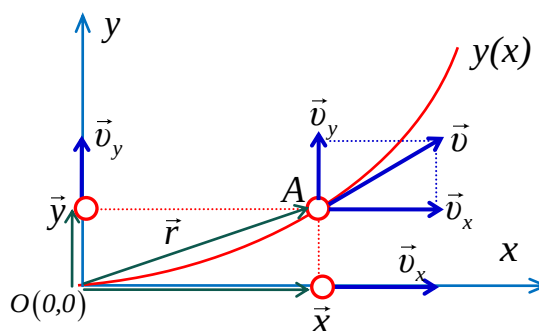


Η κινητική ενέργεια ενός κινητού στη σύνθετη κίνηση.

Μια σύνθετη κίνηση συνήθως μελετάται με την αρχή ανεξαρτησίας των κινήσεων, σύμφωνα με την οποία κάθε μία από τις επιμέρους κινήσεις γίνεται ανεξάρτητα από τις άλλες και τα κινητικά χαρακτηριστικά της κάθε κίνησης (θέση, ταχύτητα, επιτάχυνση) εξαρτώνται και μεταβάλλονται μόνο από τα δεδομένα της κάθε κίνησης.

Το κινητό του σχήματος κινείται στην τροχιά $y(x)$ εκτελώντας την σύνθετη κίνηση δύο άλλων κινήσεων που ως ανεξάρτητες θα γίνονταν στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα. Αν



έκανε τις ανεξάρτητες κινήσεις την χρονική στιγμή t για κάθε μια κίνηση θα είχε τα ακόλουθα κινητικά χαρακτηριστικά και κινητική ενέργεια :

Κίνηση στον άξονα $x'x$: θέση $\vec{x}$, ταχύτητα $\vec{v}_x$, επιτάχυνση $\vec{a}_x$, κινητική ενέργεια K_1 .

Κίνηση στον άξονα $y'y$: θέση $\vec{y}$, ταχύτητα $\vec{v}_y$, επιτάχυνση $\vec{a}_y$, κινητική ενέργεια K_2 .

Τώρα που το κινητό εκτελεί την σύνθετη κίνηση για τα κινητικά χαρακτηριστικά θα ισχύει .

Θέση - διάνυσμα θέσης : $\vec{r} = \vec{x} + \vec{y}$,

Ταχύτητα: $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$ και η οποία θα έχει μέτρο $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + 2v_x v_y \sin\theta$, όπου θ η γωνία που σχηματίζουν οι επιμέρους ταχύτητες και προφανώς και οι επιμέρους άξονες ... (για το σχήμα $\theta = \pi / 2$).

Επιτάχυνση: $\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$

Το ερώτημα που τίθεται είναι ποιά θα είναι η σχέση της κινητικής ενέργειας K που έχει το κινητό όταν εκτελεί την σύνθετη κίνηση με κινητικές ενέργειες K_1 και K_2 που θα είχε αν εκτελούσε ξεχωριστά κάθε μια από τις ανεξάρτητες κινήσεις.

$$\text{Κίνηση } x'x: K_1 = \frac{1}{2} m v_x^2 \Rightarrow v_x^2 = \frac{2K_1}{m} \Rightarrow v_x = \sqrt{\frac{2K_1}{m}}$$

$$\text{Κίνηση } y'y: K_2 = \frac{1}{2} m v_y^2 \Rightarrow v_y^2 = \frac{2K_2}{m} \Rightarrow v_y = \sqrt{\frac{2K_2}{m}}$$

$$\text{Σύνθετη κίνηση } y(x): K = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + 2v_x v_y \sin\theta) \Rightarrow$$

$$K = \frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} m v_y^2 + \frac{1}{2} m 2v_x v_y \sin\theta \Rightarrow K = K_1 + K_2 + m \sqrt{\frac{2K_1}{m}} \sqrt{\frac{2K_2}{m}} \sin\theta$$

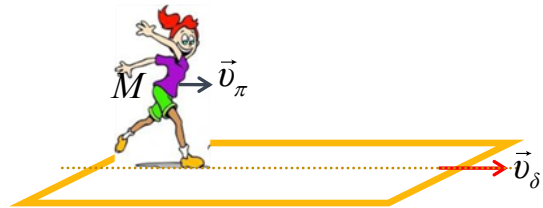


$$\Rightarrow K = K_1 + K_2 + 2\sqrt{K_1 K_2} \sin \theta.$$

Από την σχέση αυτή φαίνεται ότι $K \neq K_1 + K_2$ και η ισότητα $K = K_1 + K_2$ υπάρχει μόνο αν $\theta = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$, δηλαδή οι επιμέρους κινήσεις γίνονται σε κάθετους μεταξύ άξονες ($y \perp x$).

1η εφαρμογή:

Στο σχήμα φαίνεται μια ταινία-διάδρομο να κινείται με σταθερή ταχύτητα $v_\delta = 1 \text{ m/s}$ και ένα παιδί μάζας $M = 60 \text{ Kg}$ να κινείται πάνω σε αυτή με ταχύτητα ως τον διάδρομο $v_\pi = 0,5 \text{ m/s}$.

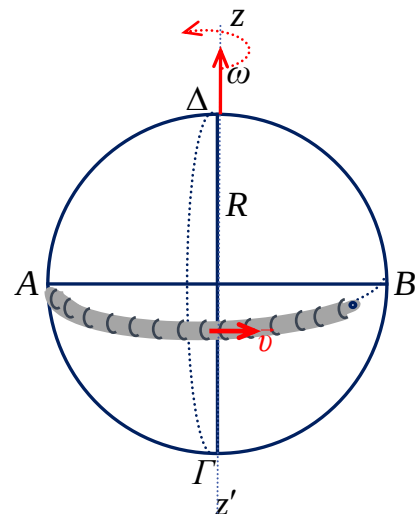


- Αν ο διάδρομος ήταν ακίνητος και το παιδί είχε ταχύτητα $v_\pi = 0,5 \text{ m/s}$ η κινητική του ενέργεια θα ήταν, $K_1 = \frac{1}{2} M v_\pi^2 \Rightarrow K_1 = 7,5 \text{ J}$.
- Αν το παιδί ήταν ακίνητο ως προς τον διάδρομο που κινείται με $v_\delta = 1 \text{ m/s}$, το παιδί θα είχε κινητική ενέργεια $K_2 = \frac{1}{2} M v_\delta^2 \Rightarrow K_2 = 30 \text{ J}$.
- Τώρα που το παιδί και ο διάδρομος κινούνται, η ταχύτητα του παιδιού ως προς ακίνητο παρατηρητή θα είναι $\vec{v} = \vec{v}_\delta + \vec{v}_\pi \Rightarrow v = 1,5 \text{ m/s}$ και θα έχει κινητική ενέργεια $K = \frac{1}{2} M v^2 \Rightarrow K = 67,5 \text{ J}$.

Προφανώς $K \neq K_1 + K_2$

2η Εφαρμογή (είναι στο βιβλίο μου Σύνθετα Θέματα)

Μια γυάλινη σφαίρα ακτίνας $R = 0,6 \text{ m}$ έχει στερεωμένες στο εσωτερικό της δύο λεπτές μεταλλικές ράβδους που ταυτίζονται με δύο διαμέτρους μια οριζόντια AB και μια κατακόρυφη ΓΔ. Η σφαίρα περιστρέφεται περί κατακόρυφο άξονα $z'z$ που ταυτίζεται με την κατακόρυφη διάμετρο ΓΔ. Ένα φίδι μάζας $m = 2,5 \text{ Kg}$ και μήκος $\ell = 1,2 \text{ m}$ είναι τεντωμένο και κινείται πάνω στον μέγιστο οριζόντιο κύκλο της σφαίρας. Κάποια στιγμή η γυάλινη σφαίρα έχει γωνιακή ταχύτητα $\omega = 2 \text{ rad/s}$ και το φίδι ταχύτητα $v = 0,2 \text{ m/s}$ ως προς τον γυάλινη σφαίρα. Εκείνη τη στιγμή ζητείται η κινητική ενέργεια του φιδιού.



Να θεωρήσετε ότι το φίδι είναι περίπου ομογενές λεπτό κυλινδρικό σώμα με πάχος αμελητέο ως προς την ακτίνα της γυάλινης σφαίρας.

Το φίδι μετέχει της στροφικής κίνησης της γυάλινης σφαίρας έχοντας γωνιακή ταχύτητα ω και ταυτόχρονα έχει και ίδια (σχετική) κίνηση ως προς την σφαίρα με ταχύτητας $v = 0,2 \text{ m/s}$. Κάθε στοιχειώδης μάζα m_i του φιδιού έχει το ίδιο μέτρο ταχύτητας $v' = v + \omega R$ (ως προς ακίνητο παρατηρητή). Η κινητική ενέργεια του φιδιού θα είναι:

$$K_{\varphi, \text{τελική}} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \xrightarrow{v_i = v + \omega R} K_{\varphi, \text{τελική}} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} m_i (v + \omega R)^2 \right) \Rightarrow$$

$$K_{\varphi, \text{τελική}} = \frac{1}{2} (v + \omega R)^2 \sum_{i=1}^n (m_i) \Rightarrow K_{\varphi, \text{τελική}} = \frac{1}{2} m (v + \omega R)^2 \xrightarrow{s.l} \Rightarrow$$

$$K_{\varphi, \text{τελική}} = \frac{1}{2} 2,5 (0,2 + 2 \cdot 0,6)^2 \Rightarrow K_{\varphi, \text{τελική}} = 2,45 \text{ J}$$

Παρατηρείστε ότι η κινητική ενέργεια του φιδιού δεν είναι το άθροισμα της κινητικής λόγω της μετοχικής στροφικής κίνησης και της κινητικής λόγω της ίδιας κίνησης .

$$K_{\varphi, \text{τελική}} \neq K_{\varphi, \text{τελική}}^{\text{στροφικής}} + K_{\varphi, \text{τελική}}^{\text{ίδιας κίνησης}} \Rightarrow K_{\varphi, \text{τελική}} \neq \frac{1}{2} I_{2,\varphi} \omega^2 + \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow$$

$$K_{\varphi, \text{τελική}} \neq \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 + \frac{1}{2} m v^2 .$$

Η κινητική ενέργεια στην σύνθετη κίνηση του στερεού.

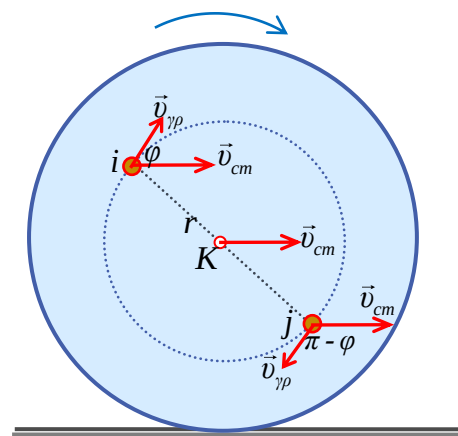
Στην κύλιση ενός στερεού θεωρούμε (και μάλιστα στο σχολικό δίδεται με την λογική του αυτονόητου) ότι η κινητική ενέργεια είναι το άθροισμα των κινητικών ενεργειών λόγω μεταφορικής και στροφικής κίνησης

$$K = K_{\text{μεταφορική}} + K_{\text{στροφική}} \Rightarrow K = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 .$$

Σωστή η σχέση ... αλλά καθόλου αυτονόητη...

Έστω ο δίσκος του σχήματος που εκτελεί κύλιση και κάποια στιγμή έχει ταχύτητα μεταφοράς του κέντρου του $\vec{v}_{cm}$ και γωνιακή ταχύτητα περιστροφής ω . Για κάθε σημείο i του κυλίνδρου με μάζα $dm_i = dm$ υπάρχει και το συμμετρικό του j ως προς το κέντρο K με μάζα $dm_j = dm$.

Τα σημεία αυτά εκτελούν σύνθετη κίνηση με ταχύτητα μεταφοράς $\vec{v}_{cm}$ και γραμμική ταχύτητα $\vec{v}_{\gamma\rho} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. Οι δύο αυτές ταχύτητες στο σημείο i σχηματίζουν γωνία φ και στο σημείο j γωνία $\pi - \varphi$. Έτσι η συνολική ταχύτητα των δύο αυτών σημείων είναι ... $v_i^2 = v_{cm}^2 + v_{\gamma\rho}^2 + 2 v_{cm} v_{\gamma\rho} \cos \varphi$ και



$$v_j^2 = v_{cm}^2 + v_{\gamma\rho}^2 + 2v_{cm}v_{\gamma\rho}\cos(\pi - \varphi) \text{ ή } v_j^2 = v_{cm}^2 + v_{\gamma\rho}^2 - 2v_{cm}v_{\gamma\rho}\cos\varphi . \text{ Η κινητική}$$

και των δύο αυτών υλικών σημείων θα είναι... $K_i + K_j = \frac{1}{2}dm_i v_i^2 + \frac{1}{2}dm_j v_j^2$

$$\text{ή } K_i + K_j = \frac{1}{2}dm_i (v_{cm}^2 + v_{\gamma\rho}^2 + 2v_{cm}v_{\gamma\rho}\cos\varphi) + \frac{1}{2}dm_j (v_{cm}^2 + v_{\gamma\rho}^2 - 2v_{cm}v_{\gamma\rho}\cos\varphi)$$

$$\xrightarrow{dm_i=dm_j=dm} K_i + K_j = \frac{1}{2}dm_i (v_{cm}^2 + v_{\gamma\rho}^2) + \frac{1}{2}dm_j (v_{cm}^2 + v_{\gamma\rho}^2).$$

Η συνολική ενέργεια του στερεού είναι το άθροισμα όλων αυτών των επιμέρους ενεργειών όλων των σημείων του.

$$K = \sum_{i=1}^n K_i + \sum_{j=1}^n K_j \Rightarrow K = \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2}dm_i (v_{cm}^2 + v_{\gamma\rho}^2) \right] + \sum_{j=1}^n \left[\frac{1}{2}dm_j (v_{cm}^2 + v_{\gamma\rho}^2) \right]$$

$$\Rightarrow K = \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2}dm_i (v_{cm}^2 + \omega^2 r^2) \right] + \sum_{j=1}^n \left[\frac{1}{2}dm_j (v_{cm}^2 + \omega^2 r^2) \right]$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{2}v_{cm}^2 \sum_1^n [dm_i + dm_j] + \frac{1}{2}\omega^2 \sum_1^n [(dm_i + dm_j)r^2] \quad (1)$$

$$\text{Επειδή : } \sum_1^n [dm_i + dm_j] = M = \text{μάζα σώματος και}$$

$$\sum_1^n [(dm_i + dm_j)r^2] = I = \text{ροπή αδράνειας , η προηγούμενη σχέση (1)}$$

$$\text{γράφεται } K = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \text{ ή } K = K_{\text{μεταφοράς}} + K_{\text{στροφικής}} \quad (\text{\textcolor{red}{6.3.8}})$$

